«МАТРИЦЫ»

ПЛАН

1. ПОНЯТИЕ И ВИДЫ МАТРИЦ
2. СТРОКИ, СТОЛБЦЫ, ЭЛЕМЕНТЫ И РАЗМЕР МАТРИЦ
3. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

МАТРИЦЕЙ называется прямоугольная или квадратная таблица, заполненная числами.

Числа, заполняющие матрицу, называются ЭЛЕМЕНТАМИ матрицы.

ВИДЫ МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}$$

Прямоугольная матрица

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 22 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Матрица-столбец

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица-строка

ПРИНЦИП НУМЕРАЦИИ СТРОК И СТОЛБЦОВ

СТРОКИ НУМЕРУЮТСЯ СВЕРХУ ВНИЗ, НАЧИНАЯ С № 1.

СТОЛБЦЫ НУМЕРУЮТСЯ СЛЕВА НАПРАВО, НАЧИНАЯ С № 1.

СТРОКА И СТОЛБЕЦ

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}$$

3-строка

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}$$

2-столбец

РАЗМЕР МАТРИЦЫ

МАТРИЦА, ИМЕЮЩАЯ m СТРОК И n СТОЛБЦОВ, НАЗЫВАЕТСЯ МАТРИЦЕЙ РАЗМЕРА m НА n.

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}$$

Матрица размера 3 на 2

(3 строки, 2 столбца)

ОБЩИЙ ВИД МАТРИЦЫ РАЗМЕРА *M* НА *N*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ЭЛЕМЕНТ МАТРИЦЫ

Элемент

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}$$

a_{31} (а-три-один) $= -30$

(3-я строка, 1-й столбец)

ДИАГОНАЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Главная диагональ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Побочная диагональ

ТРЕУГОЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Верхняя треугольная матрица (под главной диагональю стоят нули)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нижняя треугольная матрица (над главной диагональю стоят нули)

ЛЮБУЮ МАТРИЦУ МОЖНО УМНОЖИТЬ НА ЧИСЛО

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 10 \\ 20 & 10 & 0 \\ -25 & 30 & 5 \end{pmatrix}$$

МАТРИЦЫ ОДИНАКОВОГО РАЗМЕРА МОЖНО СКЛАДЫВАТЬ И ВЫЧИТАТЬ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 8 & -5 & 5 \\ 7 & 3 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \pm 8 & -1 \pm (-5) & 2 \pm 5 \\ 4 \pm 7 & 2 \pm 3 & 0 \pm 14 \end{pmatrix}$$

ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}$$

Исходная матрица (размер 3 на 2)

$$A^T = \begin{pmatrix} 12 & -17 & -30 \\ 4 & 29 & -36 \end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица (размер 2 на 3)

УМНОЖЕНИЕ СТРОКИ НА СТОЛБЕЦ (СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ)

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 + (-5) \cdot 0 + 3 \cdot (-4) = 2$$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА СТОЛБЕЦ

КАЖДАЯ СТРОКА МАТРИЦЫ СКАЛЯРНО УМНОЖАЕТСЯ НА СТОЛБЕЦ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 8+(-1)\cdot 7+2\cdot 2 \\ 4\cdot 8+2\cdot 7+0\cdot 2 \\ (-5)\cdot 8+6\cdot 7+1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 46 \\ 4 \end{pmatrix}$$

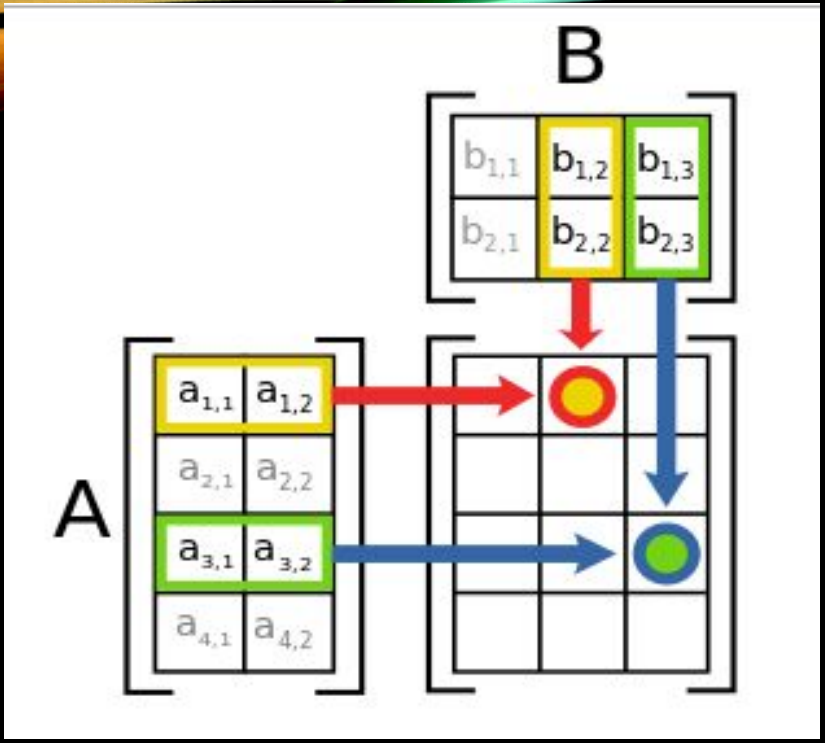
УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Произведением матриц A и B называется матрица C, элементы которой c_{ij} равны скалярным произведениям векторов-строк $\bar{a}_i$ матрицы A на векторы-столбцы $\bar{b}_j$ матрицы B:

$$C = AB = ||c_{ij}||, \quad c_{ij} = \bar{a}_i \bar{b}_j = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj},$$

$$i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Произведение матриц A и B имеет смысл, если число столбцов в A равно числу строк в B.



Если матрицы *A* и *B* квадратные размером *n* x *n*, то имеет смысл как произведение матриц *AB*, так и произведение матриц *BA*, причем размер этих матриц такой же, как и у исходных сомножителей. При этом в общем случае перемножения матриц правило перестановочности не соблюдается, т.е. $AB \neq BA$.

ПРИМЕР УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 8 + (-1)\cdot 7 + 2\cdot 2 & 3\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot(-3) \\ 4\cdot 8 + 2\cdot 7 + 0\cdot 2 & 4\cdot 1 + 2\cdot 2 + 0\cdot(-3) \\ (-5)\cdot 8 + 6\cdot 7 + 1\cdot 2 & (-5)\cdot 1 + 6\cdot 2 + 1\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -5 \\ 46 & 8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

УМНОЖЕНИЕ СТОЛБЦА НА СТРОКУ

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 & 7 \cdot (-5) & 7 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot (-5) & 0 \cdot 3 \\ (-4) \cdot 2 & (-4) \cdot (-5) & (-4) \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & -35 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 20 & -12 \end{pmatrix}$$

ТИПЫ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

(размер 3 на 3)

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нулевая матрица

(размер 3 на 3)

Свойство единичной матрицы: $A \bullet E = E \bullet A = A$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

ПЛАН

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ
2. МИНОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ
3. СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ
4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

ОБОЗНАЧЕНИЯ

КВАДРАТНАЯ МАТРИЦА n-го ПОРЯДКА

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ МАТРИЦЫ

$$\Delta = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

1. Определитель единичной матрицы равен единице:

$$\det(E) = 1$$

2. Определитель матрицы с двумя равными строками (столбцами) равен нулю.

3. Определитель матрицы с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

4. Определитель матрицы, содержащий нулевую строку (столбец), равен нулю.

5. Определитель матрицы равен нулю если две (или несколько) строк (столбцев) матрицы линейно зависимы.

6. При транспонировании значение определителя матрицы не меняется:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

7. Определитель обратной матрицы:

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

9. Определитель матрицы не изменится, если к какой-то его строке (столбцу) прибавить линейную комбинации других строк (столбцов).

10. Если поменять местами две строки (столбца) матрицы, то определитель матрицы поменяет знак.

11. Общий множитель в строке (столбце) можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k\cdot a_{i1} & k\cdot a_{i2} & \dots & k\cdot a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

12. Если квадратная матрица n-того порядка умножается на некоторое ненулевое число, то определитель полученной матрицы равен произведению определителя исходной матрицы на это число в n-той степени:

$$\mathrm{B} = k\cdot\mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathrm{B}) = k^n\cdot\det(\mathrm{A})$$

где A матрица $n\times n$, k - число.

13. Если каждый элемент в какой-то строке определителя равен сумме двух слагаемых, то исходный определитель равен сумме двух определителей, в которых вместо этой строки стоят первые и вторые слагаемые соответственно, а остальные строки совпадают с исходным определителем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

14. Определитель верхней (нижней) треугольной матрицы равен произведению его диагональных элементов.

15. Определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦ 1-ГО И 2-ГО ПОРЯДКОВ

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ 1-го ПОРЯДКА

$$\Delta = \left| a_{11} \right| = a_{11}$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ 2-го ПОРЯДКА

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

МНЕМОНИЧЕСКОЕ ПРАВИЛО

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

2-го ПОРЯДКА РАВЕН

ПРОИЗВЕДЕНИЮ ЭЛЕМЕНТОВ

ГЛАВНОЙ ДИАГОНАЛИ

МИНУС

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ

ПОБОЧНОЙ ДИАГОНАЛИ

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ «ТРИ НА ТРИ»

1-Й СПОСОБ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

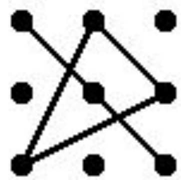
Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 9 + (-7)\cdot(-2)\cdot 6 + 4\cdot 8\cdot 3 - (-7)\cdot 0\cdot 3 - 1\cdot 8\cdot 6 - 4\cdot(-2)\cdot 9 =$$

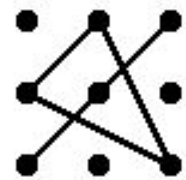
$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

Правило треугольника для вычисления определителя матрицы 3-тего порядка

Правило: Для матрицы 3×3 значение определителя равно сумме произведений элементов главной диагонали и произведений элементов лежащих на треугольниках с гранью параллельной главной диагонали, от которой вычитается произведение элементов побочной диагонали и произведение элементов лежащих на треугольниках с гранью параллельной побочной диагонали.



$+$



$-$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ «ТРИ НА ТРИ» 2-Й СПОСОБ

СПОСОБ САРРЮСА ИЛИ СПОСОБ «ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОЛОСОК»

Суть состоит в том, что справа от определителя приписывают первый и второй столбец и аккуратно карандашом проводят линии:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

Со знаком минус Со знаком плюс

Множители, находящиеся на «красных» диагоналях входят в формулу со знаком «плюс».
Множители, находящиеся на «синих» диагоналях входят в формулу со знаком минус:

<u>Пример:</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 9 + (-2) \cdot 6 \cdot (-7) + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 0 \cdot (-7) - 1 \cdot 6 \cdot 8 - (-2) \cdot 4 \cdot 9 =$$

$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

МИНОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

МИНОР ЭЛЕМЕНТА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

МИНОРОМ ЭЛЕМЕНТА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ НАЗЫВАЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ, ПОЛУЧЕННЫЙ ИЗ ИСХОДНОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ **ПРИ ПОМОЩИ ВЫЧЕРКИВАНИЯ СТРОКИ И СТОЛБЦА**, В КОТОРЫХ СТОИТ ЭТОТ ЭЛЕМЕНТ

ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ МИНОРА

МИНОР M_{21} ЭЛЕМЕНТА a_{21} ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ТАК:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} - & -1 & 2 \\ - & - & - \\ - & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 18 = -19$$

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ

АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ДОПОЛНЕНИЕМ A_{ij} ЭЛЕМЕНТА a_{ij} ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ НАЗЫВАЕТСЯ ЧИСЛО

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

ГДЕ M_{ij} – МИНОР ЭЛЕМЕНТА a_{ij}

СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ЛЮБОЙ СТРОКЕ (ЛЮБОМУ СТОЛБЦУ)

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

РАВЕН СУММЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

ЭЛЕМЕНТОВ ЛЮБОЙ СТРОКИ

(ЛЮБОГО СТОЛБЦА) НА ИХ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

РАЗЛОЖИМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПО 2-й СТРОКЕ

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} - & -1 & 2 \\ - & - & - \\ - & 9 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & - & 2 \\ - & - & - \\ 7 & - & 1 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= (-1) \cdot (-1-18) \cdot 4 + 1 \cdot (3-14) \cdot 2 = 54$$

МЕТОД ТРЕУГОЛЬНИКОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИ-ТЕЛЕЙ МАТРИЦ 3-ГО ПОРЯДКА

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & - & - \\ - & a_{22} & - \\ - & - & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - & a_{12} & - \\ - & - & a_{23} \\ a_{31} & - & - \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - & - & a_{13} \\ a_{21} & - & - \\ - & a_{32} & - \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} - & - & a_{13} \\ - & a_{22} & - \\ a_{31} & - & - \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} - & a_{12} & - \\ a_{21} & - & - \\ - & - & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & - & - \\ - & - & a_{23} \\ - & a_{32} & - \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) \cdot (-3) + 5 \cdot (-2) \cdot 4 -$$

$$- 4 \cdot 1 \cdot (-3) - 5 \cdot 3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-3) \cdot 2 =$$

$$= 2 + 27 - 40 + 12 - 15 - 12 = -26$$

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА

ОБЩИЙ ВИД СИСТЕМЫ *N* ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С *N* НЕИЗВЕСТНЫМИ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \mathrm{K} + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \mathrm{K} + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \quad \quad . \;\; . \;\; . \\ a_{n1}x_1 + a_{m2}x_2 + \mathrm{K} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

МАТРИЧНЫЙ ВИД СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ГЛАВНЫЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КРАМЕРА НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ ИЗ 3-Х УРАВНЕНИЙ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛ КРАМЕРА

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

ФОРМУЛЫ КРАМЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 13, \\ 4x + 3y - z = 7, \\ x - 2y + 5z = 15 \end{cases}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНОГО И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 24 + 1 - 9 - 4 + 20 = 14 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & -1 \\ 15 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 195 - 42 + 15 - 135 - 26 + 35 = 42,$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & 15 & 5 \end{vmatrix} = 70 + 130 - 13 - 21 + 30 - 260 = -14,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 15 \end{vmatrix} = 90 - 140 - 7 - 39 + 28 + 60 = 28.$$

ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ ОТВЕТ

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3,$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-14}{14} = -1,$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2.$$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** по отношению к квадратной матрице А, если при умножении этой матрицы на обратную, как справа, так и слева получается единичная матрица:

$A^{-1} * A = A * A^{-1} = E$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; при этом обратная матрица также является квадратной того же порядка. Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). Обратная матрица существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная $|A^{-1}| \neq 0$.

Свойства обратной матрицы.

Понятие обратной матрицы, равенство $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left\| A_{ij} \right\|^T$, определения операций над матрицами и свойства определителя матрицы позволяют обосновать следующие **свойства обратной матрицы**:

1. Для невырожденной квадратной матрицы *A* справедливо равенство $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.
2. Для обратимой матрицы *A* выполняется равенство $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
3. Для любого отличного от нуля числа *k* справедливо равенство $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$.
4. Для невырожденных квадратных матриц *A* и *B* одного порядка выполняется равенство $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A - вырожденная и не имеет обратной матрицы.
2. Находим матрицу A^T - транспонированную к матрице A.
3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы A_{ij} $(i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n)$ и составляем из них матрицу, заменяя каждый элемент матрицы A^T его алгебраическим дополнением. Такая матрица называется присоединенной (или союзной), обозначим ее $\tilde{A}^T$.
4. Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}^T$
5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите обратную матрицу.

Вычислим определитель матрицы A, разложив его по элементам третьего столбца:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot((-2)\cdot 3 - 1\cdot 2) = 16$$

Определитель отличен от нуля, так что матрица A обратима.

Найдем матрицу из алгебраических дополнений:

$$\|A_{ij}\| = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-0\cdot 3=0$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=(-1)\cdot((-2)\cdot 0-0\cdot 2)=0$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=(-2)\cdot 3-1\cdot 2=-8$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & -2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=(-1)\cdot(4\cdot 0-(-2)\cdot 3)=-6$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=3\cdot 0-(-2)\cdot 2=4$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=(-1)\cdot(3\cdot 3-4\cdot 2)=-1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=4\cdot 0-(-2)\cdot 1=2$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=(-1)\cdot(3\cdot 0-(-2)\cdot(-2))=4$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 1-4\cdot(-2)=11$$

Поэтому

$$\|A_{i\,j}\|=\begin{pmatrix}0 & 0 & -8\\ -6 & 4 & -1\\ 2 & 4 & 11\end{pmatrix}$$

Выполним транспонирование матрицы из алгебраических дополнений:

$$\left\|A_{ij}\right\|^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ -6 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ -8 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

Теперь находим обратную матрицу как $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left\|A_{ij}\right\|^T$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left\|A_{ij}\right\|^T = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ -8 & -1 & 11 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \cdot 0 & \frac{1}{16} \cdot (-6) & \frac{1}{16} \cdot 2 \\ \frac{1}{16} \cdot 0 & \frac{1}{16} \cdot 4 & \frac{1}{16} \cdot 4 \\ \frac{1}{16} \cdot (-8) & \frac{1}{16} \cdot (-1) & \frac{1}{16} \cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$$

Проверяем полученный результат:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ -2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{16} & \frac{11}{16}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 0+4\cdot 0+(-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 3\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)+4\cdot\frac{1}{4}+(-2)\cdot\left(-\frac{1}{16}\right) & 3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{4}+(-2)\cdot\frac{11}{16}\\ (-2)\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & (-2)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)+1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\left(-\frac{1}{16}\right) & (-2)\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{11}{16}\\ 2\cdot 0+3\cdot 0+0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)+3\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\left(-\frac{1}{16}\right) & 2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{11}{16}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{16} & \frac{11}{16}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ -2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot 3+\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot(-2)+\frac{1}{8}\cdot 2 & 0\cdot 4+\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot 1+\frac{1}{8}\cdot 3 & 0\cdot(-2)+\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot 0+\frac{1}{8}\cdot 0\\ 0\cdot 3+\frac{1}{4}\cdot(-2)+\frac{1}{4}\cdot 2 & 0\cdot 4+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 3 & 0\cdot(-2)+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 0\\ \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3+\left(-\frac{1}{16}\right)\cdot(-2)+\frac{11}{16}\cdot 2 & \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4+\left(-\frac{1}{16}\right)\cdot 1+\frac{11}{16}\cdot 3 & \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2)+\left(-\frac{1}{16}\right)\cdot 0+\frac{11}{16}\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$