# РАЗДЕЛ 2. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Кривые 2-го порядка.
Канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы

Кривые второго порядка делятся на ***вырожденные*** и ***невырожденные.***

**Вырожденные** кривые второго порядка это прямые, которые задаются уравнением второй степени.

**Невырожденными** кривыми второго порядка являются эллипс, окружность, гипербола и парабола.

<u>Кривая второго порядка на плоскости</u> определяется уравнением второй степени с двумя переменными, причем единственным образом:

$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, где A, B, C, D, E, F – числа, но A, B и C одновременно не равны нулю ?

Впервые кривые второго порядка изучались одним из учеников Платона. Его работа заключалась в следующем: если взять две пересекающиеся прямые и вращать их вокруг биссектрисы угла, ими образованного, то получится конусная поверхность. Если же пересечь эту поверхность плоскостью, то в сечении получаются различные геометрические фигуры, а именно эллипс, окружность, парабола, гипербола и несколько вырожденных фигур.

Однако эти научные знания нашли применение лишь в XVII веке, когда стало известно, что планеты движутся по эллиптическим траекториям, а пушечный снаряд летит по параболической. Ещё позже стало известно, что если придать телу первую космическую скорость, то оно будет двигаться по окружности вокруг Земли, при увеличении этой скорости – по эллипсу, а по достижении второй космической скорости тело по параболе покинет поле притяжения Земли.

# ЭЛЛИПС

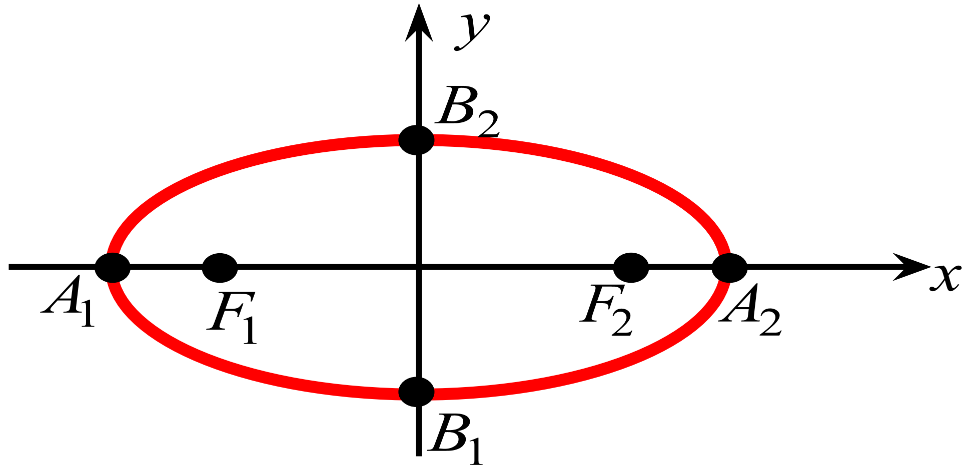
Это множество точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек плоскости $F_1$ и $F_2$ (называемых фокусами) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Числа a, b и c связаны между собой равенством:

$$a^2 - b^2 = c^2 \text{ или } b^2 - a^2 = c^2.$$

Выберем систему координат так, чтобы фокусы $F_1$ и $F_2$ лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от O: $F_1$ (-c; 0) и $F_2$ (c; 0).




Точки $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ – **вершины эллипса**. Отрезок $A_1A_2$ называется **большой** (***фокальной***) **осью**, его длина $2a$; отрезок $B_1B_2$ – **малой осью**, его длина $2b$. Величины $a$ и $b$ называются **большой** и **малой полуосью** соответственно. Длина отрезка $F_1F_2$ (равная 2с) называется **фокусным расстоянием**.

Если $M$ – произвольная точка эллипса, то отрезки $MF_1$ , $MF_2$ и их длины $r_1$, $r_2$ называются **фокальными радиусами точки** $M$.

## СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

1) Эллипс лежит внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$.

2) Эллипс имеет **центр симметрии** (начало координат) и две **оси симметрии** (оси Ox и Oy).

Величина ε, равная отношению фокусного расстояния эллипса к его большой оси, называется **эксцентриситетом** эллипса: $\varepsilon = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a}$

Так как $c = \sqrt{a^2 - b^2} < a$, то $0 < \varepsilon < 1$.

Величина $\varepsilon$ характеризует форму эллипса:

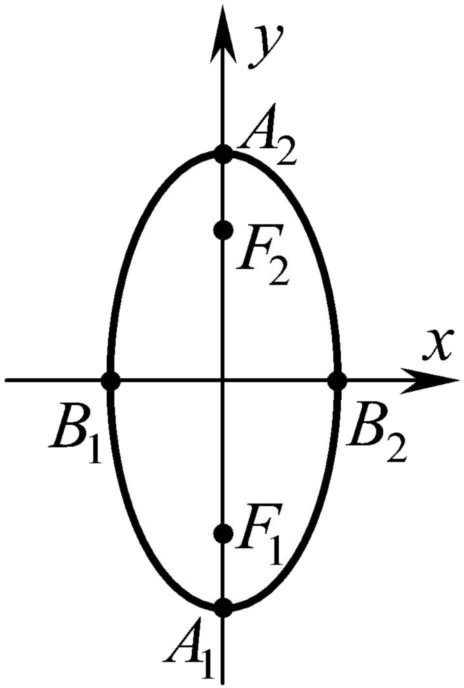
ε≈1 – эллипс сильно вытянут

ε≈0 – эллипс имеет более округлую форму

ε=1 – эллипс вырождается в окружность $x^2 + y^2 = r^2$ .

Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы $F_1$ и $F_2$ были на оси $Oy$ на одинаковом расстоянии от начала координат, то уравнение эллипса будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$




Для этого эллипса большая ось – ось $Oy$, малая ось – ось $Ox$, фокусы имеют координаты $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$ , где

$$c=\sqrt{b^2-a^2}$$

$$\varepsilon=\frac{2c}{2b}=\frac{c}{b}$$

Оба случая расположения эллипса относительно осей координат можно представить в таблице 1.