

**Презентационный набор слайдов для
представления в составе курса лекций
«Математическое моделирование
радиотехнических устройств и систем»**

по дисциплине

**«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ И
СИСТЕМ»**

для подготовки магистров

по направлению

11 04 01 - «Радиотехника»



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ И СИСТЕМ

Тема 1. Методологические основы моделирования.

Тема 2. Методы моделирования случайных величин с заданным законом распределения.

Тема 3. Моделирование случайных процессов.

Тема 4. Модели случайных процессов с долговременной зависимостью.

Тема 5. Фрактальные процессы.

Тема 6. Моделирование радиоканалов.

Тема 7. Моделирование процессов преобразования сигналов и помех линейными и нелинейными системами

Тема 8. Модели систем массового обслуживания с очередями.

Тема 9. Статистический анализ и обработка результатов математического моделирования



МОДЕЛИРОВАНИЕ –

замещение исследуемого объекта его условным образом, описанием или другим объектом, обеспечивающим близкое к оригиналу поведение в рамках некоторых допущений и приемлемых погрешностей.

Общие требования к

моделям:
1) адекватность – достаточно точное и непротиворечивое отображение свойств объекта;

2) полнота – предоставление получателю всей необходимой информации об объекте;

3) гибкость – возможность воспроизведения различных ситуаций во всем диапазоне изменения условий и параметров, интересующих исследователя;

4) вычислительная сложность – должна быть приемлемой для имеющегося времени и программных средств.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ –

абстрактно-формализованное описание системы, например, в виде совокупности математических соотношений или схемы алгоритма, которое обеспечивает воспроизведение результатов работы систем или устройств на уровне, достаточно близком к их реальному поведению, получаемому при их натурных испытаниях.



КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

Структурные модели – отражают структуру системы, опираясь на ее устройство и физические механизмы функционирования

Функциональные модели – используются в отсутствии информации о структуре системы и отражают только внешние результаты ее функционирования («**black box**»)



ФОРМАЛЬНЫЕ КЛАССИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

- Детерминированные / Стохастические
- Линейные / Нелинейные (по выполнению принципа суперпозиции)
- Статические / Динамические
- Сосредоточенные / Распределенные



АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

процессы функционирования системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений).

Аналитическая модель может быть исследована следующими методами:

- аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для характеристик систем;
- численным, когда не удается найти решение уравнений в общем виде и их решают для конкретных начальных данных;
- качественным, когда при отсутствии решения находят некоторые его свойства.



ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

воспроизводится алгоритм («логика») функционирования исследуемой системы во времени при различных сочетаниях значений параметров системы и внешней среды и с течением времени.

- Ориентировано на моделирование сложных систем, когда аналитическое моделирование невозможно либо затруднено в силу ограниченного понимания физических принципов функционирования системы;
- Позволяет легко учитывать наличие дискретных или непрерывных элементов, нелинейные характеристики, случайные воздействия и др.
- Основным средством реализации имитационного моделирования служит ЭВМ.



СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

многократно повторяющееся имитационное моделирование работы стохастической системы с целью оценки статистических характеристик его результатов (метод Монте-Карло).

- Применяется при моделировании сложных динамических систем
- Результаты моделирования представляют собой случайные величины или процессы
- Для принятия решений по результатам моделирования проводится математическая обработка (статистическое оценивание, проверка гипотез и др.)



ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

- 1) **Принцип информационной достаточности** – необходимо обладать достаточным объемом исходной информации о системе
- 2) **Принцип осуществимости** – модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования с вероятностью, существенно отличающейся от нуля, за конечное время
- 3) **Принцип множественности моделей** – модель должна отражать в первую очередь те свойства реальной системы, которые влияют на выбранный показатель эффективности
- 4) **Принцип агрегирования** – разукрупнение модели в подсистемы и отдельные элементы
- 5) **Принцип параметризации** – возможность изменения параметров модели, отражающей внешние условия



ЭТАПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

- 1) **Постановка задачи, определение объекта и целей исследования**
- 2) **Выбор типа математической модели**
- 3) **Предварительный контроль (валидация) модели**
 - контроль **размерностей** – приравниваться и складываться могут только величины одинаковой размерности
 - контроль **порядков** – определяются порядки складываемых величин и явно малозначительные слагаемые отбрасываются
 - контроль **граничных условий** - проверяется соответствие граничным условиям задачи
 - контроль **устойчивости модели** – допустимое в реальности варьирование исходных данных не приведет к существенному изменению решения



ЭТАПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ЭВМ

- 1) определение цели моделирования;
- 2) разработка концептуальной модели;
- 3) формализация модели;
- 4) программная реализация модели;
- 5) планирование модельных экспериментов;
- 6) реализация плана эксперимента;
- 7) анализ и интерпретация результатов моделирования.



ГЕНЕРАТОРЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

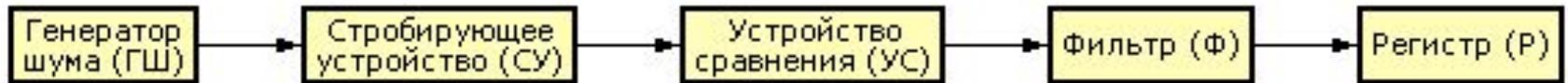
За эталон генератора случайных чисел (ГСЧ) принят такой генератор, который порождает последовательность случайных чисел с *равномерным* законом распределения в интервале $(0; 1)$.

Моделирование случайных величин с заданным законом распределения основано, как правило, на преобразовании равномерно распределенных случайных величин в величины с заданным законом распределения с помощью некоторого отображения.



ФИЗИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Примером является аппаратный генератор шума, использующий собственные тепловые шумы полупроводникового элемента, напр. транзистора





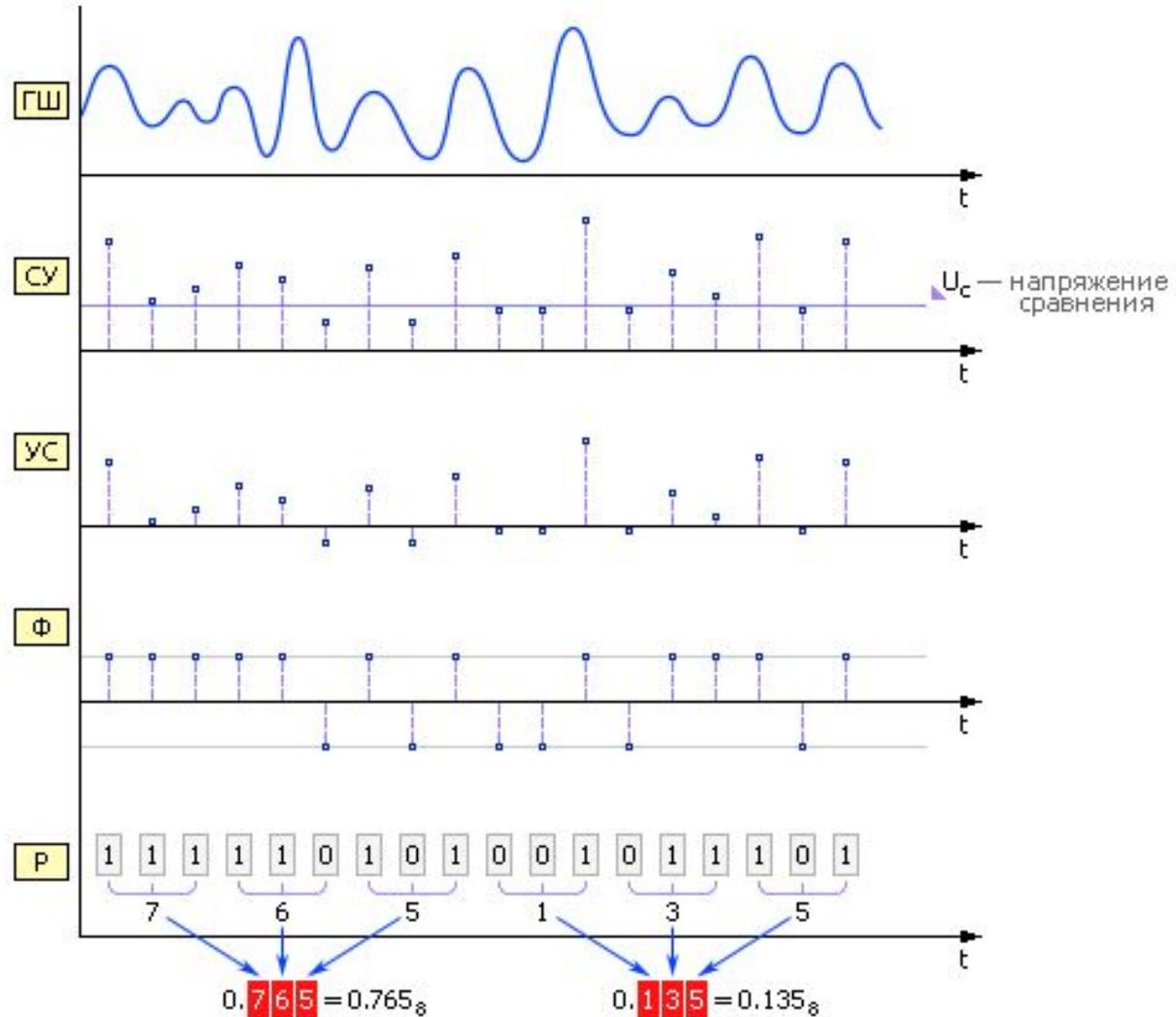
ДИАГРАММЫ АППАРАТНОГО ГЕНЕРАТОРА ШУМА

Стробирование

Сравнение

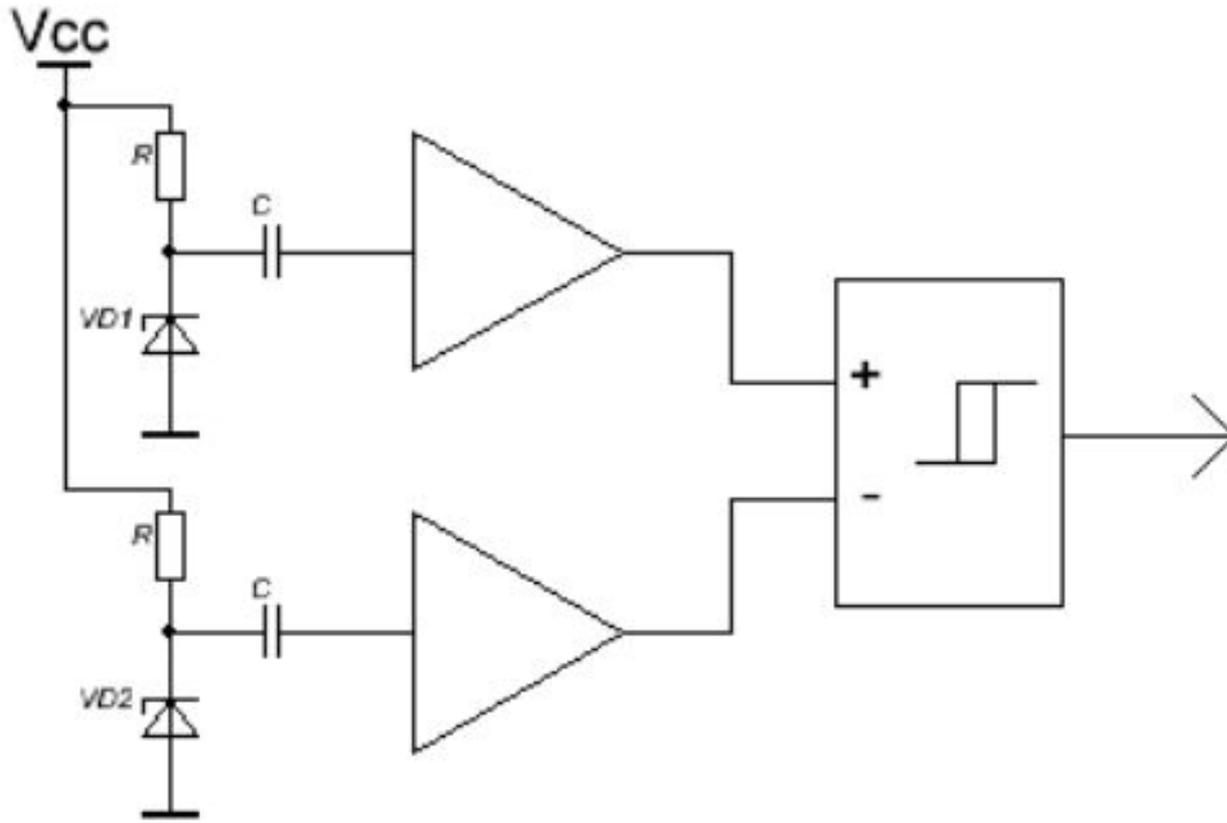
Квантование

Оцифровка





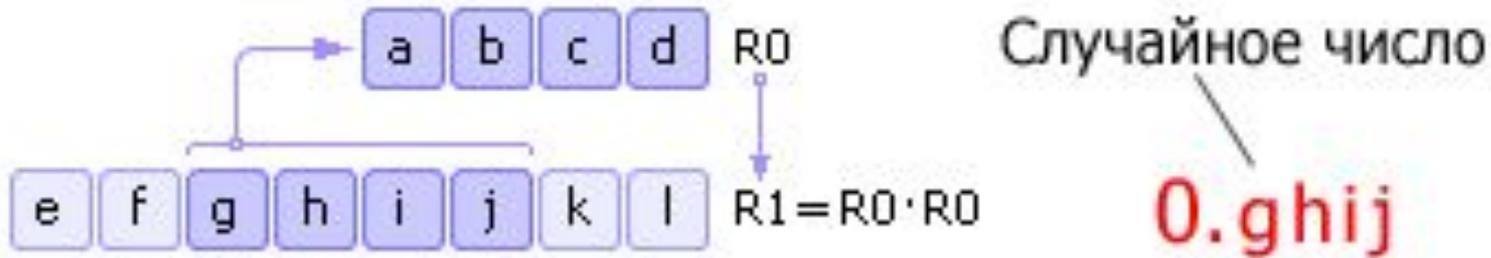
РЕАЛИЗАЦИЯ АППАРАТНОГО ГЕНЕРАТОРА ШУМА





АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Метод серединных квадратов



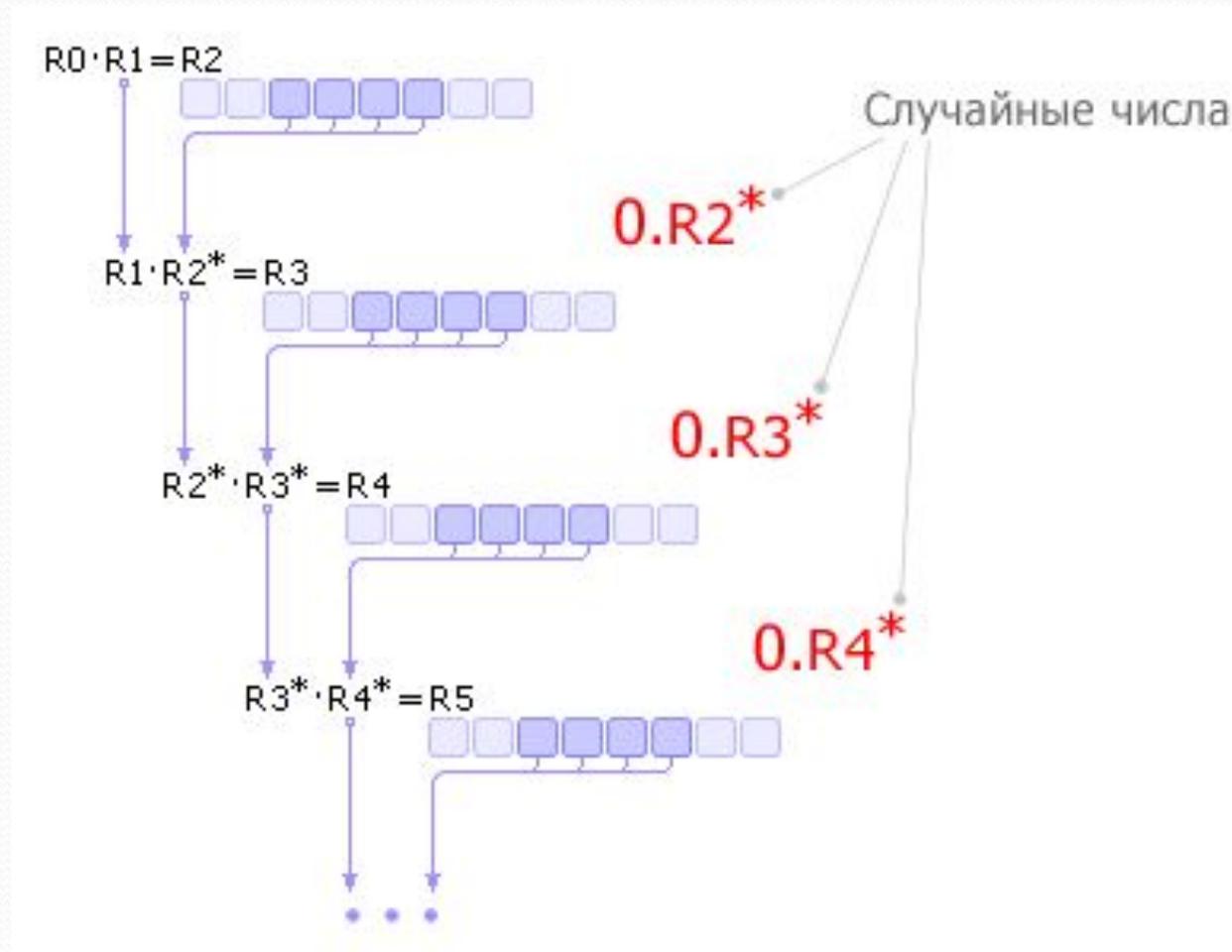
Недостатки:

- 1) если на некоторой итерации число R_0 станет равным нулю, то генератор вырождается, поэтому важен правильный выбор начального значения R_0 ;
- 2) генератор будет повторять последовательность через Mn шагов (в лучшем случае), где n — разрядность числа R_0 , M — основание системы счисления.



АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

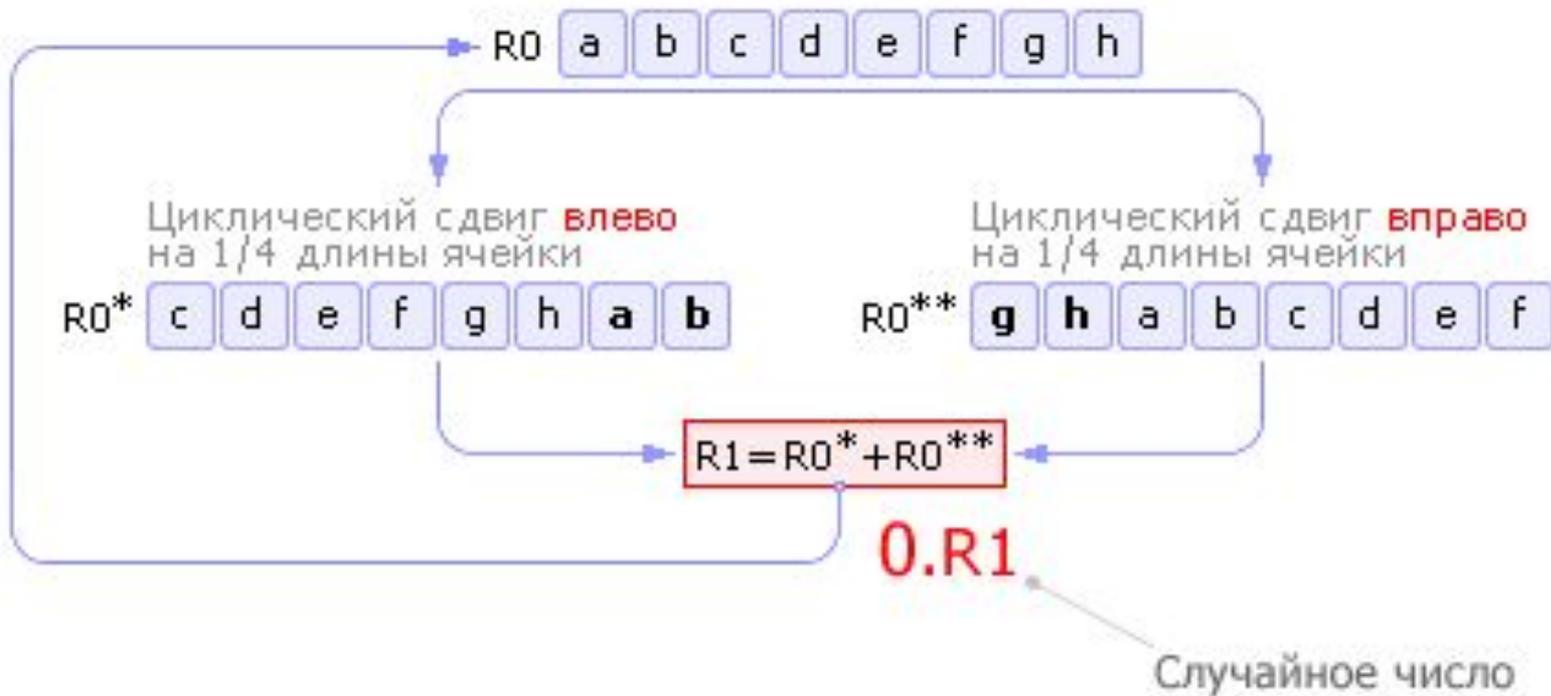
Метод серединных произведений





АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Метод перемешивания





АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Линейный конгруэнтный метод

$$r_{i+1} = \text{mod}(k \cdot r_i + b, M)$$

M — модуль ($0 < M$);

k — множитель ($0 \leq k < M$);

b — приращение ($0 \leq b < M$);

r_0 — начальное значение ($0 \leq r_0 < M$).



АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Метод Фибоначчи с запаздываниями

$$X_k = \begin{cases} X_{k-a} - X_{k-b}, & \text{если } X_{k-a} \geq X_{k-b}; \\ X_{k-a} - X_{k-b} + 1, & \text{если } X_{k-a} < X_{k-b}. \end{cases}$$

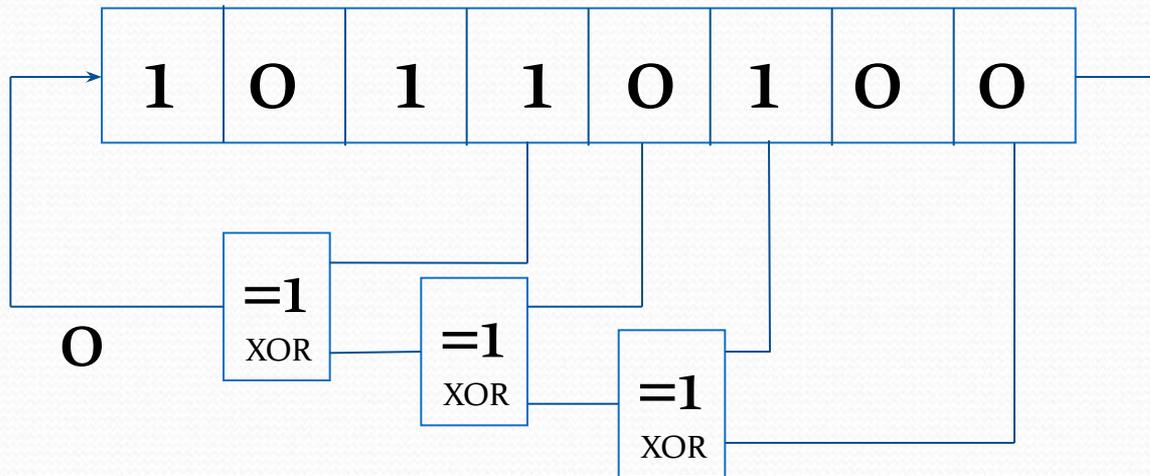
X_k — вещественные числа из диапазона $[0,1)$;

a, b — целые положительные числа



АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Регистр сдвига – конфигурация Фибоначчи



Переменная состояния хранится в регистре длины N .

Генерация следующего состояния включает два шага:

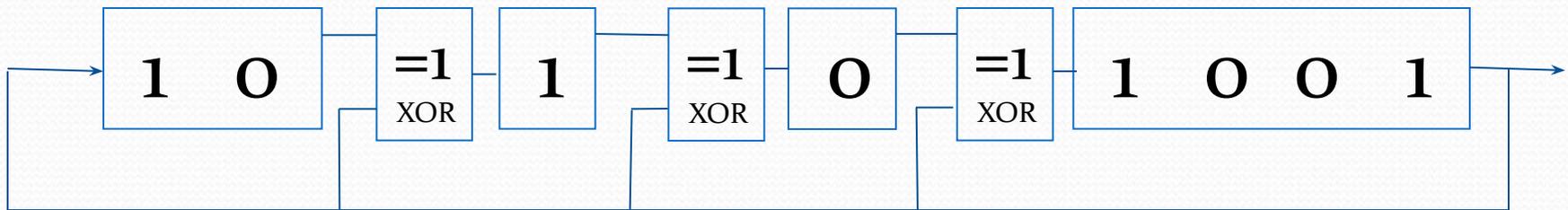
- Подсчитывается значение бита $C = X_{i_1} \text{ xor } X_{i_2} \text{ xor } \dots \text{ xor } X_{i_k}$, где i_1, i_2, \dots, i_k — номера битов регистра.

- Регистр сдвигается на 1 бит вправо, крайний левый бит принимает значение C .



АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Регистр сдвига – конфигурация Галуа





АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Обобщенный алгоритм генератора случайных чисел на регистре сдвига с обратной связью

$$P(x; p, q) = x^p + x^q + 1 \quad (x = 0, 1)$$

$$b_i = b_{i-p} \oplus b_{i-p+q}$$

$$W_i = b_i b_{i+d} b_{i+2d} \cdots b_{i+(l-1)d}$$

$$W_i = W_{i-p} \oplus W_{i-q}$$



АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Обобщенный алгоритм генератора случайных чисел на регистре сдвига с обратной связью

$p^2 + q^2 + 1$ -- простое число

Пары чисел Мерсена: Алгоритм R250 (Kirkpatrick-Stoll, 1981)

$$p = 98 \quad q = 27$$

$$p = 250 \quad q = 103$$

$$p = 1279 \quad q = 216,418$$

$$p = 9689 \quad q = 84,471,1836,2444,4187$$

$$x_i = x_{i-250} \oplus x_{i-103}$$

Дальнейшее повышение периода псевдослучайных последовательностей может производиться путем их комбинации:

$$z_i = x_i \otimes y_i$$



ПРОВЕРКА КАЧЕСТВА РАБОТЫ ГЕНЕРАТОРА

Проверки на равномерность распределения

1) ГСЧ должен выдавать значения статистических параметров, характерные для равномерного случайного закона:

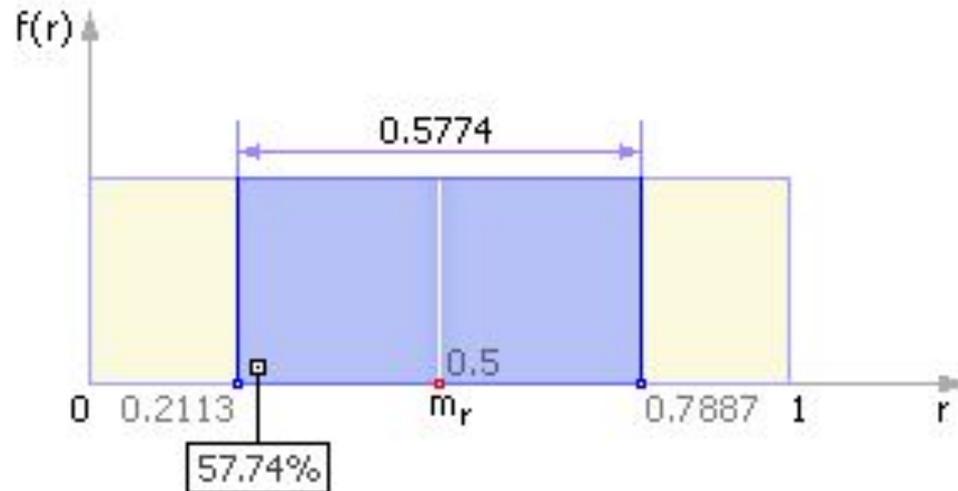
- математическое ожидание;
- дисперсия;
- среднеквадратичное отклонение.



ПРОВЕРКА КАЧЕСТВА РАБОТЫ ГЕНЕРАТОРА

Проверки на равномерность распределения

2) Частотный тест – позволяет выяснить, сколько чисел попало в интервал $(m_r - \sigma_r; m_r + \sigma_r)$, т.е. $(0.5 - 0.2887; 0.5 + 0.2887) = (0.2113; 0.7887)$
 $0.7887 - 0.2113 = 0.5774$

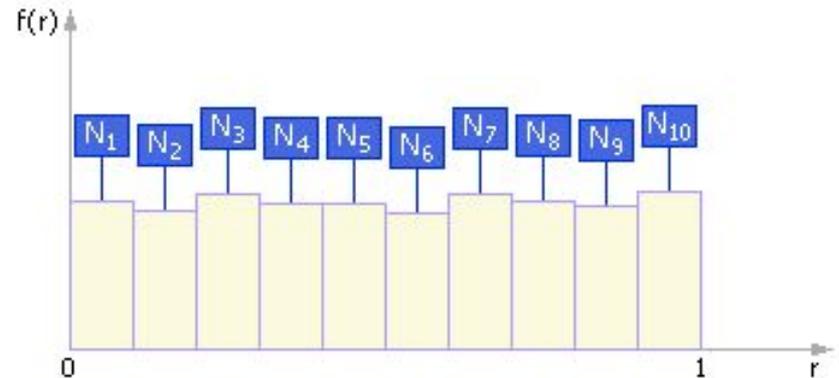
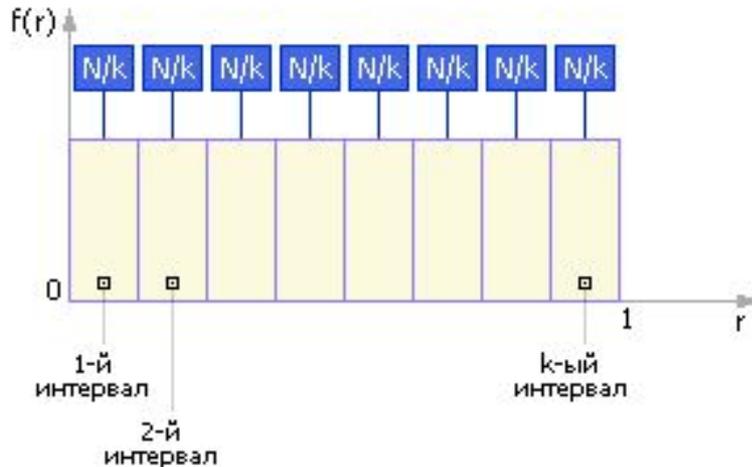




ПРОВЕРКА КАЧЕСТВА РАБОТЫ ГЕНЕРАТОРА

Проверки на равномерность распределения

3) Проверка по критерию «хи-квадрат»





ПРОВЕРКА КАЧЕСТВА РАБОТЫ ГЕНЕРАТОРА

Проверки на равномерность распределения

3) Проверка по критерию «хи-квадрат»

$$\chi^2_{\text{эксп.}} = (n_1 - p_1 \cdot N)^2 + (n_2 - p_2 \cdot N)^2 + \dots + (n_k - p_k \cdot N)^2.$$

$$\chi^2_{\text{эксп.}} = \frac{(n_1 - p_1 N)^2}{p_1 N} + \frac{(n_2 - p_2 N)^2}{p_2 N} + \dots + \frac{(n_k - p_k N)^2}{p_k N}$$

$$\chi^2_{\text{эксп.}} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - p_i N)^2}{p_i N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \left(\frac{n_i^2}{p_i} \right) - N$$



ПРОВЕРКА КАЧЕСТВА РАБОТЫ ГЕНЕРАТОРА

Проверки на статистическую независимость

- 1) Проверка на частоту появления цифры в последовательности (теоретическая вероятность определяется системой счисления)

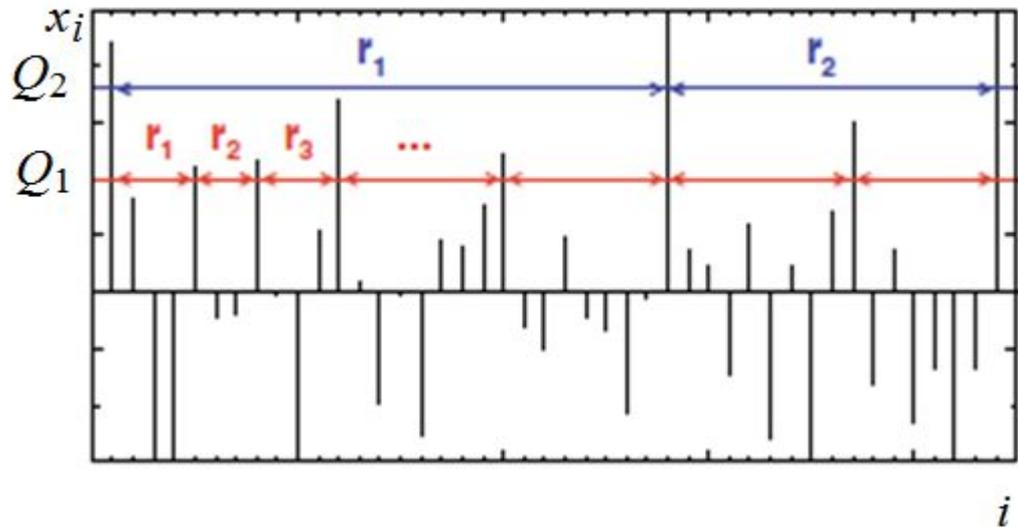
- 2) Проверка появления серий из одинаковых цифр (теоретическая вероятность определяется системой счисления)



Проверка на статистическую независимость методом интервальных статистик

Вероятность превышения заданного порога Q

$$\int_Q^{\infty} P(x) dx = 1 - F(Q) = \frac{1}{R_Q}$$

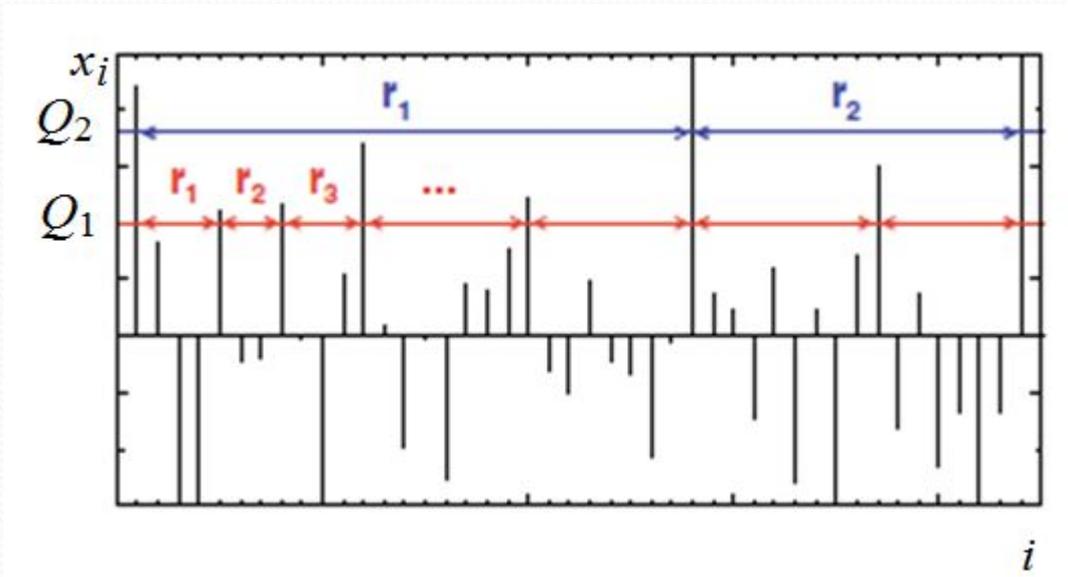


Чтобы абстрагироваться от конкретного распределения данных, удобно рассматривать относительные значения

$$r_i / R_Q$$



Проверка на статистическую независимость методом интервальных статистик



Плотность вероятности распределения интервалов между выбросами процесса с независимыми отсчетами
(выбросы формируют пуассоновский поток событий)

$$P_Q(r) = \frac{1}{R_Q} e^{-\frac{r}{R_Q}}$$



Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

2. Моделирование случайных величин.

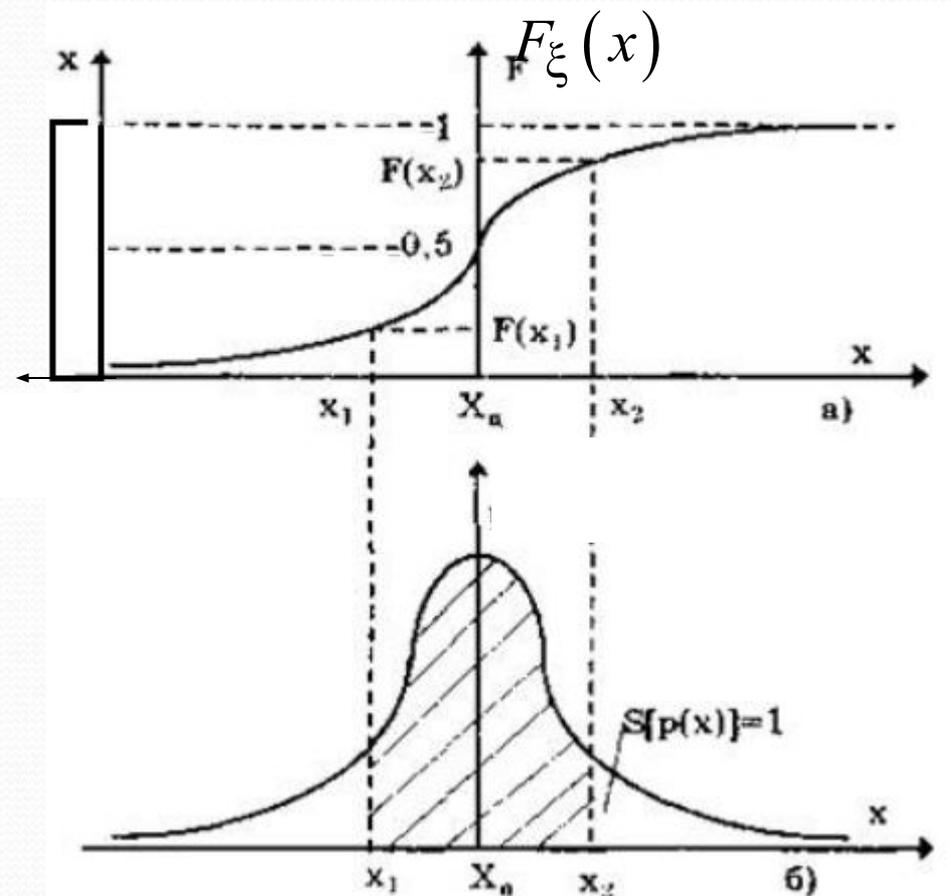
1) Метод нелинейного преобразования, обратного функции распределения

$$\eta = f(\xi)$$

$$W_\eta(y)|\Delta y| \approx W_\xi(x)|\Delta x|$$

$$W_\eta(y) = W_\xi(\varphi(y)) \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right|$$

$$y = F_\eta^{-1}(F_\xi(x))$$

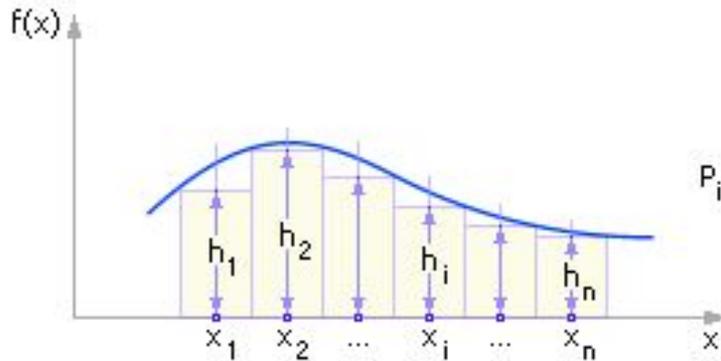




Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

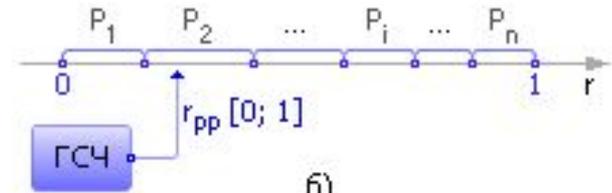
2. Моделирование случайных величин.

2) Метод ступенчатой аппроксимации



а)

$$P_i = \frac{h_i}{h_1 + h_2 + \dots + h_i + \dots + h_n}$$
$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$



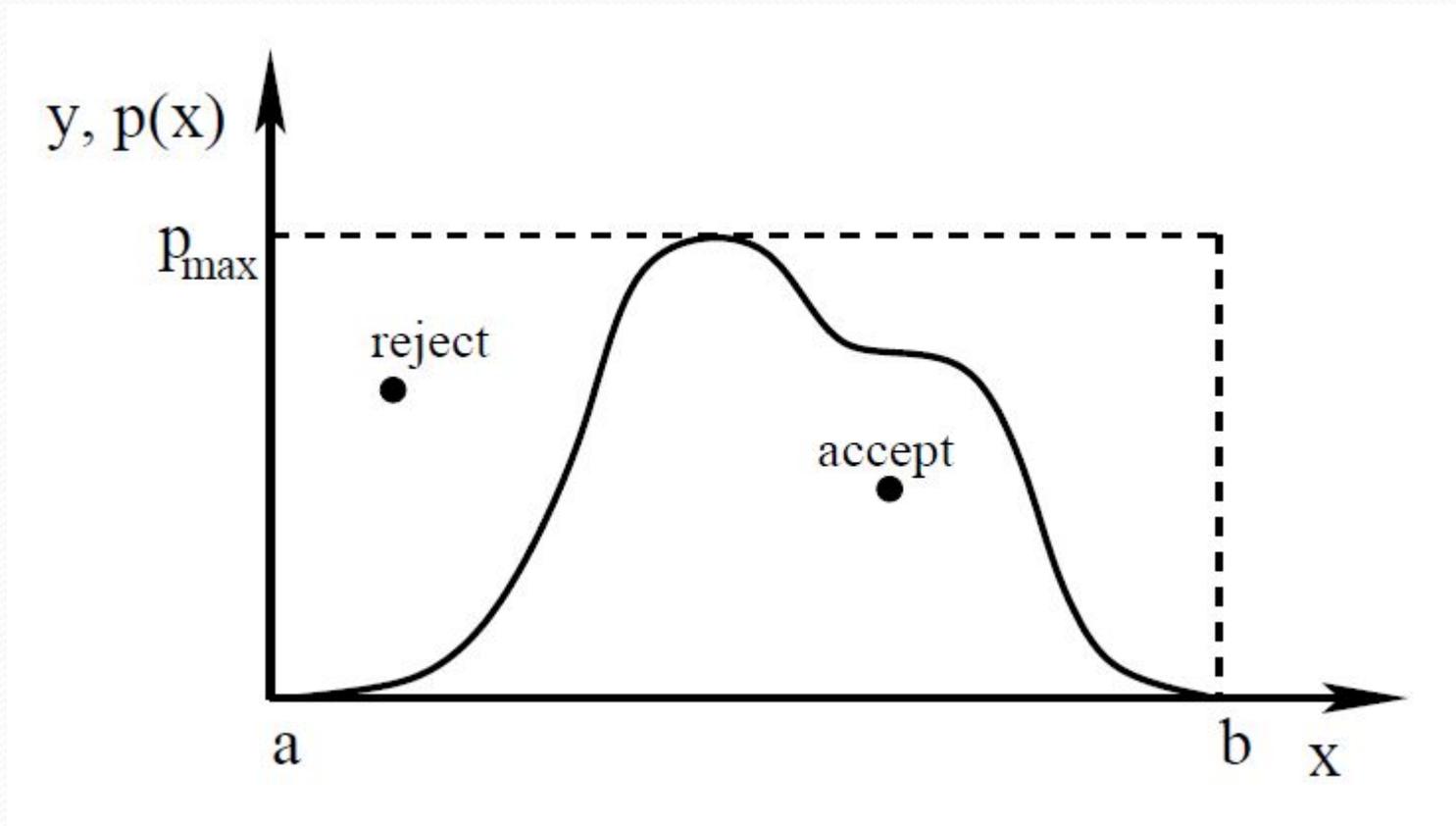
б)



Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

2. Моделирование случайных величин.

3) Метод Неймана (метод исключения)





2. Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

4) Синтез нормального распределения из равномерного – алгоритм Бокса-Мюллера

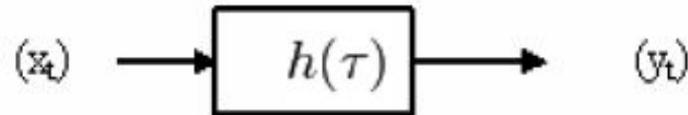
$$y_1 = \sqrt{-2 \ln x_1} \cos(2\pi x_2)$$
$$y_2 = \sqrt{-2 \ln x_1} \sin(2\pi x_2)$$

$$(x_1, x_2 \in [0, 1]).$$



Формирование случайных процессов с заданными корреляционными свойствами

Преобразование в линейной системе



$$y(t) = \int_0^T x(t - \tau) h(\tau) d\tau$$

$$y_k = \sum_{i=0}^N x_{k-i} h_i$$



Модели случайных процессов с кратковременной зависимостью

Авторегрессионное уравнение 1-го порядка

$$z_t = c + \phi z_{t-1} + a_t \quad a_t \text{ -- БШ}$$

$-1 < \phi < 1$ -- для стационарного процесса

За вычетом мат. ожидания $\mu = \frac{c}{1-\phi}$ АР1 имеет вид

ИЛИ



Модели случайных процессов с кратковременной зависимостью

Авторегрессионное уравнение 1-го порядка

-- БШ

Условное среднее

Дисперсия

Ковариация



Модели случайных процессов с кратковременной зависимостью

Авторегрессионное уравнение 1-го порядка

-- БШ

АКФ

Интервал корреляции



Модели случайных процессов с кратковременной зависимостью

Авторегрессионное уравнение 2-го порядка

-- БШ

Мат. ожидание

Дисперсия

АКФ



Модели случайных процессов с кратковременной зависимостью

Авторегрессионное уравнение p -го порядка

-- БШ

АКФ

Оценка параметров авторегрессионной модели данных

2. Моделирование случайных процессов.



Уравнения Юла – Уокера

В матричной форме



Оценка параметров авторегрессионной модели данных

2. Моделирование случайных процессов.

Пример описания процесса АР-моделью по виду АКФ

Уравнения Юла – Уокера

Решение



Способы определения интервала корреляции

Определение 1

$$K$$

Определение 2

$$K(\tau) d\tau$$

Определения 3 и 4

$$|K(\tau)| d\tau$$

$$K^2(\tau) d\tau$$



Типовые АКФ и их интервалы корреляции



Типовые АКФ и их интервалы корреляции



Модели случайных процессов с кратковременной зависимостью

Модель скользящего среднего 1-го порядка

-- БШ

Мат. ожидание

Дисперсия



Модели случайных процессов с кратковременной зависимостью

Модель скользящего среднего 1-го порядка

-- БШ

Ковариация

АКФ



Модели случайных процессов с кратковременной зависимостью

Модель скользящего среднего q -го порядка

Ковариация

АКФ



Модели случайных процессов с кратковременной зависимостью

Модель авторегрессии – скользящего среднего 1-го порядка

Ковариация

АКФ



Модели случайных процессов с кратковременной зависимостью

Обобщенная модель авторегрессии – скользящего среднего

Ковариация

Асимптотически АКФ для $k > q$ определяется только АР составляющей



Модели интегрированных и долговременно-зависимых процессов

2. Моделирование случайных процессов.

ARIMA – интегрированный ARMA (ARCC)

Модель случайного блуждания (Random Walk – RW)

-- БШ

Мат. ожидание и дисперсия возрастают
→ процесс нестационарный



Модели интегрированных и долговременно-зависимых процессов

2. Моделирование случайных процессов.

Модель случайного блуждания (Random Walk – RW)

-- БШ

Ковариация

АКФ



Модели процессов с долговременной зависимостью (ДВЗ)

Процесс с бесконечным интервалом корреляции

$$K(\tau) d\tau$$

АКФ затухает медленнее экспоненты, наиболее часто используется степенная модель

СПМ также имеет вид степенной функции



Самоподобные (масштабно—инвариантные) модели случайных процессов

При масштабировании

еем

Показатель Хёрста

Пример: задача случайного блуждания



Модели случайных процессов со степенной АКФ (фрактальные модели) – частный случай СП с ДВЗ

Для процесса со степенной АКФ

Средний квадрат отклонения

может быть выражен через СПМ



Флуктуационный анализ

Введем функцию разбиения случайного процесса на $\nu = N / s$ неперекрывающихся окон

Обобщенная (нелинейная) АКФ фрактального процесса

Для мультифрактального процесса



Флуктуационный анализ

1. Вычисление кумулятивной суммы
2. Вычисление флуктуационной функции
3. Вычисление отклонения от аппроксимации порядка q

$H(q)$ – обобщенный показатель Хёрста



Флуктуационный анализ на основе вейвлет-преобразования

1. Вычисление локальной суммы в сегменте k
2. Взятие первых (вторых, ...) разностей (в соответствии с порядком метода)
3. Вычисление флуктуационной функции порядка q

Связь с АКФ:



Флуктуационный анализ на основе вейвлет-преобразования **(WTA)**



Флуктуационный анализ методом центрированного скользящего среднего (**СМА**)

1. Вычисление кумулятивной суммы (профиля)
2. Вычисление центрированного скользящего среднего в окне длиной s
3. Вычисление флуктуационной функции порядка q

Показатель Хёрста:



Флуктуационный анализ методом централизованного скользящего среднего (**СМА**)



Флуктуационный анализ с исключением полиномиального тренда (**DFA**)

1. Вычисление кумулятивной суммы
2. Вычисление флуктуационной функции
3. Вычисление отклонения от аппроксимации порядка q

$H(q)$ – обобщенный показатель Хёрста



Связь автокорреляционных и флуктуационных характеристик фрактального случайного процесса

Для процесса со степенной АКФ

$$m_2 =$$

Откуда показатель Хёрста

– положительная корреляция

– отрицательная корреляция

$H = 1/2$ – некоррелированный процесс

Синтез и преобразования ДВЗ-процесса



СПМ ДВЗ – процесса

Формирующий фильтр для ДВЗ – процесса

Преобразование СПМ (при негауссовском распределении итерационное, алгоритм Шрайбера-Шмидца)

1. Дифференцирование $N = N - 1$
2. Интегрирование $N = N + 1$



Синтез ДВЗ-процесса методом линейной фильтрации



процесса с заданным распределением и заданными корреляционными свойствами

Синтез отсчетов с
равномерным
распределением

Алгоритм Шрайбера – Шмитца

Преобразование
распределения (метод
обратной функции
распределения, метод
Неймана и др.)

Линейная
фильтрация
(задание
корреляционных
свойств)

Поранговая замена
отсчетов
(восстановление
распределения)

Оценка
корреляционных
свойств (H, γ, β)

K+
P-

P+
K-



Флуктуационный анализ с исключением полиномиального тренда (**DFA**)

Флуктуационные функции



Сопоставление характеристик КВЗ- и ДВЗ-процессов (**DFA**)



Сопоставление характеристик КВЗ- и ДВЗ-процессов (**WTA**)



Сопоставление характеристик КВЗ- и ДВЗ-процессов (АКФ)



Сопоставление характеристик КВЗ- и ДВЗ-процессов (СПМ)





Моделирование процесса с нелинейной ДВЗ – биномиальный каскад



Моделирование процесса с нелинейной ДВЗ – случайный мультипликативный каскад



Каскады с фиксированными и случайными множителями

1. Достоинство – легко получить аналитические решения для статистических характеристик



2. Недостаток – квантованность по уровню значений итоговой реализации, определяемая числом итераций алгоритма





Выбросы флуктуационных составляющих случайных процессов



Статистики экстремумов вариационных рядов

Экстремум вариационного ряда

Вероятность появления хотя бы одного выброса в
выборке из R элементов

Условие сходимости

Функция распределения вероятностей экстремальных
значений



Обобщенные распределения экстремумов вариационных рядов

Пределные распределения

сводятся к трем основным случаям

ление Гумбеля

ление Фречета

ление Вайбулла



Интервальные статистики выбросов случайных процессов с линейной ДВЗ

Плотность вероятности распределения интервалов между выбросами процесса с независимыми отсчетами
(выбросы формируют пуассоновский поток событий)

Плотность вероятности распределения интервалов между выбросами процесса с линейной ДВЗ



Интервальные статистики выбросов случайных процессов с линейной ДВЗ

Обобщенная аппроксимация ПВ растянутым гамма-распределением (производной от распределения
]

(ается функцией Вайбулла

(

Иногда удобно использовать ФР для проверки вида распределения, особенно при коротких реализациях



Интервальные статистики выбросов случайных процессов с нелинейной ДВЗ

При выраженной нелинейной зависимости ПВ интервалов
стремится к степенному распределению

При комбинации линейной и нелинейной ДВЗ обобщенная
аппроксимация может быть выполнена растянутым гамма-
распределением



Типичные виды ПВ интервалов для случайных процессов с ДВЗ



Оценка вероятности выброса на основе интервальных статистик

Оценка вероятности одно- или многократного превышения порога Q в течение интервала

Для случая СП с независимыми отсчетами

При условии $\Delta t \ll R_Q$,



Оценка вероятности выброса на основе интервальных статистик

Для случайных процессов с линейной ДВЗ



Оценка вероятности выброса на основе интервальных статистик

Для случайных процессов с выраженной нелинейной ДВЗ

Для $\Delta t \ll t$,



Оценка вероятности выброса на основе интервальных статистик

Для случайных процессов с комбинированной ДВЗ (типично для трафика в многопользовательских информационных системах), если ПВ имеет вид

можно приближенно получить оценки

$$\text{для } \Delta t \ll t \leq R_Q / \lambda$$



Оценка вероятности выброса на основе интервальных статистик



СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Андреева О.М., Богачев М.И., Ипатов В.П. и др. Математическое моделирование случайных процессов. Учеб. пособие / Под общ. ред. проф. Ю.Д. Ульяницкого. Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012.
- [2] Андреева О.М., Богачев М.И., Ипатов В.П. и др. Компьютерный практикум по дисциплинам «Математический аппарат радиотехники» и «Статистическая теория РТС». Учеб. пособие / Под общ. ред. проф. Ю.Д. Ульяницкого. Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011.
- [3] Андреева О.М., Богачев М.И., Красичков А.С. и др./ Преобразование сигналов и помех линейными и нелинейными системами. Учеб. пособие /Под общ. ред. проф. Ю.Д. Ульяницкого. Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013.
- [4] Фрактальные процессы в телекоммуникациях: монография / О.И. Шелухин, А.М. Тенякшев, А.В. Осин; Под ред. О.И. Шелухина. - М. : Радиотехника, 2003.
- [5] Шелухин О.И. Моделирование информационных систем / Под ред. О.И. Шелухина. - М.: Горячая линия-Телеком, 2014.