ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

При изучении вращения твердого тела пользуются понятием момента инерции. Физически момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Скалярная величина $\boxed{J = mr^2}$ называется *моментом инерции материальной точки m относительно оси вращения z* (r – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения). Единицей измерения момента инерции в системе СИ является *килограмм - метр в квадрате* (кг·м^2).

Моментом инерции J системы (тела) относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс m_i материальных точек системы на квадраты их расстояний r_i^2 до рассматриваемой оси:

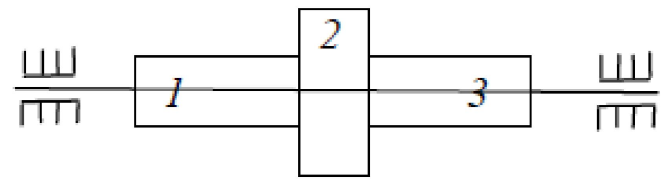
$$\boxed{J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .}$$

В случае непрерывного распределения масс сумма сводится к интегралу:

$$\boxed{J = \int\limits_m r^2 dm,}$$

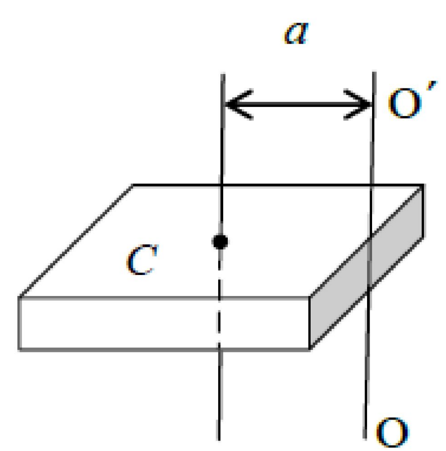
где интегрирование производится по всей массе тела (по всему объему).

Момент инерции сложного тела J_T равен сумме моментов инерции его составных частей



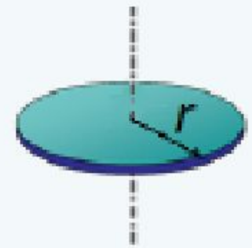
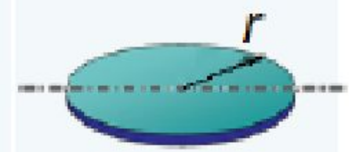
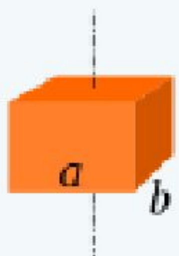
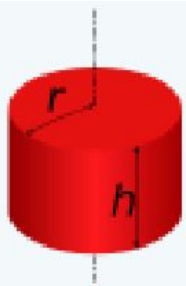
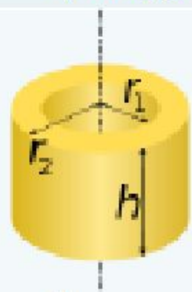
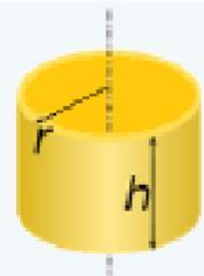
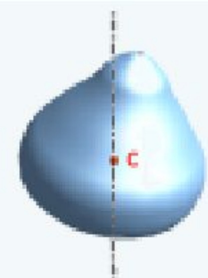
$$J_T = J_1 + J_2 + J_3.$$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно другой параллельной оси определяется *теоремой Штейнера*: *момент инерции тела J относительно оси вращения OO´ равен моменту его инерции JC относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы m на квадрат расстояния a между осями*



$$\boxed{J = J_C + ma^2.}$$

Моменты инерции некоторых тел

Шар	Тонкостенная сфера	Однородный стержень	Диск	Диск
				
$I = \frac{2}{5} mr^2$	$I = \frac{2}{3} mr^2$	$I = \frac{1}{12} ml^2$	$I = \frac{1}{2} mr^2$	$I = \frac{1}{4} mr^2$
Однородная пластинка	**Сплошной цилиндр**	**Толстостенный цилиндр**	**Тонкостенный цилиндр**	**Произвольное тело**
				
$I = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$	$I = \frac{1}{2} mr^2$	$I = \frac{1}{2} m(r_1^2 + r_2^2)$	$I = mr^2$	$I = \sum m_i r_i^2$

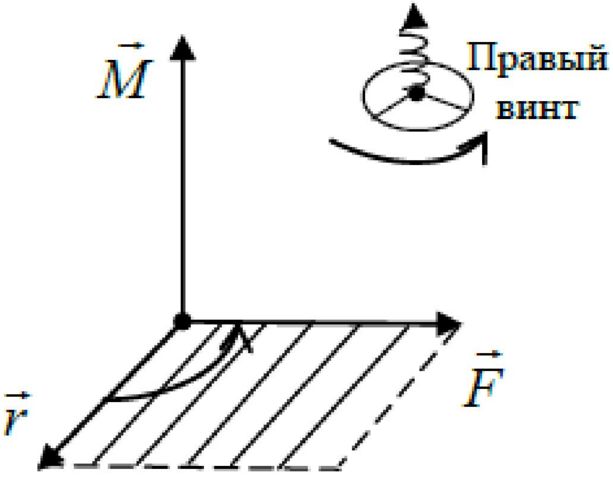
Момент силы

Введем понятие *момента силы*. Моментом силы $\vec{F}$ относительно неподвижной точки O называется физическая величина $\vec{M}$, определяемая векторным произведением вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$:

$$\boxed{\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}].}$$

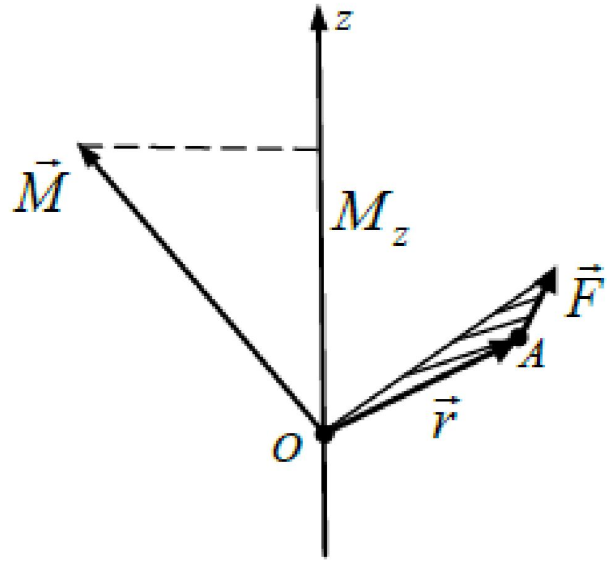
Вектор $\vec{M}$ лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ Модуль момента силы равен

$$\boxed{M = rF\sin\alpha,}$$



Произведение $r\sin\alpha = d$ называется *плечом силы* $\vec{F}$ относительно точки O, т.е. плечо силы – это кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы.

модуль момента силы $\boxed{M = Fd.}$



Единицей момента силы в системе СИ является *ньютон - метр* (Н·м).

Моментом силы $\vec{F}$ относительно неподвижной оси z называется скалярная величина M_z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы, определенного относительно произвольной точки O данной оси. Значение момента M_z не зависит от выбора положения точки O на оси z

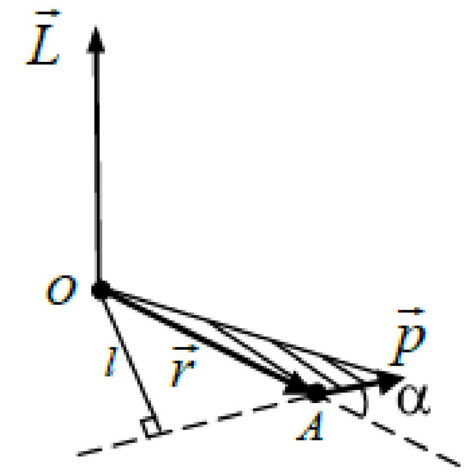
Момент импульса

Моментом импульса (количества движения) $\vec{L}$ материальной точки A относительно неподвижной точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{V}],}$$

где $\vec{r}$ − вектор, проведенный из точки O в точку A;

$\vec{p} = m\vec{V}$ − импульс материальной точки



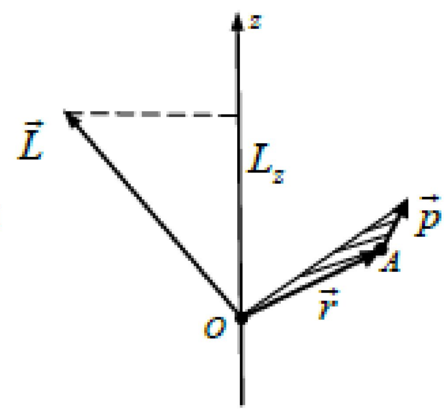
Направление вектора $\vec{L}$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$. Модуль момента импульса равен

$$\boxed{L = rp\sin\alpha = rmV\sin\alpha = pl,}$$

Моментом импульса относительно неподвижной оси z называется скалярная величина L_z, равная проекции на эту ось вектора момента импульса $\vec{L}$, определенного относительно произвольной точки O данной оси . Значение момента импульса L_z не зависит от выбора положения точки O на оси z.

момент импульса отдельной частицы $L_{iz} = m_i V_i r_i$.

Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:



$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i r_i .$$

Учитывая, что $V_i = \omega r_i$, где ω – угловая скорость вращения, получим

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_z \omega ,$$

Для однородного тела, симметричного относительно оси вращения, момент импульса относительно любой точки этой оси определяется по формуле:

$$\boxed{\vec{L} = J\vec{\omega} .}$$

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Наиболее общая форма записи основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела имеет вид

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\,,}$$

где $\vec{L}$ – момент импульса тела относительно неподвижной точки О; $\vec{M}$ – суммарный момент всех сил, действующих на тело, определенный относительно той же точки О.

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси z, то основное уравнение динамики вращательного движения можно записать как

$$\boxed{J\varepsilon_z = M_z\,,}$$

где J – момент инерции тела относительно оси z; ε_z – проекция углового ускорения на ось z; M_z – суммарный момент всех сил, действующих на тело, относительно оси z.

Закон сохранения момента импульса.

Кинетическая энергия вращения

Согласно уравнению момент импульса системы материальных точек (тела) может изменяться под действием момента внешних сил. Отсюда следует важный вывод – закон сохранения момента импульса: *момент импульса замкнутой системы частиц относительно неподвижной точки О остается постоянным во времени.*

Таким образом, если $\vec{M} = 0$, то

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \text{ и } \vec{L} = \text{const}.}$$

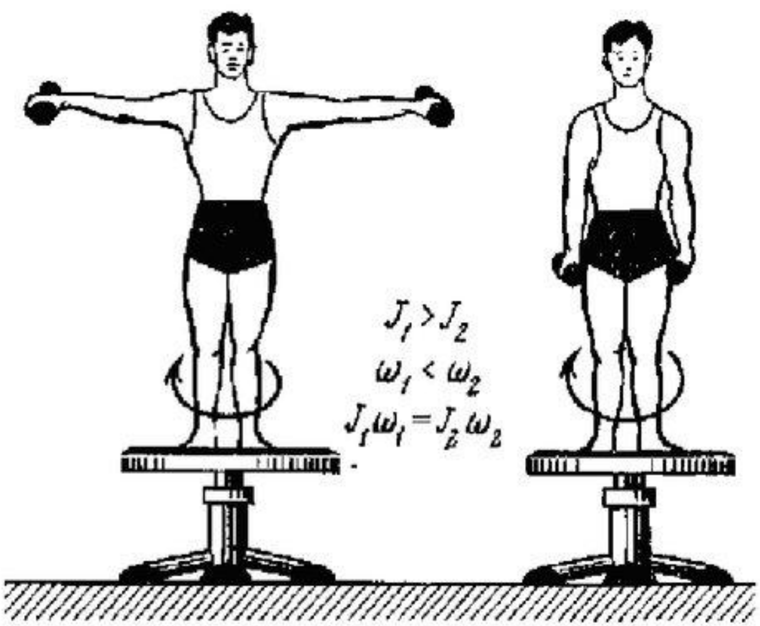
- **Экспериментальная проверка.** Опыты со скамьёй Жуковского

Кинетическая энергия вращательного движения определяется по формуле

$$\boxed{T_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2},}$$

где J – момент инерции твердого тела относительно оси вращения; ω – угловая скорость вращения.

Закон сохранения момента импульса.



- Момент импульса замкнутой системы с течением времени не изменяется.

$$I\,w = const.$$

- Выполнение данного закона наглядно демонстрируется на примере скамьи Жуковского.

Особенности применения

Закон сохранения момента импульса выполняется, если:

1. сумма моментов внешних сил равна нулю (силы при этом могут не уравновешиваться);
2. тело движется в центральном силовом поле (при отсутствии других внешних сил; относительно центра поля)

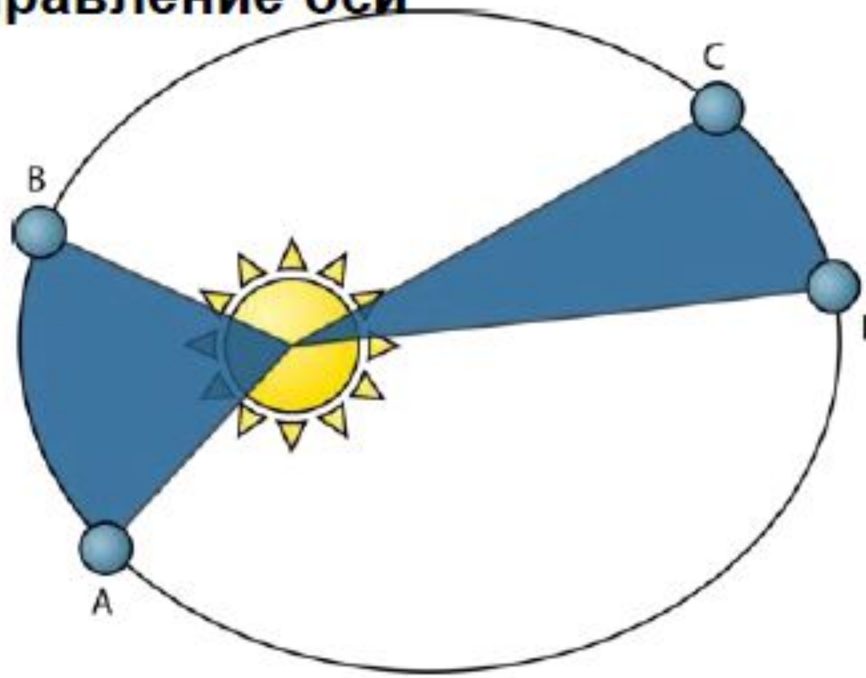
Закон сохранения момента импульса применяют:

1. когда характер изменения со временем сил взаимодействия между частями системы сложен или неизвестен;
2. относительно одной и той же оси для всех моментов импульса и сил;
3. как к полностью, так и частично изолированным системам.

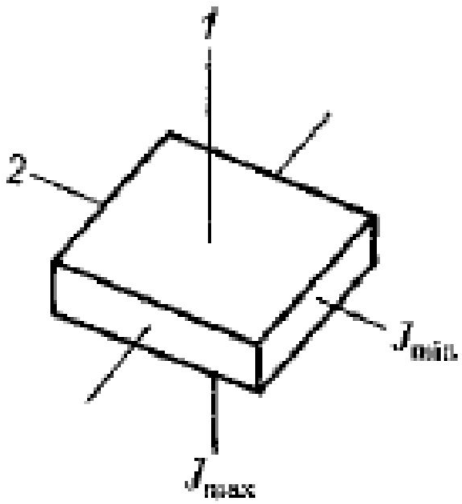
Примеры проявления закона сохранения момента импульса

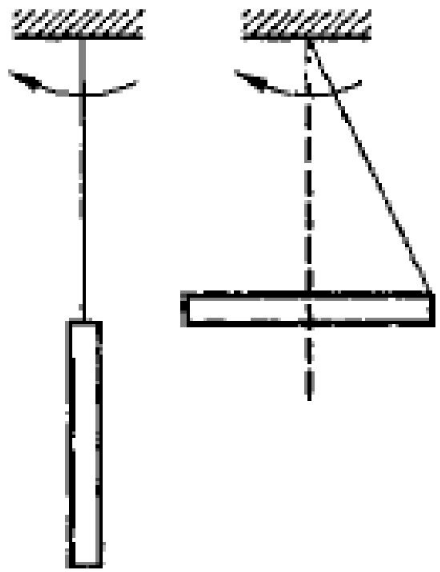
- Замечательной особенностью вращательного движения является **свойство вращающихся тел при отсутствии взаимодействий с другими телами сохранять неизменными не только момент импульса, но и направление оси вращения в пространстве**.

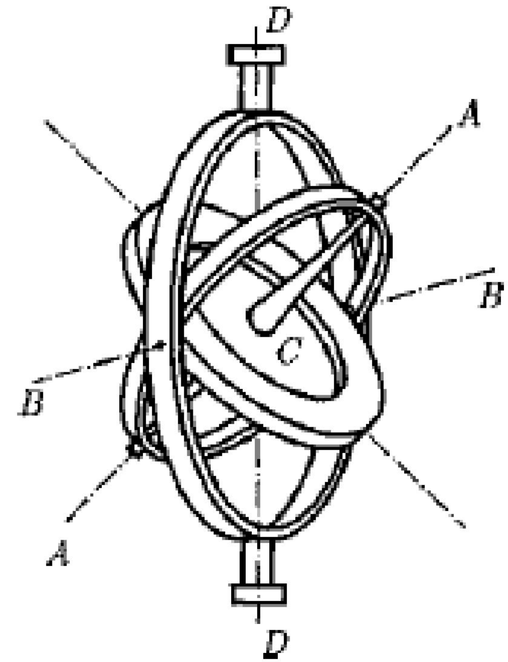
1. Суточное вращение Земли.
2. Гироскопы
3. Вертолёт
4. Цирковые аттракционы
5. Балет
6. Фигурное катание
7. Гимнастика (сальто)
8. Прыжки в воду
9. Игровые виды спорта



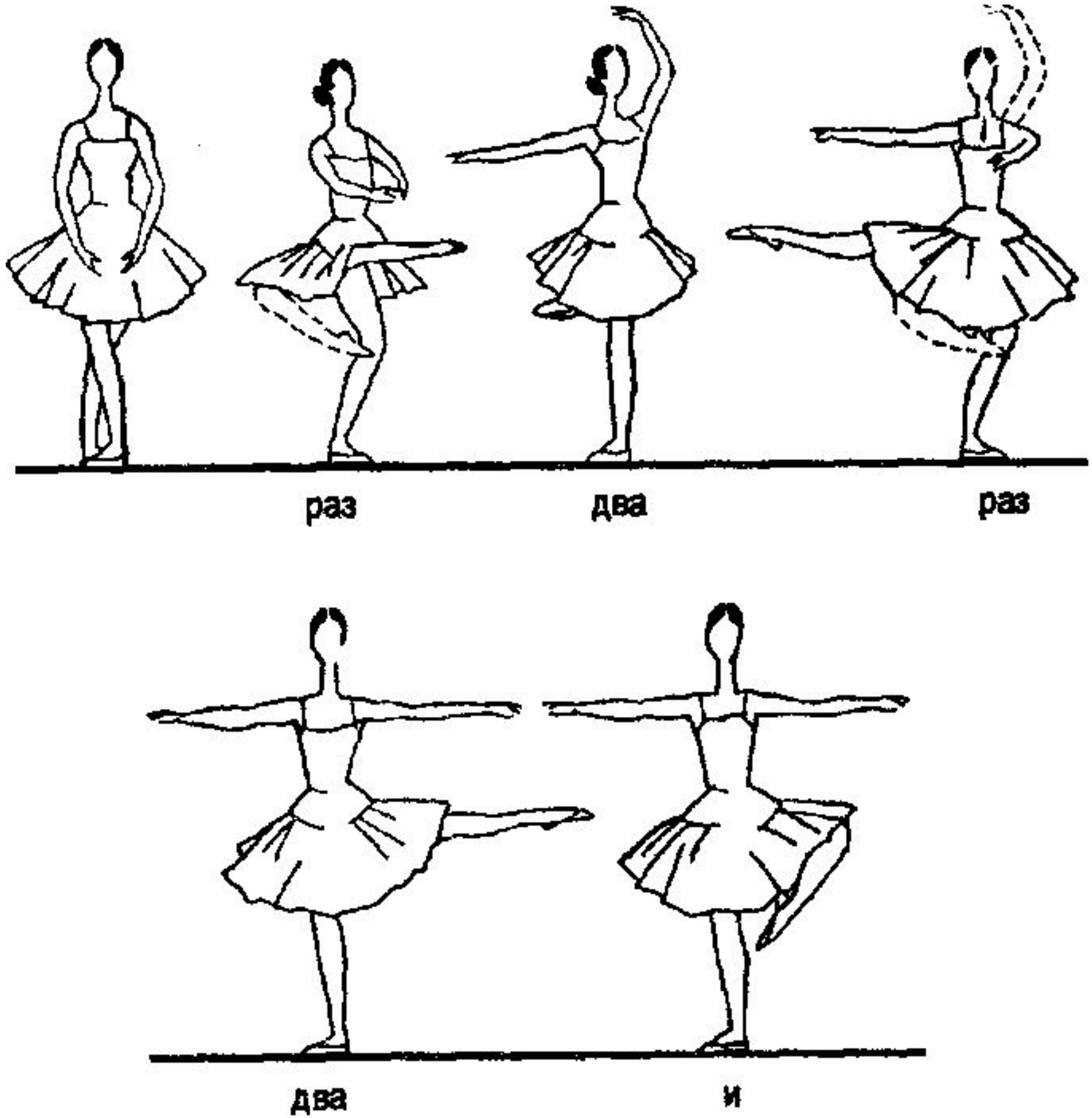
Свободные оси. Гироскоп







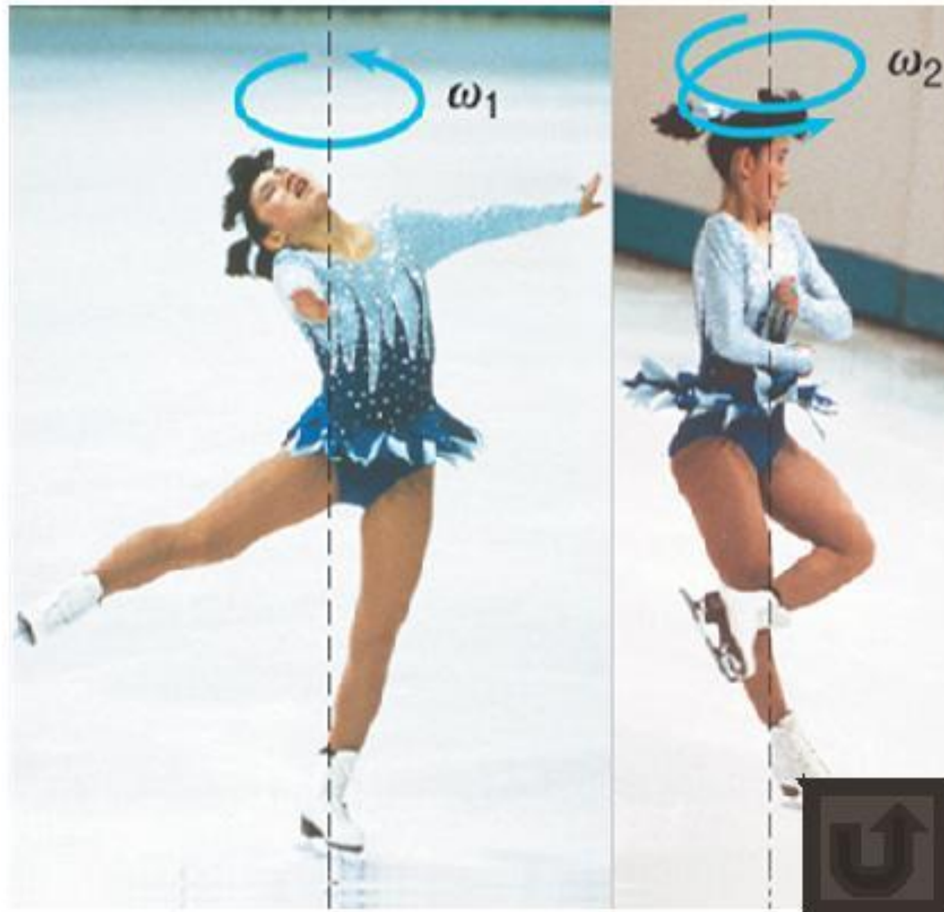
Фуэте – *вращение на месте на одной ноге.*



раз
два
раз
два
и

Фигурное катание

Фигурист, совершающий вращение вокруг вертикальной оси, в начале вращения приближает руки к корпусу, тем самым уменьшая момент инерции и увеличивая угловую скорость. В конце вращения происходит обратный процесс: при разведении рук увеличивается момент инерции и уменьшается угловая скорость, что позволяет легко остановить вращение и приступить к выполнению другого элемента.



Сопоставим основные величины и уравнения, определяющие вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Скорость	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	$\vec{F}$	Момент силы	M_z или $\vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$L_z = J_z\omega$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a}$; $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики	$M_z = J_z\varepsilon$; $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Работа	$dA = F_s ds$	Работа	$dA = M_z d\varphi$
Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия	$\frac{J_z\omega^2}{2}$