Лекция 6. Понятие о логарифмической производной. Производные высших порядков. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Исследование функций и построение графиков с применением производных.

Производная логарифмической функции

Рассмотрим логарифмическую функцию $y = \log_a x, (x > 0, a > 0, a \neq 1)$

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x} \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ получим $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$

Следовательно $y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ В частности $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

Понятие о логарифмической производной

Рассмотрим сложную функцию $y = \ln z, z = \varphi(x)$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$y'_x = (\ln z)'_x = (\ln z)'_z \cdot z'_x \Rightarrow y'_x = \frac{1}{z} \cdot z'_x \Rightarrow y' = (\ln z)'_x = \frac{z'}{z}$$

Производная от логарифмической функции называется логарифмической производной функции.

Пример

$$y = \ln(x^2 + 4x + 5) \Rightarrow y' = \frac{(x^2 + 4x + 5)'}{x^2 + 4x + 5} = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5}$$

Таблица формул дифференцирования

№	**Функция и ее производная**
1	$c' = 0$
2	$(u+v-w)' = u' + v' - w'$
3	$(cu)' = cu'$
4	$(uv)' = u'v + uv'$
5	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
6	$y'_x = y'_z \cdot z'_x$
7	$x'_y = \frac{1}{y'_x}$
8	$(x^n)' = nx^{n-1}$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(tgx)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(ctgx)' = -\cos ec^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, (\ln x)' = \frac{1}{x}$
14	$(a^x)' = a^x \ln a, (e^x)' = e^x$

15	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
18	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
19	$(chx)' = shx$
20	$(shx)' = chx$
21	$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$
22	$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

Производная функции, заданной параметрическими уравнениями

Зависимость между переменными x,y иногда удобно задавать двумя уравнениями $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ (1), где t – вспомогательная переменная, (параметр). Например, в механике t – время, уравнения (1) – параметрические уравнения траектории движущейся точки.

В общем случае, уравнения (1) определяют y как сложную функцию относительно x. Разрешив первое уравнение системы (1) относительно параметра t (если это возможно), получим $t=\theta(x), \theta$ – функция, обратная к функции φ .

Далее, исключая из уравнений (1) параметр t, получаем $y=\psi(\theta(x))$ (2).

Пользуясь формулой (2) легко найти производную y_x' как производную сложной функции.

Кроме того, существует правило для нахождения y_x' не требующее исключение параметра *t (*параметр невозможно исключить).

<u>Теорема</u>

Если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ где $\varphi(t), \psi(t)$дифференцируемые функции и $\varphi(t) \neq 0$ то производная этой функции есть (3) .

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$$

Доказательство

В цепочке равенств $y=\psi(t), t=\theta(x)$,где $t=\theta(x)$ обратная функция по отношению к функции $x=\varphi(t)$, будем рассматривать t как промежуточный аргумент. Тогда, согласно правила дифференцирования сложной функции будем иметь

$y'_x = y'_t \cdot t'_x$ (4).

Применяя правило дифференцирования обратной функции получим $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$ (5)

Из (4) и (5) получаем $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$

В обозначениях Лейбница $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} : \dfrac{dx}{dt}$

Пример $x=t^2; y=t^3 \Rightarrow x'_t = 2t; y'_t = 3t^2; \Rightarrow y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3t^2}{2t} = \dfrac{3}{2}t$

Производные высших порядков

Производная *f'(x)* функции *f(x)* называется производной первого порядка и представляет собой некоторую новую функцию. Вполне допустимо, что эта функция сама имеет производную. Тогда производная от производной первого порядка называется производной второго порядка или второй производной.

Обозначение

f''(x)=[f'(x)]'

Производная от производной второго порядка, если она существует называется производной третьего порядка или третьей производной

Обозначение

f'''(x)=[f''(x)]' и так далее.

$f^{(n)}(x)$ - производная n – го порядка.

Пример

$$y = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 4x^3 - 6x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 12x^2 - 12x - 6 \Rightarrow y''' = 24x - 12 \Rightarrow y^{iv} = 24$$

Производные высших порядков от функции, заданной параметрическими уравнениями

Пусть функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ (1),где $\varphi(t),\psi(t)$ - дифференцируемые функции и $\varphi(t) \neq 0$, $t_0 \le t \le T$

Причем на отрезке $[t_0, T]$ функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \theta(x)$

Для первой производной имеет место формула $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ (2).

Для нахождения второй производной $y''_{xx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ дифференцируем по *x* равенство (2) имя в виду, что *t* есть функция от *x*.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

Или $y''_{xx} = \dfrac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$ (3)

Аналогичным образом можно найти производные $\dfrac{d^3y}{dx^3}, \dfrac{d^4y}{dx^4}, \ldots$

Пример

$x = a\cos t; y = b\sin t; \Rightarrow y'_x, y''_{xx} = ?$

Решение

$x'_t = -a\sin t; y'_t = b\cos t; x''_{tt} = -a\cos t; y''_{tt} = -b\sin t; \Rightarrow$

$y'_x = -\dfrac{b}{a}ctgt; y''_{xx} = \dfrac{-a\sin t \cdot (-b\sin t) - b\cos t \cdot (-a\cos t)}{(-a\sin t)^3} = -\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$

Формула Лейбница

На производные высших порядков распространяются общие правила дифференцирования. Если *u=u(x), v=v(x)* – дифференцируемые функции, то

$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, (cu)^{(n)} = cu^{(n)}$

Выведем формулу Лейбница, дающую возможность вычислить производную n – го порядка от произведения двух функций, то есть $(uv)^{(n)}$

y=uv

$y' = u'v + uv'$

$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$

$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$

$y'''' = u''''v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv''''$

…

Закон составления производных сохраняется для производных любого порядка и заключается в следующем:

Надо выражение $(u+v)^n$ разложить по формуле бинома Ньютона и в полученном выражении, заменить показатели степеней для u и v указателями порядка производных, причем нулевые степени (u^0, v^0) входящие в крайние элементы разложения, надо заменить самими функциями (то есть производными нулевого порядка).

Получаем

$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + ... nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}$ - формула Лейбница

Строгое доказательство этой формулы можно было бы провести методом математической индукции.

Пример

$$y = e^{ax}x^2 \Rightarrow y^{(n)} = ?$$

Решение

$$u = e^{ax}, v = x^2$$
$$u' = ae^{ax}, v' = 2x$$
$$u'' = a^2 e^{ax}, v'' = 2$$
$$\cdots$$

$u^{(n)} = a^n e^{ax}, v''' = v'''' = ... v^{(n)} = 0$ тогда

$$y^{(n)} = a^n e^{ax} x^2 + na^{n-1}e^{ax} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}e^{ax} \cdot 2 = e^{ax}a^{n-2}(a^2x^2 + 2nax + n(n-1))$$

Производные высших порядков для функции заданной неявно

Рассмотрим на примере вычисление производной второго порядка для функции заданной неявно.

Пример

$$x^2 + 2xy^2 = \ln\frac{y}{x} \Rightarrow y'' = ?$$

Решение

$$x^2 + 2xy^2 = \ln y - \ln x \Rightarrow 2x + 2y^2 + 4x \cdot y \cdot y' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x} \Rightarrow y'(4x \cdot y - \frac{1}{y}) = -\frac{1}{x} - 2x - 2y^2 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{(2x^2 + 2xy^2 + 1)y}{x(1 - 4xy^2)} \Rightarrow y'' = \left(\frac{(2x^2 + 2xy^2 + 1)y}{x(1 - 4xy^2}\right)'$$

Далее в выражении для второй производной используем найденное выражение производной первого порядка.

Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема о корнях производной (теорема Ролля)

Если функция $y=f(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка $f(a)=f(b)=0$, то существует внутри отрезка $[a,b]$ по крайней мере одна точка $x=c$, $a<c<b$, в которой производная $f'(x)$ обращается в 0.

Доказательство

Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она имеет на этом отрезке наибольшее (M) и наименьшее (m) значения.

Если $M=m$, то $f(x)$ постоянна, то есть при всех значениях x - $f(x)=0$ и для

$\forall x \in [a,b] \Rightarrow f'(x) = 0$ Теорема доказана.

Если $M \neq m$,то пологая *M>0* и *f(x)* принимает наибольшее значение при *x=c,* то есть *f(c)=M*, при этом $c \neq a, c \neq b$ так как по условию *f(a)=f(b)=0*

Учитывая, что f(c) - наибольшее значение функции, то $f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$ при $\Delta x > 0, \Delta x < 0$

Отсюда следует

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{при} \quad \Delta x > 0 \qquad (1')$$

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{при} \quad \Delta x < 0 \qquad (1'')$$

Так как по условию теоремы *f'(x)* существует при *x=c*, то переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leq 0, \to \Delta x > 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geq 0, \to \Delta x < 0$$

Но соотношения $f'(c) \leq 0, f'(c) \geq 0$ совместимы лишь в том случае, когда *f'(c)=0*. Следовательно, внутри отрезка *[a,b]* имеется точка *c*, в которой *f'(c)=0.*

<u>Геометрическая интерпретация</u>

Если непрерывная кривая, имеющая в каждой точке касательную, пересекается с осью *OX* в точках *x=a,x=b*, то на этой кривой найдется, по крайней мере одна точка с абсциссой *x=c, a<c<b*, в которой касательная параллельна оси *OX*.

2.Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа)

Если *y=f(x)* непрерывна и дифференцируема на отрезке *[a,b],* то внутри отрезка *[a,b]* найдется, по крайней мере, одна точка *c, a<c<b*, что

f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) (1)

Доказательство

Обозначим $Q=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (2)

Рассмотрим вспомогательную функцию *F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)Q* (3)

Геометрический смысл *F(x)* следующий:

Напишем уравнение хорды *AB*. Учитывая, что ее угловой коэффициент равен $Q=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ и, что она проходит через точку *(a,f(a))*.

y-f(a)=Q(x-a) $\Rightarrow y=f(a)+Q(x-a)$,но *F(x)=f(x)-[f(a)+Q(x-a)]*

следовательно, *F(x)* для каждого значения *x* равняется разности ординат кривой *f(x)* и хорды *y=f(a)+Q(x-a)* для точек с одинаковой абсциссой.

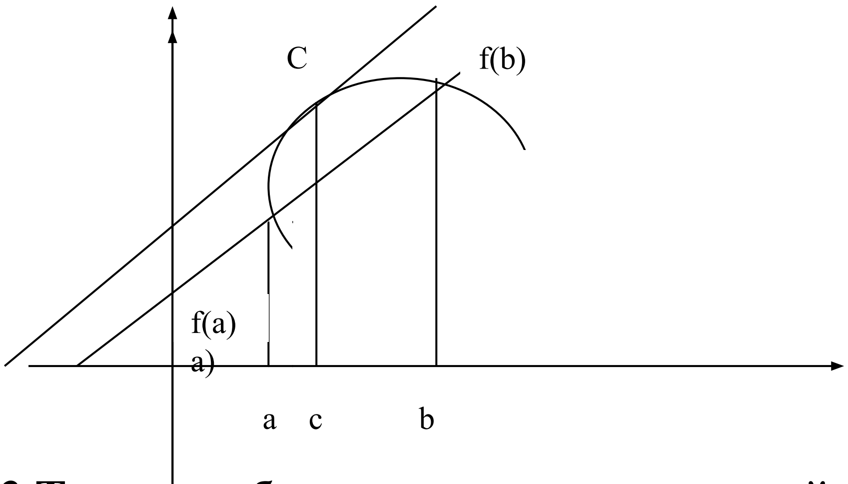
Так как *F(x)* непрерывна и дифференцируема на *[a,b]* и *F(a)=F(b)=0*, то к ней можно применить теорему Ролля, согласно которой существует точка $c\in[a,b]$ что

F'(c)=0. Но *F'(x)=f'(x)-Q* $\Rightarrow$ *F'(c)=f'(c)-Q=0* $\Rightarrow Q=f'(c)$ Подставляя это в равенство (2) получаем

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$ Теорема доказана.

<u>Геометрическая интерпретация</u>

Если во всех точках дуги *AB* существует касательная, то существует точка *c*, в которой касательная параллельна хорде *AB*.



3.Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)

Если $f(x),\varphi(x)$ непрерывные и дифференцируемые функции на отрезке [a,b], причем $\varphi'(x)\neq 0$ при $x\in[a,b]$ то найдется такая точка $x=c$, $a<c<b$, что $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ (1).

<u>Доказательство</u>

Обозначим $Q=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ (2).

Отметим, что $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$ так как в противном случае по теореме Ролля обращалась бы в 0 внутри отрезка *[a,b],* что противоречит условию теоремы.

Составим вспомогательную функцию *F(x)=f(x)-f(a)-Q* (3). Так как *F(x*) непрерывна и дифференцируема на *[a,b]* и *F(a)=F(b)=0*, то к ней можно применить теорему Ролля, согласно которой существует точка $c\in[a,b]$что что *F'(c)=0*.

Но *F'(x)=f'(x)-Q* $\Rightarrow$ *F'(c)=f'(c)-Q=0*$\Rightarrow Q=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}\Rightarrow\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ Теорема доказана.

Понятие о правиле Лопиталя

Рассмотрим отношение $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ где функции $\varphi(x),\psi(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности U_a точки *a*. Может случиться, что при

$x\to a,\varphi(x),\psi(x)$ стремятся к 0 или к ∞ то есть обе функции одновременно являются бесконечно малыми или бесконечно большими. Тогда в точке *a* функция *f(x)* имеет неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ (1)

В этом случае, используя производные $\varphi'(x),\psi'(x)$ можно сформулировать простое правило для нахождения предела функции *f(x)* при $x\to a$, то есть дать способ раскрытия неопределенностей вида (1). **Это правило Лопиталя.**

Теорема

Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует.

Доказательство

Доказательство проведем для случая неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и для простоты будем предполагать, что $\varphi(x), \psi(x), \varphi'(x), \psi'(x)$ - непрерывны в точке a и $\psi'(a) \neq 0$

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \varphi(a) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x\to a} \psi(x) = \psi(a) = 0 \quad (2')$$

Разность $\varphi(x) - \varphi(a)$ можно рассматривать как приращение $\varphi(x)$ в точке a, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - a$

Поэтому $\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(a)$ (3) $\lim_{x\to a} \frac{\psi(x) - \psi(a)}{x - a} = \psi'(a)$ (3')

Учитывая (2), (2') при $x \neq a$ получим

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}{\frac{\psi(x) - \psi(a)}{x - a}}$$

Отсюда переходя к пределу при $x \to a$ и используя (3) и (3’) получим

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \quad (4)$$

Но по предположению $\varphi(x), \psi(x), \varphi'(x), \psi'(x)$ непрерывны при $x \to a$, причем $\psi'(a) \neq 0$, поэтому

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\lim_{x\to a} \varphi'(x)}{\lim_{x\to a} \psi'(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \quad (5)$$

Сопоставляя формулы (4) и (5) получим правило Лопиталя

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

Указанные виды неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ не являются единственными. Возможны неопределенности $0 \cdot \infty$ то есть $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ причём $\varphi(x) \to 0, \psi(x) \to \infty, x \to a$

Или неопределенность $\infty - \infty$ то есть $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ причем $\varphi(x) \to \infty, \psi(x) \to \infty, x \to a$

Возможны и другие неопределенности. Для раскрытия этих неопределенностей их стараются с помощью тождественных преобразований свести к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и затем применить правило Лопиталя.

Примеры

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\sin x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2^x\ln 2}{\cos x}=\dfrac{\ln 2}{1}=\ln 2$

2. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$

3. $\lim_{x\to +0} x\cdot\ln x=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=-\lim_{x\to +0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to +0} x=0$

4. $\lim_{x\to 0}(ctgx-\dfrac{1}{x})=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}=-\dfrac{0}{1+1}=0$

Для функции $f(x)=\varphi(x)^{\psi(x)}$ в случаях при $x\to a$

$\varphi(x)\to 0,\psi(x)\to 0$

$\varphi(x)\to\infty,\psi(x)\to 0$

$\varphi(x)\to 1,\psi(x)\to\infty$

Получаем неопределенности вида $0^0,\infty^0,1^\infty$

Для нахождения предела удобно логарифмировать функцию *f(x)*.

Пример

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}=\{1^{\infty}\}$ Логарифмируя выражение и используя непрерывность логарифмической функции находим

$$\ln A=\ln\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\ln(\sin x)^{tgx}]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx\cdot\ln(\sin x))=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{ctgx}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\sin x\cos x)=0\Rightarrow\ln A=0\Rightarrow A=1$$