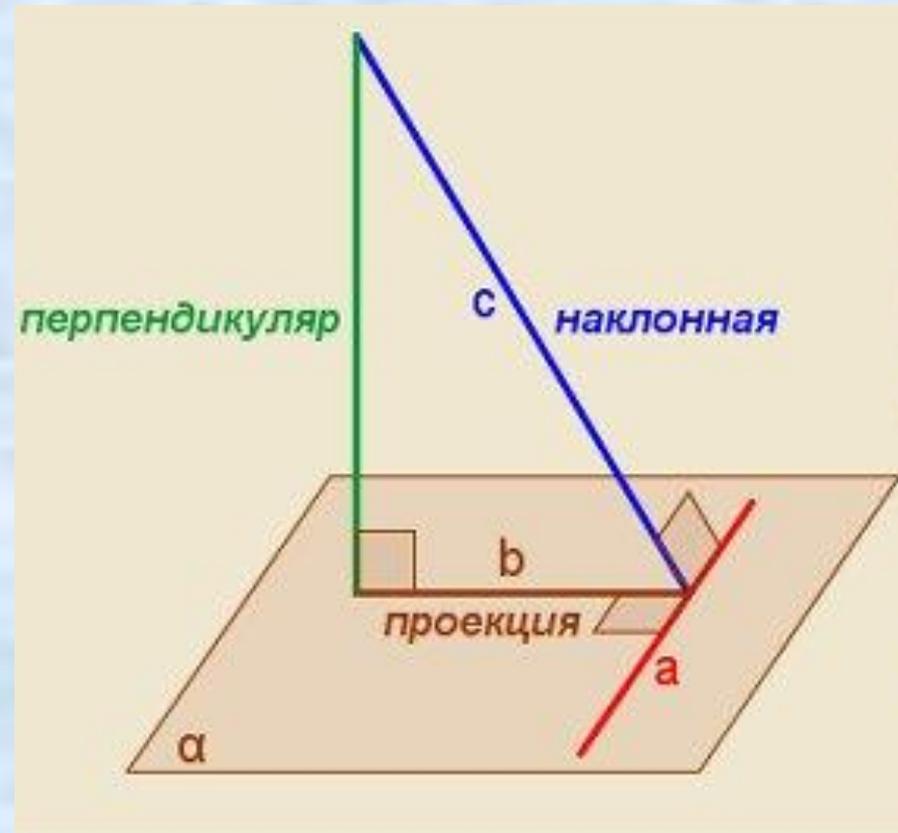


# Теорема о трёх перпендикулярах.

**Теорема 3.5** Если прямая, проведённая на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна самой наклонной.

## **Обратная теорема**

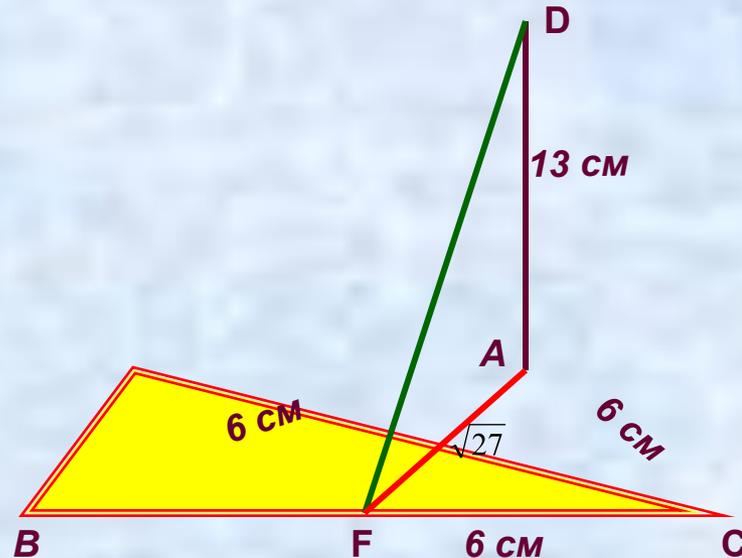
Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.



**Задача** Из вершины  
равностороннего треугольника  $ABC$   
восставлен перпендикуляр  $AD$  к  
плоскости треугольника. Найдите  
расстояние от точки  $D$  до стороны  
 $BC$ , если  $AD = 13$  см,  $BC = 6$  см.

**Дано:**  $\triangle ABC$  – равносторонний,  
 $AB=BC=AC=6$  см,  $AD \perp (ABC)$ ,  $AD=13$  см.

**Найдите:**  $\rho(D; BC)$ .



**Решение:** Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки до прямой. Поэтому, из точки  $D$  опустим перпендикуляр  $DF$  на прямую  $BC$ .

По теореме о трёх перпендикулярах  $AF \perp BC$ ,

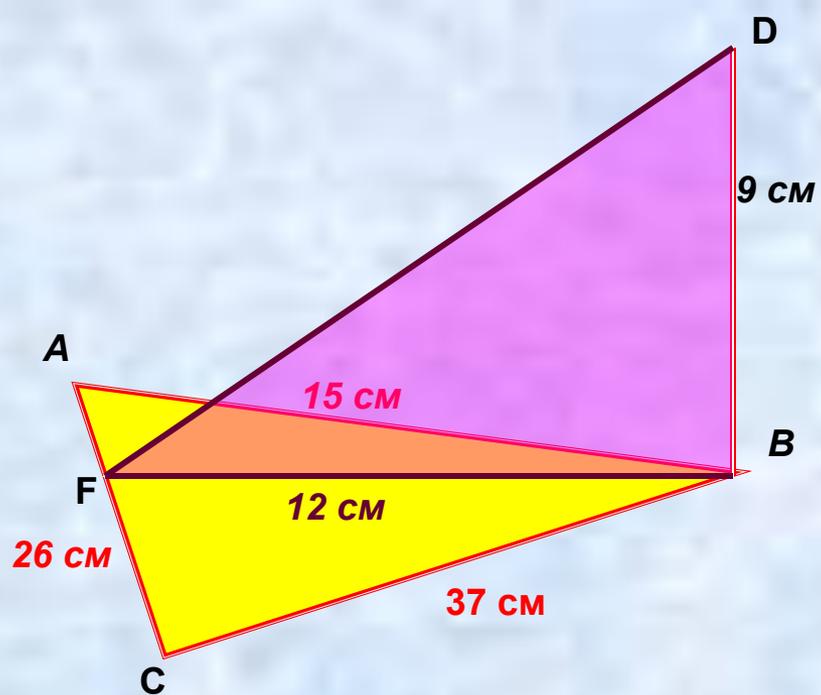
т.к. треугольник  $ABC$  – равносторонний, то  $AF$  – медиана, т.е.  $BF=FC=3$  см.

$\triangle AFC$  – прямоугольный. По теореме Пифагора  $AF^2 = AC^2 - CF^2 = 36 - 9 = 27$ ,  $AF = \sqrt{27}$  см.

$\triangle ADF$  – прямоугольный,  $DF^2 = AD^2 + AF^2 = 169 + 27 = 196$ , следовательно  $DF = 14$  см.

**Ответ:** 14 см.

**Задача .** Стороны треугольника 15 см, 26 см и 37 см. Через вершину среднего по величине угла проведён перпендикуляр в его плоскости, равный 9 см. Найдите расстояние от концов этого перпендикуляра до противоположной стороны.



**Решение:** Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки до прямой. Поэтому из точки B опустим перпендикуляр BF на прямую AC.

По теореме о трёх перпендикулярах  $DF \perp AC$ . BF найдём из треугольника ABC.

Найдём площадь треугольника ABC по формуле Герона.  $p = (a+b+c)/2 = (15+26+37)/2 = 39$ ,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{39 \cdot 24 \cdot 13 \cdot 2} = \sqrt{13 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 2} = 13 \cdot 3 \cdot 4 = 156 \text{ (см}^2\text{)}.$$

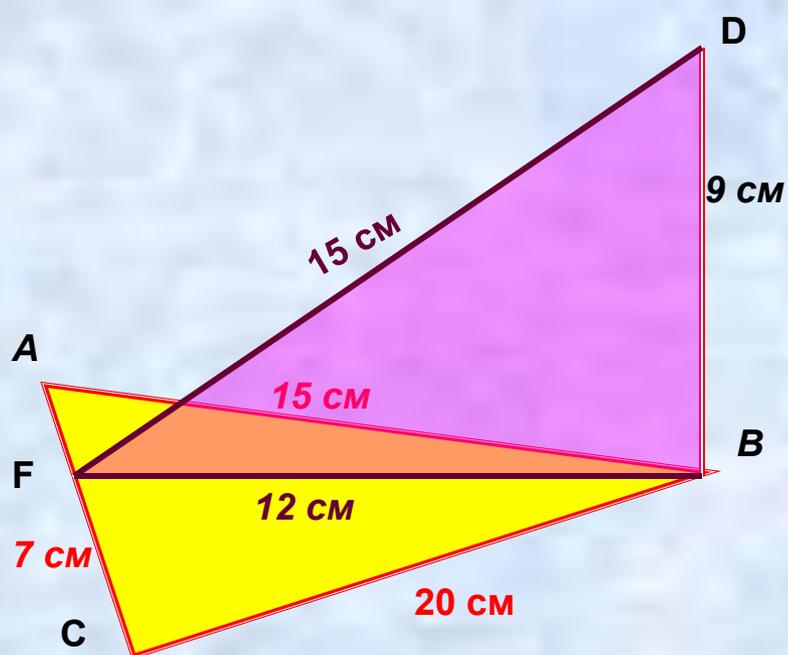
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BF, \quad BF = 2 \cdot S / AC = 2 \cdot 156 / 26 = 12 \text{ см.}$$

Треугольник DFB – прямоугольный. По теореме Пифагора  $DF^2 = DB^2 + BF^2$ ,

$$DF^2 = 81 + 144 = 225, \quad DF = 15 \text{ см.}$$

**Ответ:** 12 см и 15 см.

**Задача .** Из вершины треугольника ABC восстановлен перпендикуляр BD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны AC, если  $BD = 9$  см,  $AB = 15$  см,  $BC = 20$  см,  $AC = 7$  см.



**Решение:** Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки до прямой. Поэтому, из точки D опустим перпендикуляр DF на прямую AC.

По теореме о трёх перпендикулярах  $BF \perp AC$ . BF найдём из треугольника ABC. Вычислим площадь треугольника ABC по формуле Герона.

$$p = (a+b+c)/2 = (15+20+7)/2 = 21,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 14} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2} = 7 \cdot 6 = 42 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BF, \quad BF = 2 \cdot S / AC = 2 \cdot 42 / 7 = 12 \text{ см.}$$

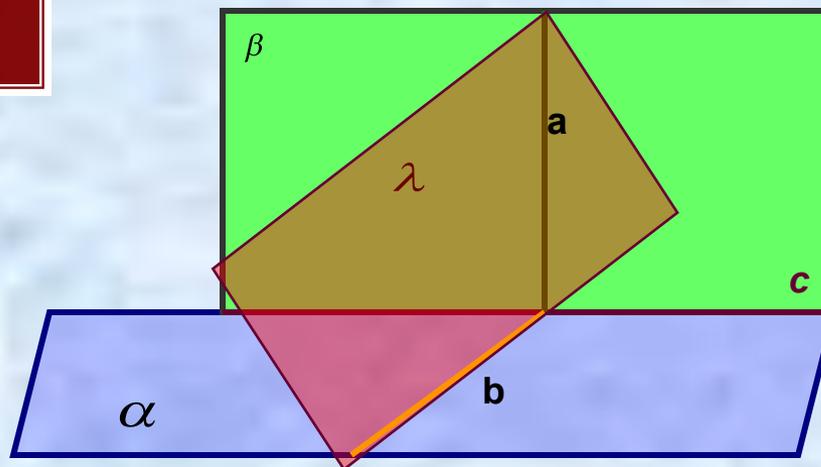
Треугольник DFB – прямоугольный. По теореме Пифагора  $DF^2 = DB^2 + BF^2$ ,

$$DF^2 = 81 + 144 = 225, \quad DF = 15 \text{ см.}$$

**Ответ:** 15 см.

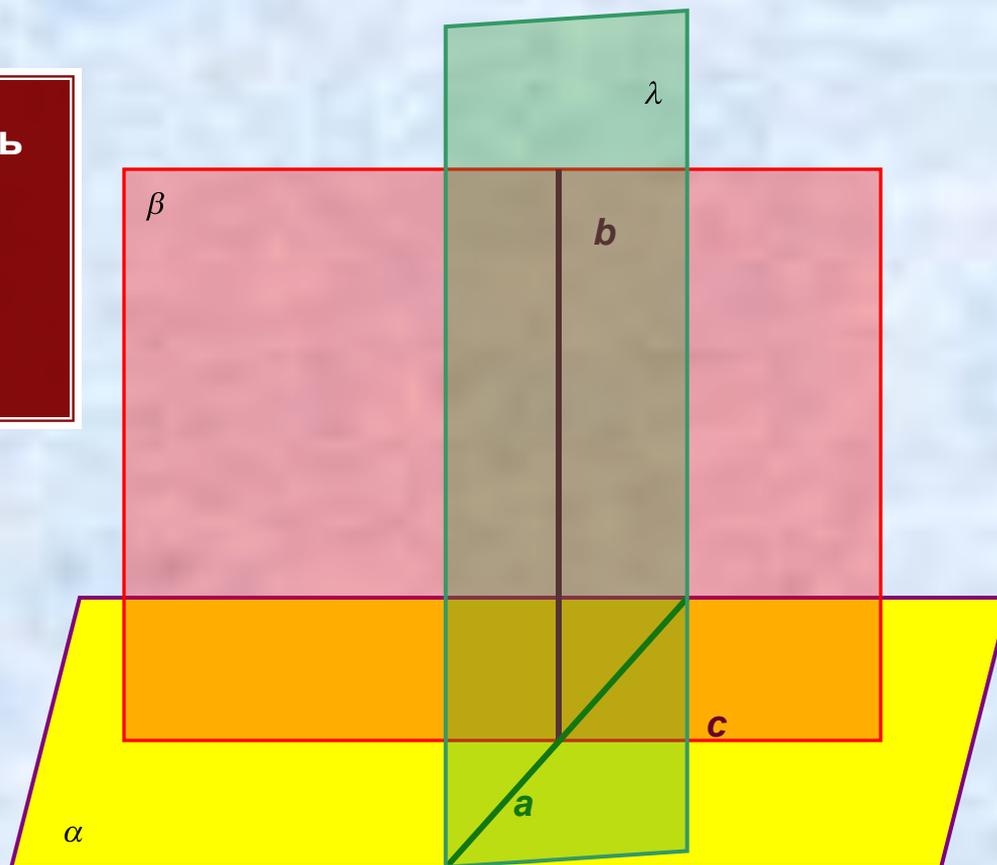
# Перпендикулярность плоскостей.

Определение. Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей пересекает их по перпендикулярным прямым.



## Признак перпендикулярности плоскостей.

**Теорема 3.6** Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



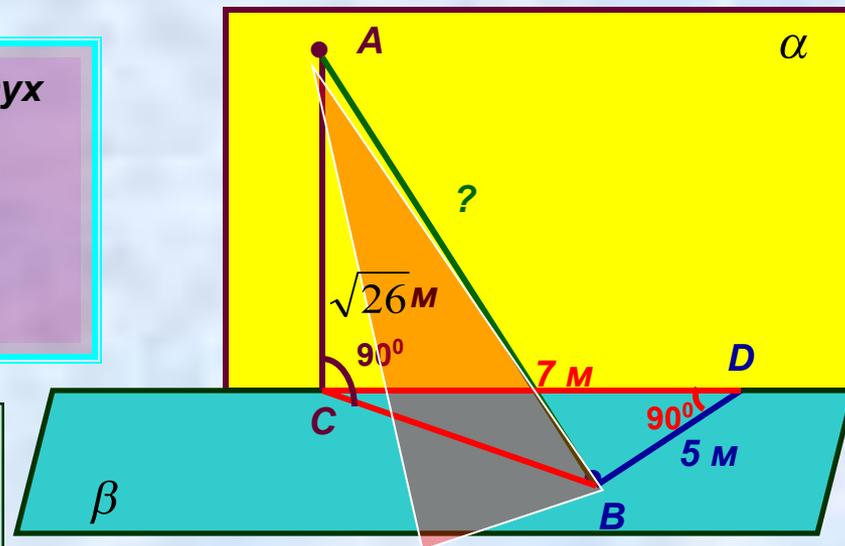


**Задача** Из точек  $A$  и  $B$ , лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры  $AC$  и  $BD$  на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка  $AB$ , если:  $AC = \sqrt{26}$  м,  $BD = 5$  м,  $CD = 7$  м.

**Дано:**  $\alpha \perp \beta$ ,  $A \in \alpha$ ,  $B \in \beta$ ,  $AC \perp CD$ ,  $BD \perp CD$

$AC = \sqrt{26}$  м,  $BD = 5$  м,  $CD = 7$  м.

**Найти:**  $AB$ .



**Решить  
самостоятельно**