Тема 4.2 Метод дихотомии. Метод золотого сечения

Метод дихотомии

1. Проверяем условие $|b-a| < 2e$, где e — заданная погрешность вычисления x_m. Если это условие выполняется, идем к п. 6, если не выполняется, идем к п. 2.
2. Делим интервал поиска $[a,b]$ пополам и вычисляем две абсциссы, симметрично расположенные относительно точки $x=(a+b)/2$:

$$x_1 = (a+b-e)/2 \text{ и } x_2 = (a+b+e)/2.$$

3. Для этих значений x вычисляем $f(x_1)$ и $f(x_2)$.
4. Проверяем условие $f(x_1)>f(x_2)$. Если оно выполняется, полагаем $b=x_2$ и идем к п. 1. Если не выполняется, идем к п. 5.
5. Полагаем $a=x_1$ и идем к п. 1.
6. Получаем $x_m=(a+b)/2$ и вычисляем $f(x_m)$.

Пример

- Найти максимум функции

$$f(x)=0,1x^3 — 2x^2 + 10x.$$

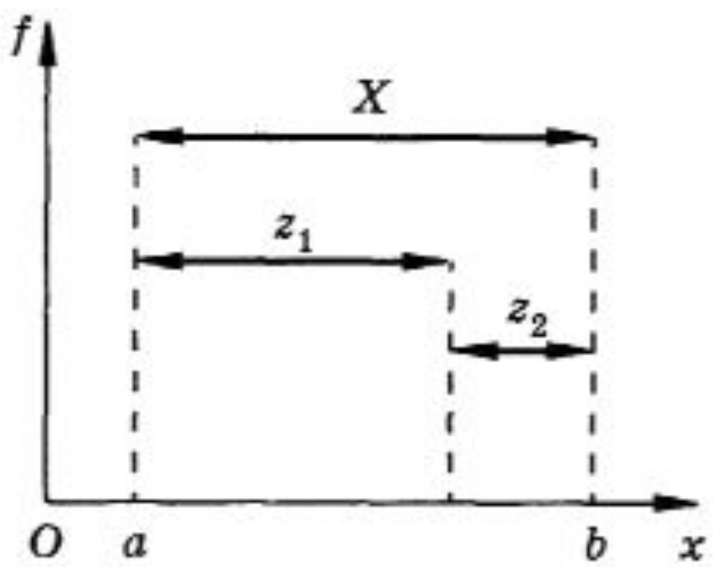
$$h = 1,\ e = 0,001 \text{ и } x_0= 2,$$

Метод золотого сечения

- В методе золотого сечения целевая функция вычисляется в точках интервала неопределенности, расположенных таким образом, чтобы одно из значений целевой функции давало новую полезную информацию на следующем шаге.

Метод золотого сечения

- Сущность метода состоит в том, что интервал неопределенности делится на две неравные части z_1 и z_2 так, что отношение длины большего отрезка z_1 к длине всего интервала неопределенности равно отношению длины меньшего отрезка z_2 к длине большего.



Подобное деление осуществлял еще Евклид. Таким образом,

$$z_1+z_2=x$$
$$z_1/x=z_2/z_1.$$

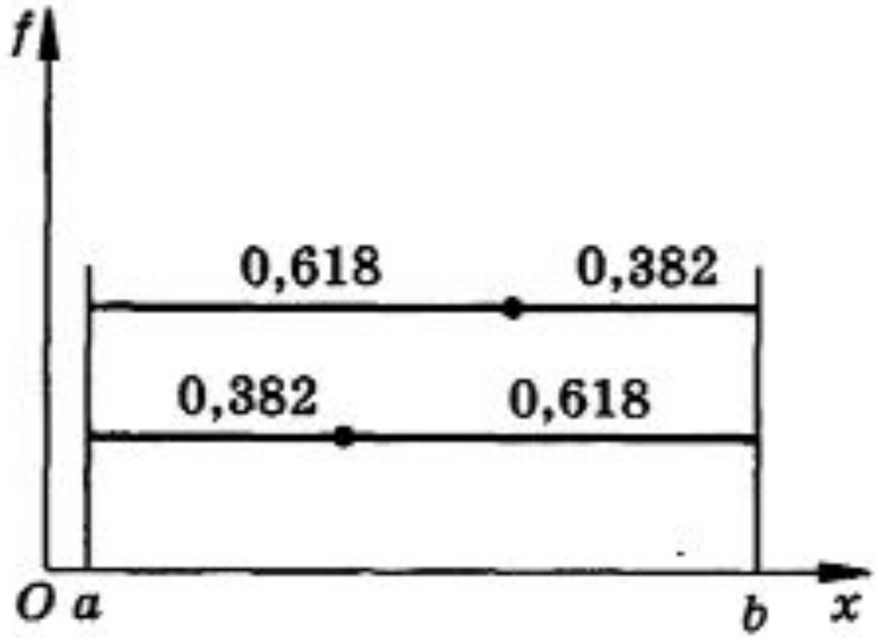
Метод золотого сечения

- Исключая из этих уравнений *x*, получаем квадратное уравнение относительно z_2/z_1:

$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 + \frac{z_2}{z_1} - 1 = 0.$$

- Решая это уравнение, получаем $z_2/z_1=0{,}618$.

Метод золотого сечения



- Деление интервала неопределенности в отношении z_2/z_1=0,618

Метод золотого сечения

- Первые две точки располагаются симметрично на расстоянии 0,618 от концов интервала. В дальнейшем сохраняется один из этих интервалов, в котором располагается одна из точек, и симметрично ей располагается следующая.
- Таким образом, одно из значений целевой функции, которое требуется вычислить на следующем шаге, уже известно из предыдущего.

Метод золотого сечения

1. Задаются начальные границы отрезка a, b и точность e, Рассчитывают начальные точки деления: $x_1 = b - \frac{(b-a)}{\phi}, \quad x_2 = a + \frac{(b-a)}{\phi}$

и значения в них целевой функции: $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$

2. Если $y_1 <= y_2$, то

$$b = x_2,\ x_2 = x_1,\ x_1 = b - \frac{(b-a)}{\phi},\ y_2 = y_1,\ y_1 = f(x_1)$$

Иначе $a = x_1,\ x_1 = x_2,\ x_2 = a + \frac{(b-a)}{\phi},\ y_1 = y_2,\ y_2 = f(x_2)$

3. Если $|b-a| < e$, то $x = \arg\min(y_1, y_2)$ и останов.

Иначе возврат к шагу 2.

Пример

- Найти максимум функции

$$f(x)=0{,}1x^3 — 2x^2 + 10x.$$

$$h = 1,\ e = 0{,}001 \text{ и } x_0 = 2,$$

- Методом золотого сечения найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке [a;b] с точностью ε и значение целевой функции в этой точке:
- $f(x)=x^4+2x^2+4x+1=0$, $[-1;0]$, $\varepsilon=0.1$

Домашнее задание

- Найти максимум функции

$$f(x)=2x^4 — x + 5.$$

h = 0,2, e = 0,001 и x_0= 1, a=1, b=2

всеми известными способами

Вопросы для самоконтроля

- На чем основан метод равномерного поиска?
- Каким алгоритмом реализуется метод поразрядного приближения?
- Каким алгоритмом реализуется метод дихотомии?
- В чем состоит сущность метода золотого сечения?