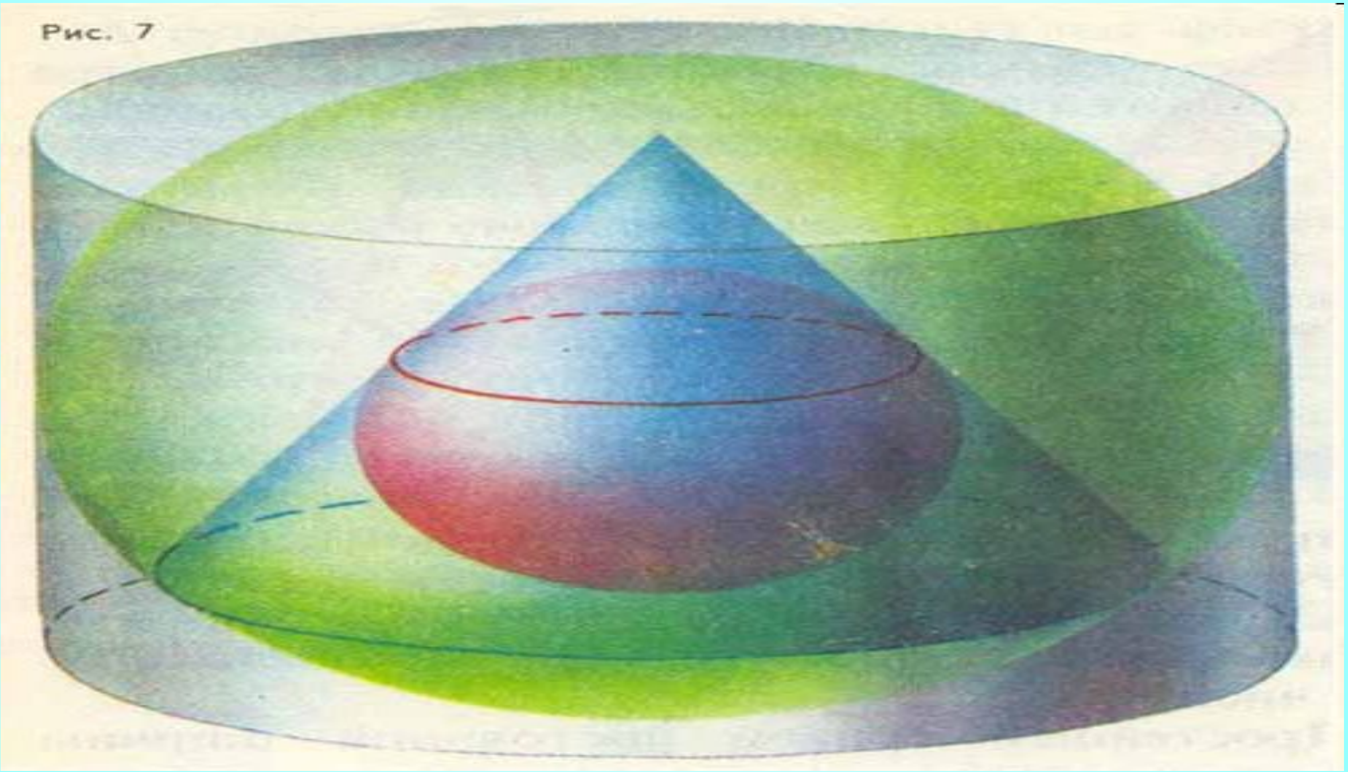
Комбинация шара с другими телами



Определения.

- 1. Шар называется вписанным в многогранник, а многогранник описанным около шара, если поверхность шара касается всех граней многогранника.
- 2. Шар называется описанным около многогранника, а многогранник вписанным в шар, если поверхность шара проходит через все вершины многогранника.

Определения.

- 3. **Шар называется вписанным в цилиндр, усеченный конус (конус), а цилиндр, усеченный конус (конус) – описанным около шара, если поверхность шара касается оснований (основания) и всех образующих цилиндра, усеченного конуса (конуса).**
- *(Из этого определения следует, что в любое осевое сечение этих тел может быть вписана окружность большого круга шара).*
- 4. **Шар называется описанным около цилиндра, усеченного конуса (конуса), если окружности оснований (окружность основания и вершина) принадлежат поверхности шара.**
- *(Из этого определения следует, что около любого осевого сечения этих тел может быть описана окружность большего круга шара).*

Общие замечания о положении центра шара.

- 1. Центр шара, вписанного в многогранник, лежит в точке пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов многогранника. Он расположен только внутри многогранника.
- 2. Центр шара, описанного около многогранника, лежит в точке пересечения плоскостей, перпендикулярных ко всем ребрам многогранника и проходящих через их середины. Он может быть расположен внутри, на поверхности и вне многогранника.

Комбинация шара с призмой

1. Шар, вписанный в прямую призму.

- *Теорема 1*. Шар можно вписать в прямую призму в том и только в том случае, если в основание призмы можно вписать окружность, а высота призмы равна диаметру этой окружности.
- ***Следствие 1.*** Центр шара, вписанного в прямую призму, лежит в середине высоты призмы, проходящей через центр окружности, вписанной в основание.
- ***Следствие 2.*** Шар, в частности, можно вписать в прямые: треугольную, правильную, четырехугольную (у которой суммы противоположных сторон основания равны между собой) при условии H = 2r, где H – высота призмы, r – радиус круга, вписанного в основание.

2. Шар, описанный около призмы.

- ***Теорема 2.*** Шар можно описать около призмы в том и только в том случае, если призма прямая и около ее основания можно описать окружность.
- ***Следствие 1.*** Центр шара, описанного около прямой призмы, лежит на середине высоты призмы, проведенной через центр круга, описанного около основания.
- ***Следствие 2.*** Шар, в частности, можно описать: около прямой треугольной призмы, около правильной призмы, около прямоугольного параллелепипеда, около прямой четырехугольной призмы, у которой сумма противоположных углов основания равна 180 градусов.

№ 632, 633, 634, 637(а), 639(а,б).

Комбинация шара с пирамидой

1. Шар, описанный около пирамиды.

- ***Теорема 3.*** Около пирамиды можно описать шар в том и только в том случае, если около ее основания можно описать окружность.
- ***Следствие 1***. Центр шара, описанного около пирамиды лежит в точке пересечения прямой, перпендикулярной основанию пирамиды, проходящей через центр окружности, описанной около этого основания, и плоскости, перпендикулярной любому боковому ребру, проведенной через сере дину этого ребра.

- ***Следствие 2.*** Если боковые ребра пирамиды равны между собой (или равно наклонены к плоскости основания), то около такой пирамиды можно описать шар.Центр этого шара в этом случае лежит в точке пересечения высоты пирамиды (или ее продолжения) с осью симметрии бокового ребра, лежащей в плоскости бокового ребра и высоты.
- ***Следствие 3.*** Шар, в частности, можно описать: около треугольной пирамиды, около правильной пирамиды, около четырехугольной пирамиды, у которой сумма противоположных углов равна 180 градусов.

2. Шар, вписанный в пирамиду.

- ***Теорема 4.*** Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию, то в такую пирамиду можно вписать шар.
- ***Следствие 1.*** Центр шара, вписанного в пирамиду, у которой боковые грани одинаково наклонены к основанию, лежит в точке пересечения высоты пирамиды с биссектрисой линейного угла любого двугранного угла при основании пирамиды, стороной которого служит высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды.
- *Следствие 2.* В правильную пирамиду можно вписать шар.

№ 635, 637(б), 638, 639(в),640, 641.

Комбинация шара с усеченной пирамидой.

- ***1. Шар, описанный около правильной усеченной пирамиды*.**
- Теорема 5. Около любой правильной усеченной пирамиды можно описать шар. (Это условие является достаточным, но не является необходимым)
- ***2. Шар, вписанный в правильную усеченную пирамиду.***
- Теорема 6. В правильную усеченную пирамиду можно вписать шар в том и только в том случае, если апофема пирамиды равна сумме апофем оснований.

(№ 636).

Комбинация шара с круглыми телами.

- ***Теорема 7.*** Около цилиндра, усеченного конуса (прямых круговых), конуса можно описать шар.
- ***Теорема 8.*** В цилиндр (прямой круговой) можно вписать шар в том и только в том случае, если цилиндр равносторонний.
- ***Теорема 9.*** В любой конус (прямой круговой) можно вписать шар.
- ***Теорема 10.*** В усеченный конус (прямой круговой) можно вписать шар в том и только в том случае, если его образующая равна сумме радиусов оснований.

№ 642, 643, 644, 645, 646.

Устные задачи.

1. (r = a/2, R = a3).

2. (а) да; б) да; в) нет; г) нет; д) нет)

3. да

4. (Нет, не около любой четырёхугольной пирамиды)

- 1. Ребро куба равно а. Найти радиусы шаров: вписанного в куб и описанного около него.
- 2. Можно ли описать сферу (шар) около: а) куба; б) прямоугольного параллелепипеда; в) наклонного параллелепипеда, в основании которого лежит прямоугольник; г) прямого параллелепипеда; д) наклонного параллелепипеда?
- 3. Справедливо ли утверждение, что около любой треугольной пирамиды можно описать сферу?
- 4. Можно ли описать сферу около любой четырехугольной пирамиды?

- 5. Какими свойствами должна обладать пирамида, чтобы около нее можно было описать сферу?
- 6. В сферу вписана пирамида, боковое ребро которой перпендикулярно основанию. Как найти центр сферы?

5. (В её основании
должен лежать многоугольник,
около которого можно описать
окружность)

6.Центр сферы – точка пересечения
двух геометрических мест точек
в пространстве. Первое – перпендикуляр,
проведённый к плоскости основания
пирамиды, через центр окружности,
описанной около него.
Второе – плоскость перпендикулярная
данному боковому ребру и проведённая
через его середину)

- 7. При каких условиях можно описать сферу около призмы, в основании которой – трапеция?
- 8. Каким условиям должна удовлетворять призма, чтобы около нее можно было описать сферу?
- 9. Около треугольной призмы описана сфера, центр которой лежит вне призмы. Какой треугольник является основанием призмы?
- 10. Можно ли описать сферу около наклонной призмы?

7. Во-первых, призма должна быть прямой, и, во-вторых, трапеция должна быть равнобедренной, чтобы около неё можно было описать окружность)

8. Призма должна быть прямой, и её основанием должен являться многоугольник, около которого можно описать окружность

9. (Тупоугольный треугольник)

10. нельзя

- 11. При каком условии центр сферы, описанной около прямой треугольной призмы, будет находится на одной из боковых граней призмы?
- 12. Основание пирамиды – равнобедренная трапеция . Ортогональная проекция вершины пирамиды на плоскость основания – точка, расположенная вне трапеции. Можно ли около такой трапеции описать сферу?
- 13. Около правильной пирамиды описана сфера. Как расположен ее центр относительно элементов пирамиды?
- 14. При каком условии центр сферы, описанной около прямой треугольной призмы, лежит: а) внутри призмы; б) вне призмы?

11. В основании лежит прямоугольный треугольник

12. Да, можно. То что ортогональная проекция вершины пирамиды расположена вне её основания, не имеет значения. Важно, что в основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция – многоугольник, около которого можно описать окружность

13. (Центр сферы находится на перпендикуляре, проведенном к плоскости основания через его центр

14. В основании призмы:
а) остроугольный треугольник;
б) тупоугольный треугольник)

- 15. Около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 1 дм, 2 дм и 2 дм, описана сфера. Вычислите радиус сферы.
- 16. В какой усеченный конус можно вписать сферу?
- 17. В усеченный конус вписана сфера. Под каким углом образующая конуса видна из центра сферы?
- 18. Каким свойством должна обладать прямая призма, чтобы в нее можно было вписать сферу?

15. 1,5 дм

16. В усечённый конус, в осевое сечение которого можно вписать окружность. Осевым сечением конуса является равнобедренная трапеция, сумма её оснований должна равняться сумме её боковых сторон. Другими словами, у конуса сумма радиусов оснований должна равняться образующей

17. 90 градусов

18. Во-первых, в основании прямой призмы должен лежать многоугольник, в который можно вписать окружность, и, во-вторых, высота призмы должна равняться диаметру вписанной в основание окружности

- 19. Приведите пример пирамиды, в которую нельзя вписать сферу?
- 20. В основании прямой призмы лежит ромб. Можно ли в эту призму вписать сферу?
- 21. При каком условии в прямую треугольную призму можно вписать сферу?
- 22. При каком условии в правильную четырехугольную усеченную пирамиду можно вписать сферу?

19. Например, четырёху гольная пирамида, в основании которой лежит прямоугольник или параллелограмм)

20. Нет, нельзя, так как около ромба в общем случае нельзя описать окружность)

21. Если высота призмы в два раза больше радиуса окружности, вписанной в основание

22. Если сечением данной пирамиды плоскостью, проходящей через середину стороны основания перпендикулярно ей, является равнобедренная трапеция, в которую можно вписать окружность

- 23. В треугольную усеченную пирамиду вписана сфера. Какая точка пирамиды является центром сферы?
- 24. Можно ли описать сферу около цилиндра (прямого кругового)?
- 25. Можно ли описать сферу около конуса, усеченного конуса (прямых круговых)?
- 26. Во всякий ли цилиндр можно вписать сферу? Какими свойствами должен обладать цилиндр, чтобы в него можно было вписать сферу?
- 27. Во всякий ли конус можно вписать сферу? Как определить положение центра сферы, вписанной в конус?

23. Центр вписанной в данную пирамиду сферы находится на пересечении трёх биссектральных плоскостей углов, образованных боковыми гранями пирамиды с основанием

24. Да, можно

25. Да, можно, в обоих случаях

26. Нет, не во всякий: осевое сечение цилиндра должно быть квадратом

27. Да, во всякий. Центр вписанной сферы находится на пересечении высоты конуса и биссектрисы угла наклона образующей к плоскости основания

- **Вариант 1.**
- *1. Если сфера касается всех граней многогранника, то она называется…*
- а) описанной около многогранника;
- б) вписанной в многогранник;
- в) касательной к многограннику.
- *2. Все вершины многогранника лежат на сфере, такой многогранник называется…*
- а) вписанным в сферу;
- б) описанным около сферы;
- в) касательным к сфере.
- ***3. Шар можно вписать в …***
- а) произвольную призму;
- б) треугольную пирамиду;
- в) треугольную призму.
- ***4. В прямую призму, в основание которой вписана окружность, можно вписать сферу, если…***
- а) высота призмы равна диаметру вписанной окружности;
- б) центр сферы лежит на высоте призмы;
- в) высота призмы равна радиусу вписанной окружности.
- ***5. Во всякий цилиндр можно вписать сферу, если…***
- а) если центр сферы лежит на оси цилиндра;
- б) сфера касается оснований цилиндра:
- в) его осевое сечение-квадрат.

- **Вариант 2.**
- ***<u>1. Если на сфере лежат все вершины многогранника, то она называется…</u>***
- а) описанной около многогранника;
- б) вписанной в многогранник;
- в) касательной к многограннику.
- ***<u>2. Если каждая грань многогранника является касательной плоскостью к сфере, то такой многогранник называется…</u>***
- а) вписанным в сферу;
- б) описанным около сферы;
- в) касательным к сфере.
- ***<u>3. Шар можно описать около …</u>***
- а) любой призмы;
- б) любой правильной пирамиды;
- в) наклонной призмы.
- ***<u>4. В прямую призму, вписана сфера, около призмы еще описана сфера, центры этих сфер…</u>***
- а) лежат на разных диагоналях призмы;
- б) принадлежат высоте призмы и не совпадают;
- в) совпадают.
- ***<u>5. Около любого цилиндр можно описать сферу. Основания цилиндра являются…</u>***
- а) касательными плоскостями к сфере;
- б) большим кругом сферы.:
- в) сечениями сферы..

- **Ключ к тесту.**
- Вариант 1 бабав
- Вариант 2 аббвв