

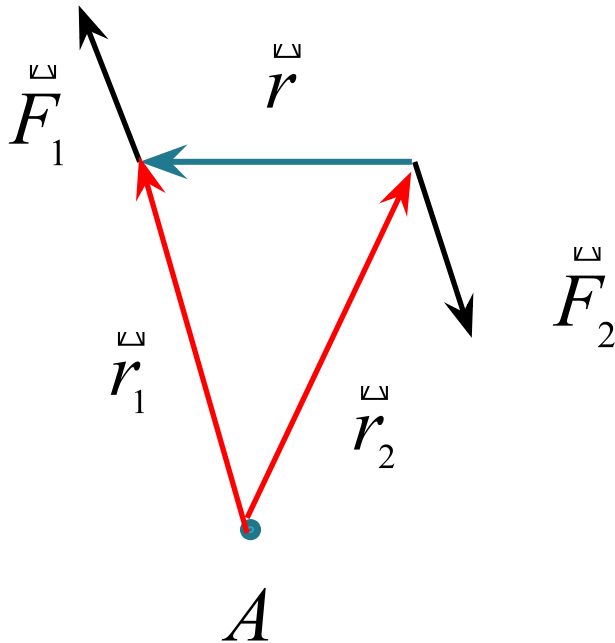
# ПАРА СИЛ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ

*ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.  
СТАТИКА*

ЛЕКЦИЯ 4

# МОМЕНТ ПАРЫ СИЛ

**Пара сил** - две противоположно направленные, равные по модулю силы, не лежащие на одной прямой



Определим момент пары сил относительно точки  $A$

$$\begin{aligned} \vec{M}_A(\vec{F}_1, \vec{F}_2) &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 \end{aligned}$$

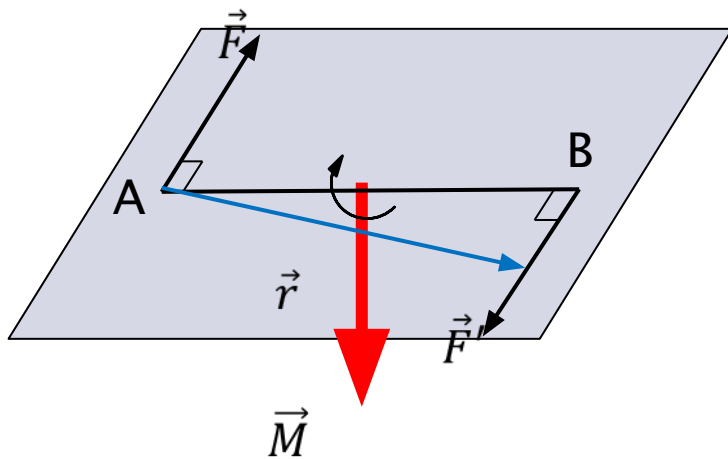
$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}$$

$$\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{r} \times \vec{F}_1$$

**Момент пары** - вектор, равный по модулю произведению модуля одной из сил на плечо пары и направленный перпендикулярно плоскости пары в сторону, откуда вращение видно против часовой стрелки

# МОМЕНТ ПАРЫ СИЛ

**Момент пары** - вектор, равный по модулю произведению модуля одной из сил на плечо пары и направленный перпендикулярно плоскости пары в сторону, откуда вращение видно против часовой стрелки



**Плечо пары** - кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары

$$\vec{M}(F_1, F_2) = r \times F_1$$



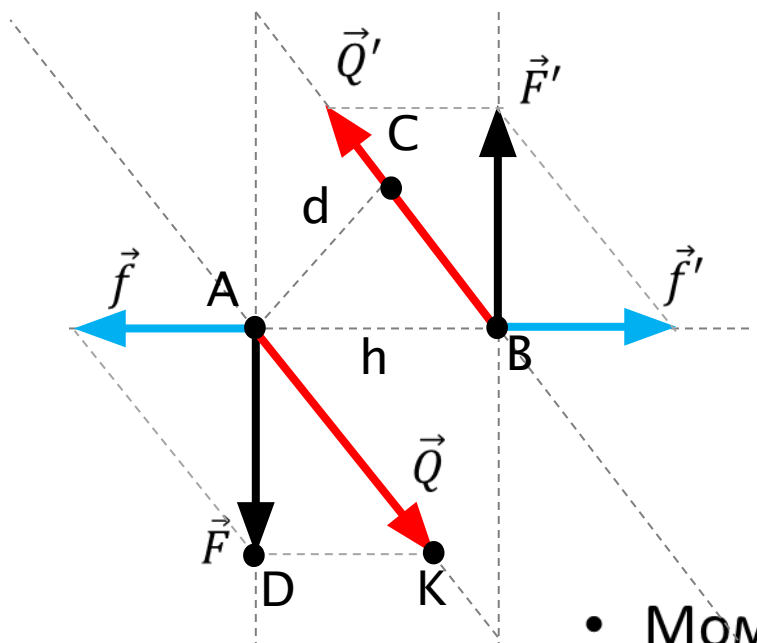
# ТЕОРЕМЫ О ПАРАХ

1. Не нарушая состояния тела, пару сил можно поворачивать в плоскости пары и транспонировать.

Транспонирование – изменение модуля сил пары и плеча пары при неизменном моменте пары

# ТЕОРЕМЫ О ПАРАХ

1. Не нарушая состояния тела, пару сил можно поворачивать в плоскости пары и транспонировать.



Доказательство:

• Пусть пара сил  $(\vec{F}; \vec{F}')$  и пара сил  $(\vec{Q}; \vec{Q}')$  имеют одинаковый момент  $m$ .

•  $(\vec{F}; \vec{F}') \sim (\vec{Q}; \vec{Q}'; \vec{f}; \vec{f}')$

•  $(\vec{f}; \vec{f}') \sim 0$



$(\vec{Q}; \vec{Q}') \sim (\vec{F}; \vec{F}')$

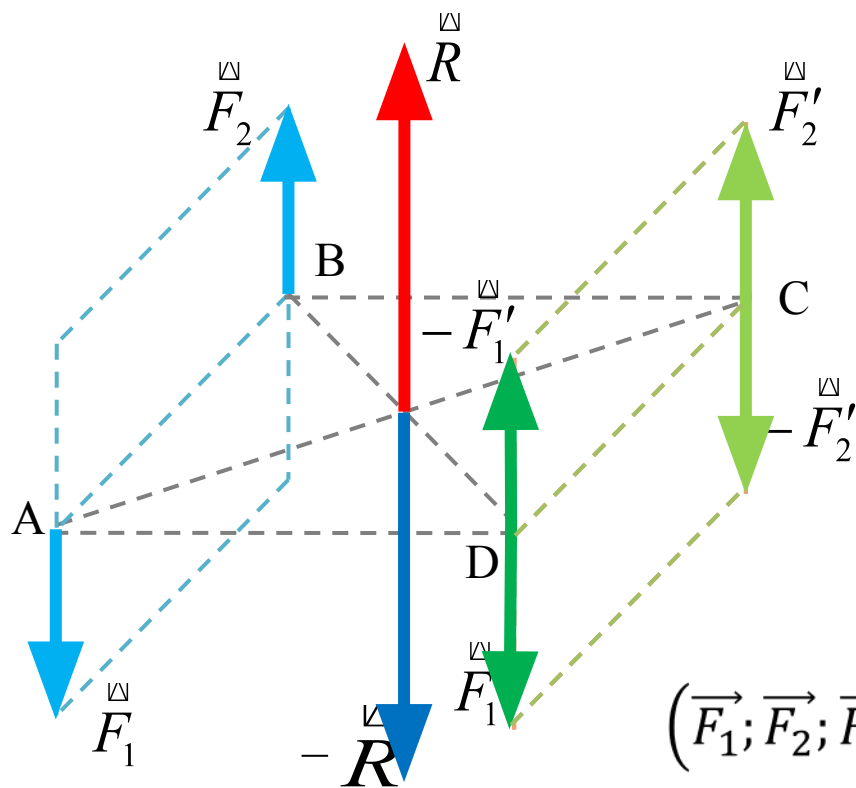
• Момент пары  $(\vec{Q}; \vec{Q}')$  равен  $m' = d \cdot Q$

• Так как  $\triangle ABC \sim \triangle A'D'C'$ , то  $q = \frac{CA \cdot h}{A'D'}$ , где  $AD = F$ ,  $AK = Q$

$$m' = d \cdot Q = \frac{h \cdot F}{Q} \cdot Q = h \cdot F = m$$

# ТЕОРЕМЫ О ПАРАХ

2. Не нарушая состояния тела, пару сил можно переносить в параллельную плоскость.



Доказательство:

- Пусть дана пара сил  $(\vec{F}_1; \vec{F}_2)$
- Добавим уравновешенную систему сил:  
 $(\vec{F}_1; \vec{F}_2) \sim (\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_1'; \vec{F}_2'; -\vec{F}_1'; -\vec{F}_2')$

отр. моменты •

$$\vec{M} \sim (\vec{r}_{SA} - ; \vec{r}_{SA}), \vec{M} \sim (\vec{r}_{SA} - ; \vec{r}_{SA})$$

$$0 \sim (\vec{M} - ; \vec{M})$$

• Тогда

$$(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_1'; \vec{F}_2'; -\vec{F}_1'; -\vec{F}_2') \sim (\vec{R}; -\vec{R}; \vec{F}_1'; \vec{F}_2')$$

$$\sim (\vec{F}_1'; \vec{F}_2')$$

- По построению  $M(\vec{F}_1'; \vec{F}_2') = M(\vec{F}_1; \vec{F}_2)$

# СВОЙСТВА ПАР СИЛ

Не изменяя действия пары сил на тело, пару можно:

- переносить в плоскости ее действия в любое место и поворачивать;
- переносить в параллельную плоскость;
- транспонировать.

Момент пары сил – **свободный вектор!** – полностью определяет ее действие.

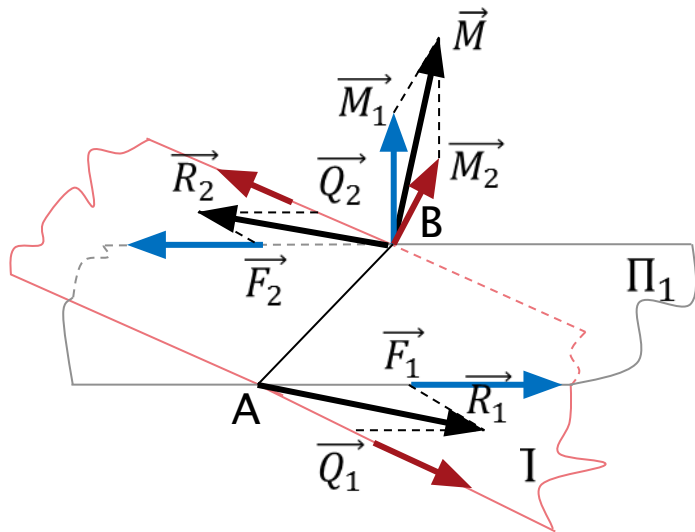
Эквивалентными являются пары сил, вектора моментов которых одинаковы.

# ТЕОРЕМЫ О ПАРАХ

3. Две пары сил эквивалентны одной, момент которой равен сумме моментов исходных пар.

Доказательство:

Приведем пары сил, расположенные в пересекающихся плоскостях к одному плечу АВ на линии пересечения плоскостей.



$$(\vec{F}_1; \vec{Q}_1) \sim \vec{R}_1, (\vec{F}_2; \vec{Q}_2) \sim \vec{R}_2.$$

В результате получаем пару сил  $(\vec{R}_2, \vec{R}_1)$  эквивалентную заменяемым.

Вектор-момент этой пары сил определим через векторное произведение:  $\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{R}_2$

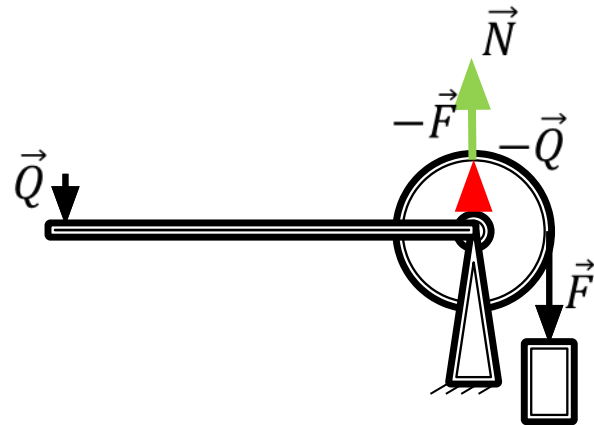
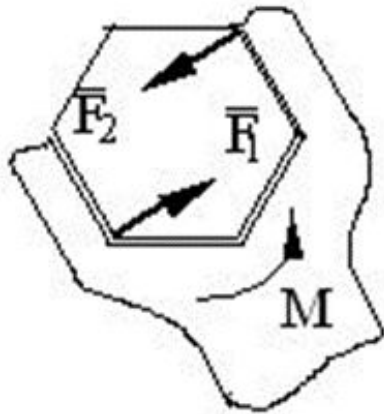
$$\text{При } \vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{Q}_2$$

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{R}_2 = \vec{AB} \times (\vec{F}_2 + \vec{Q}_2) = \vec{AB} \times \vec{F}_2 + \vec{AB} \times \vec{Q}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_1$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_1$$



# ПРИМЕРЫ ПАР СИЛ



$$\vec{N} = -(\vec{Q} + \vec{F})$$

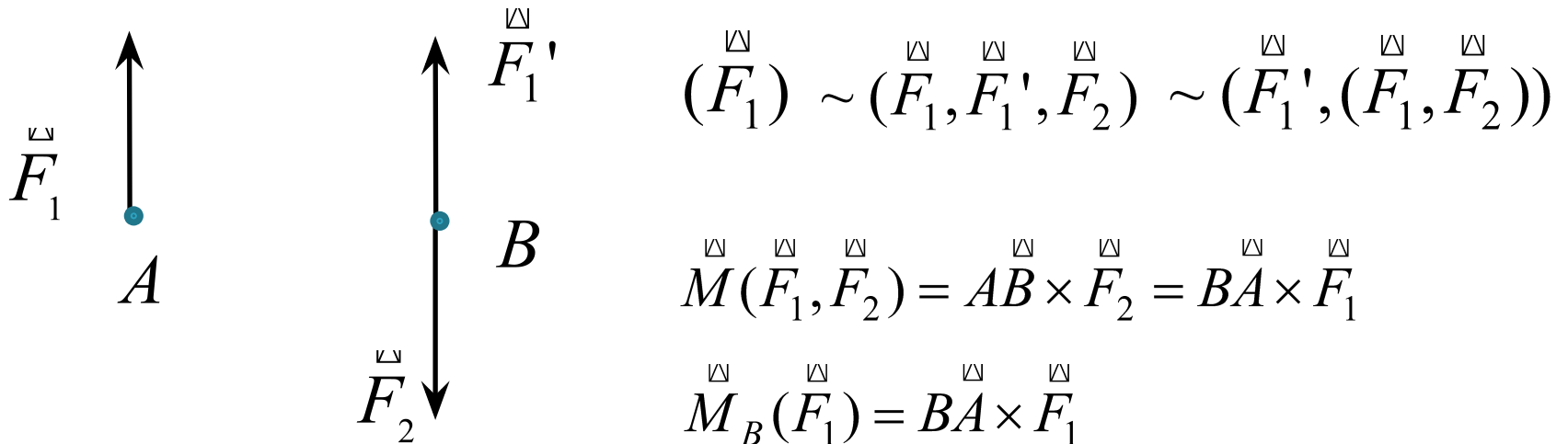
$$\vec{N} = -\vec{Q} - \vec{F}$$

$$[(\vec{Q}, -\vec{Q}), (\vec{F}, -\vec{F})] \sim 0$$

# ЛЕММА О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ

Не нарушая равновесия тела силу можно переносить параллельным переносом, добавляя при этом пару сил, момент которой равен моменту исходной силы относительно новой точки приложения.

Доказательство



# ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ

**Главный вектор** системы сил - вектор, равный геометрической сумме сил системы

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k$$

**Главный момент** системы сил относительно некоторой точки - вектор, равный геометрической сумме моментов сил системы относительно данной точки (центра)

$$M_O(\vec{R}) = M_O(\vec{F}_1) + \dots + M_O(\vec{F}_n) = \sum M_O(\vec{F}_k)$$

# ТЕОРЕМА ПУАНСО (ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ)

Произвольная система сил эквивалентна силе, равной главному вектору системы, и паре сил, момент которой равен главному моменту системы относительно точки приложения силы (центра приведения)

Луи Пуансо́ (1777-1859) — французский математик и механик, академик Парижской Академии наук (1813); пэр Франции (1846), сенатор (1852). Известен своими трудами в области геометрии и механики



**POINROT,**  
(Louis)

*Membre de la Légion d'honneur.*

*Né à Paris, le 9 Janvier 1777, dit en 1846.*

# ТЕОРЕМА ПУАНСО (ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ)

Произвольная система сил эквивалентна силе, равной главному вектору системы, и паре сил, момент которой равен главному моменту системы относительно точки приложения силы (центра приведения)

