ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

ИЛЬИНА ЕКАТЕРИНА 9 «А»

ЦЕЛЬ: ИЗУЧИТЬ ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, РЕШИТЬ НЕРАВЕНСТВА.

НЕРАВЕНСТВО ВИДА $\mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{B} > 0$

(ЗНАК НЕРАВЕНСТВА $>$ МОЖЕТ БЫТЬ

КВАДРАТНОЕ НЕРАВЕНСТВО С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ X ЭТО НЕРАВЕНСТВО ВИДА АХ $2 + \mathcal{B}$Х + С > 0, ГДЕ А, $\mathcal{B}$, С — ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА (КРОМЕ А $= 0$).

Значение переменной Х , которое обращает

неравенство $F(x) > 0$ в верное числовое

неравенство, называют решением неравенства (или частным

решением).Множество всех частных решений неравенства называют общим решением (или просто решением) неравенства.

ЗАМЕЧАНИЕ: ТЕРМИН «РЕШЕНИЕ» УПОТРЕБЛЯЮТ И В СМЫСЛЕ ОБЩЕГО, И В СМЫСЛЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА. ОБЫЧНО ПО СМЫСЛУ БЫВАЕТ ЯСНО, КАКОЕ ПОНИМАНИЕ ТЕРМИНА «РЕШЕНИЕ» ИМЕЕТСЯ В ВИДУ.

РАВНОСИЛЬНЫМИ- НАЗЫВАЮТ НЕРАВЕНСТВА КОТОРЫЕ ИМЕЮТ ОДИНАКОВЫЕ РЕШЕНИЯ (И ЕСЛИ ОБА НЕРАВЕНСТВА НЕ ИМЕЮТ РЕШЕНИЙ)

F$(X) < \mathcal{G}(X)$ И $\mathcal{R}(X) < \mathcal{S}(X)$

Равносильное преобразование неравенства – при решении неравенства стараются заменить данное неравенство более простым, но равносильным ему.

1 ПРАВИЛО: ЛЮБОЙ ЧЛЕН НЕРАВЕНСТВА МОЖНО ПЕРЕНЕСТИ ИЗ ОДНОЙ ЧАСТИ В ДРУГУЮ С ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ ЗНАКОМ, НЕ МЕНЯЯ ПРИ ЭТОМ ЗНАКА НЕРАВЕНСТВА.

Например, неравенство $3x + 5 < x^2$ равносильно неравенству $-x^2 + 3x + 5 < 0$: член x^2 перенесли из правой части неравенства в левую с противоположным знаком, а знак неравенства оставили неизменным.

2 ПРАВИЛО: ЕСЛИ ОБЕ ЧАСТИ НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННОЙ Х УМНОЖИТЬ ИЛИ РАЗДЕЛИТЬ НА ОДНО И ТО ЖЕ ВЫРАЖЕНИЕ Р(Х), ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ ПРИ ВСЕХ ЗНАЧЕНИЯХ Х, И СОХРАНИТЬ ЗНАК ИСХОДНОГО НЕРАВЕНСТВА, ТО ПОЛУЧИТСЯ НЕРАВЕНСТВО, РАВНОСИЛЬНОЕ ДАННОМУ.

Например, неравенство $8x - 4 > 12x^2$ равносильно неравенству $2x - 1 > 3x^2$: обе части первого неравенства разделили на положительное число 4, а знак неравенства оставили неизменным.

3 ПРАВИЛО: ЕСЛИ ОБЕ ЧАСТИ НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННОЙ X УМНОЖИТЬ ИЛИ РАЗДЕЛИТЬ НА ОДНО И ТО ЖЕ ВЫРАЖЕНИЕ $P(X)$, ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ПРИ ВСЕХ ЗНАЧЕНИЯХ X , И ИЗМЕНИТЬ ЗНАК ИСХОДНОГО НЕРАВЕНСТВА НА ПРОТИВОПОЛОЖНЫЙ, ТО ПОЛУЧИТСЯ НЕРАВЕНСТВО, РАВНОСИЛЬНОЕ ДАННОМУ.

Например, неравенство $-2x^2 - 3x + 1 \le 0$ равносильно неравенству $2x^2 + 3x - 1 \ge 0$ (обе части первого неравенства умножили на отрицательное число -1, изменив при этом знак неравенства на противоположный).

ПРИМЕР 1. РЕШИТЬ НЕРАВЕНСТВО.

$\frac{X}{3} + \frac{2X-1}{5} > 2X - \frac{1}{15}$

Умножим обе части неравенства на 15, знак неравенства не меняем. Это позволило нам освободится от знаменателей, т. е. сделать неравенство легче $15\left(\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5}\right) > 15\left(2x - \frac{1}{15}\right)$

$5x+3(2x-1) > 30x-1$

$11x-3 > 30x-1$

Перенесем член 30х из правой части неравенства в левую, а член -3 наоборот, при этом поменяем знаки.

$11x-30x > -1+3$

$-17x > 2$

Ответ: $x < -\frac{2}{17}$

ПРИМЕР 2. РЕШИТЬ НЕРАВЕНСТВО.

3x=9 < x^2

Преобразуем неравенство к виду 3x+9– 2x^2< 0.

Найдем корни квадратного трехчлена –2x^2 + 3x +9

для этого решим квадратное уравнение –2x^2+3x+9=0:

X1=3;   X2=–1,5

Парабола, служащая графиком функции Y=–2x^2+ 3x+9,

пересекает ось x в точках 3 и -1,5, ветви параболы

направлены вниз, поскольку старший коэффициент квадратного трехчлена -2x^2 + 3x + 9 равен -2.

Y<0 на тех промежутках оси x, где график расположен ниже оси x, т.е. на открытом луче (–∞; –1,5) или на открытом луче(3;+∞).

Ответ: X< –1,5; X > 3.

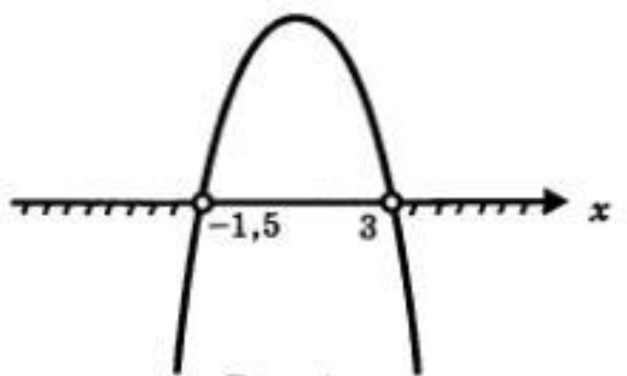

Рис. 1

Теорема: если квадратный трехчлен аx^2+вх + с имеет отрицательный дискриминант, то при любом х значение трехчлена имеет знак старшего коэффициента а.

ПРИМЕР 3. РЕШИТЬ НЕРАВЕНСТВО.

А)$2x^2 - X + 4 > 0$ Б)$-x^2+3X-8 \geq 0$.

А) НАЙДЕМ ДИСКРИМИНАНТ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА $2x^2 - X + 4$. ИМЕЕМ: D+$(-1)^2$–4•2•4= –31<0. СТАРШИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ТРЕХЧЛЕНА ПОЛОЖИТЕЛЕН . ЗНАЧИТ, ПО ТЕОРЕМЕ ПРИ ЛЮБОМ Х ВЫПОЛНЯТСЯ НЕРАВЕНСТВО $2x^2 - X + 4 > 0$ Т. Е. РЕШЕНИЕМ ЗАДАННОГО НЕРАВЕНСТВА СЛУЖИТ ВСЯ ЧИСЛОВАЯ ПРЯМАЯ $(-\infty; +\infty)$

Б) НАЙДЕМ ДИСКРИМИНАНТ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА $-x^2+3X-8$. ИМЕЕМ: D=3^2–4•(–1)•(–8)= –23<0. ЭТО ЗНАЧИТ, ЧТО ЗАДАННОЕ НЕРАВЕНСТВО $-x^2 + 3X - 8 \geq 0$ НЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ НИ ПРИ КАКОМ ЗНАЧЕНИИ Х, Т. Е. НЕ ИМЕЕТ РЕШЕНИЙ.

ОТВЕТ: А) $(-\infty; +\infty)$; Б) НЕТ РЕШЕНИЙ.

ПРИМЕР 4.РЕШИТЬ НЕРАВЕНСТВО.

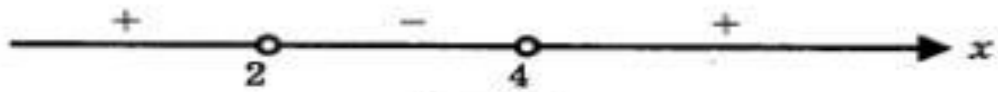

Рис. 2

x^2–6x+8>0.

Разложим квадратный трехчлен x2 - 6x + 8 на множители. Корнями трехчлена являются числа 2 и 4. Воспользовавшись формулой аx^2 + вх + с = а(х – х1)(х –х2), получим x^2 - 6х + 8 = (х - 2)(х - 4).

Отметим на числовой прямой корни трехчлена: 2 и 4. Выясним, когда произведение (х - 2) (х - 4) положительно, а когда — отрицательно. Если х>4,то х-2>0 и х-4>0,значит,(х-2)(х-4)>0. Если 2<х<4, то х-2>0, а х-4<0, значит, (х - 2) (х - 4) < 0. Если, наконец, х<2, то и х-2<0, и х–4<0, а потому (х – 2) (х – 4) > 0. нас интересуют все те значения переменной х, при которых данный квадратный трехчлен x^2–6x+8 принимает положительные значения. Это имеет место на двух открытых лучах: (–∞; 2), (4; +∞).

Ответ: х < 2; х > 4.

Мы применили метод интервалов. Он используется в математике для решения рациональных неравенств. В

ПРИМЕР 5.РЕШИТЬ НЕРАВЕНСТВО.

а)) $|x-2|<3$ б) $|x+3{,}2|\le 2$ в) $|10x|>27$

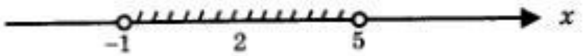

Рис. 3

а) $|x - 2| < 3$ нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; 2) < 3$, т.е. удалены от точки 2 на расстояние, меньшее 3. Это все точки, принадлежащие интервалу (-1; 5). Интервал (-1; 5) — решение заданного неравенства.

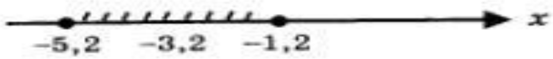

Рис. 4

б) Переведем аналитическую модель $|x + 3{,}2| \le 2$ на геометрический язык: нам нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x;-3{,}2)\le 2$, т.е. удалены от точки -3,2 на расстояние, меньшее или равное 2. Это все точки, принадлежащие отрезку [-5,2; -1,2]. Отрезок [-5,2; -1,2] — решение заданного неравенства.

Рис. 5

в) Сначала разделим обе части неравенства на одно и то же число 10; получим $|x| > 2{,}7$. Переведем аналитическую модель $|x| > 2{,}7$ на геометрический язык: нам нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; 0) > 2{,}7$, т.е. удалены от точки 0 на расстояние, большее 2,7. Это все точки, принадлежащие открытым лучам $(-\infty;-2{,}7)$ или $(2{,}7; +\infty)$.

Ответ: а) $-1 < x < 5$ б) $-5{,}2 \le x \le -1{,}2$ в) $x < -2{,}7$; $x > 2{,}7$.

Линейные и квадратные неравенства применяются в профессии преподавателя по математике.

ВЫВОД: Я ИЗУЧИЛА И РЕШИЛА ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА. ПОНЯЛА, ЧТОБЫ ИХ РЕШИТЬ, НЕОБХОДИМО ЗНАТЬ ПРАВИЛА И ТЕОРЕМУ.

Материал для презентации:

http://school.xvatit.com/index.php?title=%D0%9B%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%B8_%D0%BA%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B0