Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный Университет (Сибстрин)

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. КИНЕМАТИКА

ЛЕКЦИЯ 3.

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Кафедра теоретической механики

План лекции

Введение.
Закон плоского движения.
Скорости точек тела.
Ускорения точек тела.
Кинематический расчет плоского механизма.
Заключение.

На прошлых лекциях

Мы уже изучили:

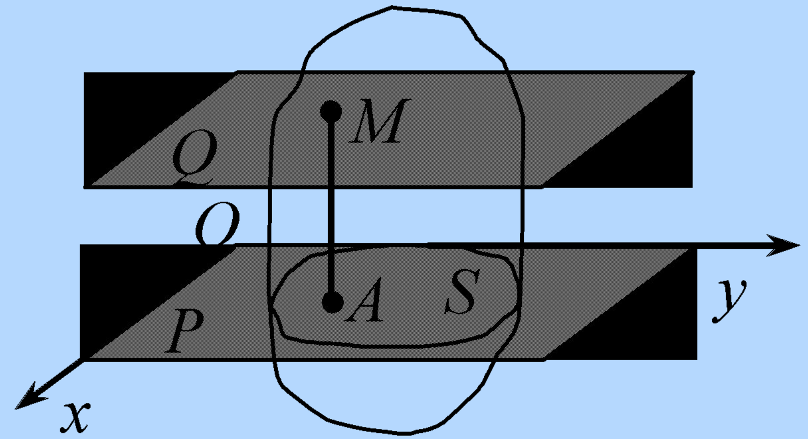
-**Кинематику точки**

-**Поступательное движение твердого тела**

-**Вращательное движение твердого тела**

Тема сегодняшней лекции:

Плоское движение твердого тела



Определение. Плоским называется такое движение твердого тела, при котором все его точки M(t) движутся в плоскостях Q, параллельных некоторой неподвижной плоскости P.

Цель лекции

Изучить плоское движение твердого тела

Введение

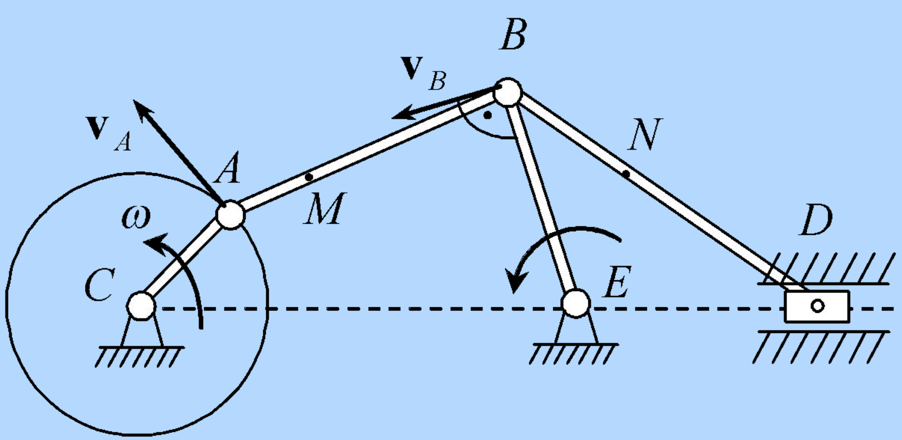
Примеры:

-Вращательное движение (плоскость **P** – перпендикулярна оси вращения)

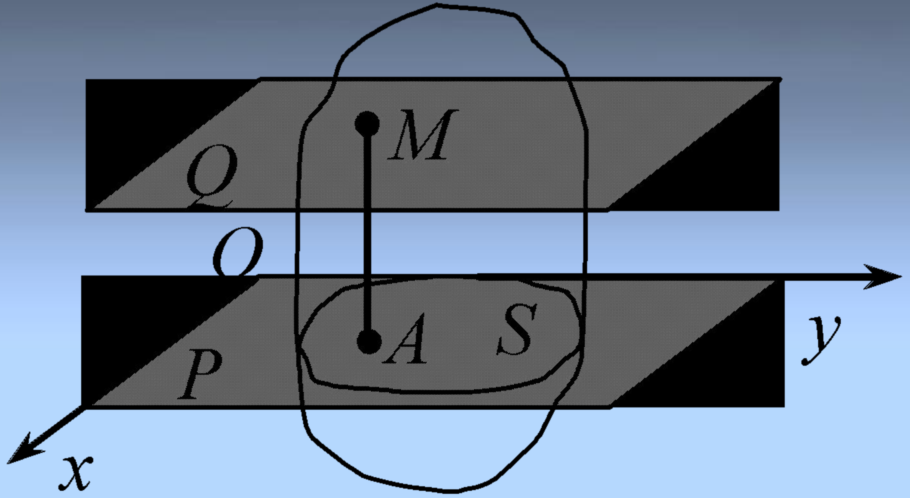
-Движение самолета на крейсерском режиме (плоскость **P** - перпендикулярна размаху крыльев)

-Движение колес автомобиля по прямой дороге (плоскость **P** – вдоль кузова автомобиля)

-Движение плоских механизмов:



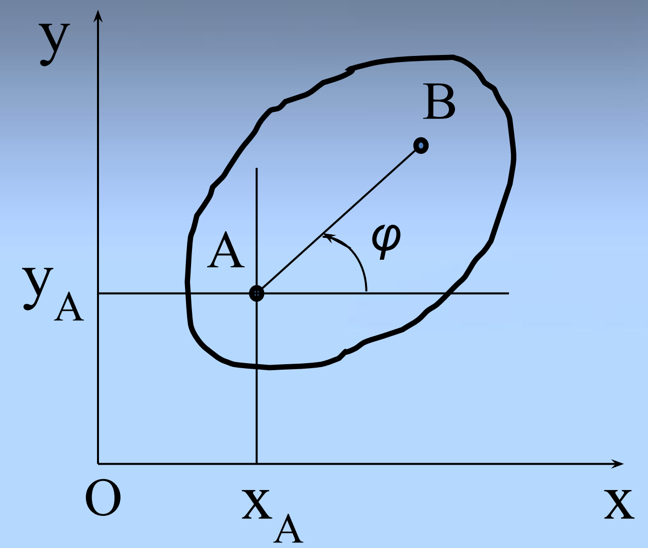
Введение



Утверждение. Все точки прямой AM, перпендикулярной P, движутся одинаково.
Доказательство. Т.к. тело твердое, то AM=const;
Т.к. P параллельно Q, то отрезок AM остается перпендикулярным P . Значит его движение поступательно. Следовательно все его точки движутся одинаково.
Вывод: Задача сводится к изучению движения сечения S в плоскости P.

Закон плоского движения твердого тела

Движение плоской фигуры S относительно системы Oxy полностью определится движением отрезка AB



$x_A(t), y_A(t)$ - **определяют движение полюса A.**

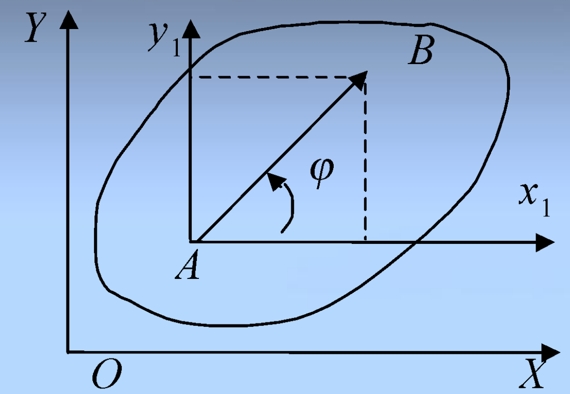
$\varphi(t)$ - **определяет вращение AB вокруг полюса A.**

$$x_A = x_A(t), y_A = y_A(t), \varphi = \varphi(t)$$

- **закон плоского движения твердого тела**

Закон плоского движения твердого тела

Интерпретация. **Введем вспомогательную систему:**



Ax_1y_1; Ax_1 – *параллельна* Ox,

Ay_1 – *параллельна* Oy;

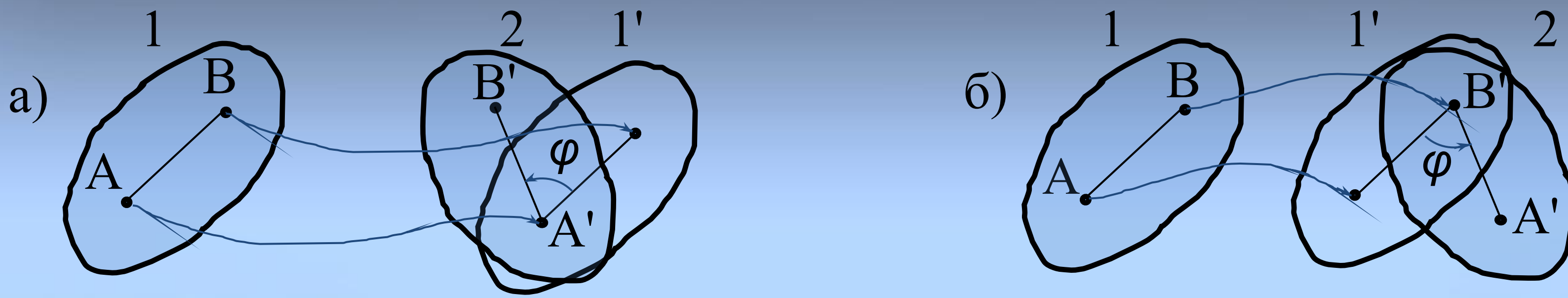
В системе Ax_1y_1 – *тело совершает вращательное движение. Система* Ax_1y_1 *движется относительно* Oxy *поступательно* $\Rightarrow$

Плоское движение – есть сумма поступательного движения вместе с полюсом А и вращательного движения относительно полюса А

$x_A(t),\ y_A(t)$ – *задает поступательное движение*

$\varphi(t)$ – *задает вращательное движение*

Интерпретация



Перевод сечения из положения 1 в положение 2 можно рассматривать как суперпозицию двух движений: поступательного из 1 в 1' и вращательного из 1' в 2 вокруг точки А'.
В качестве полюса можно выбрать любую точку. На рис. б) в качестве полюса выбрана точка В.

Внимание: Длина пути при поступательном перемещении изменилась, но угол поворота остался прежним!

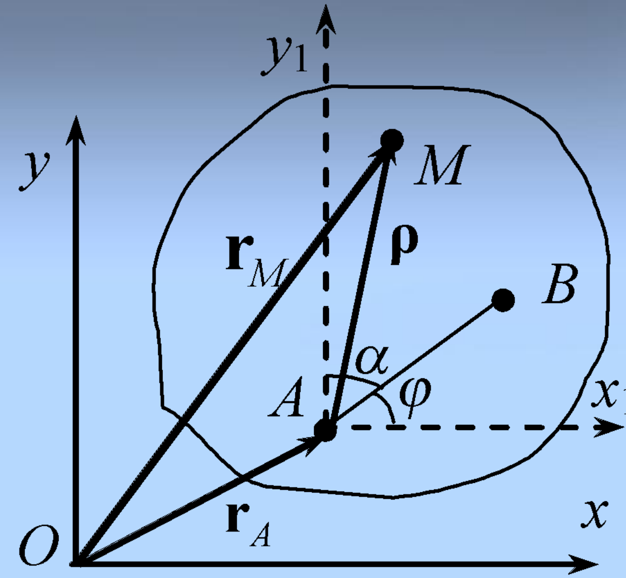
Т.е. поступательная часть от выбора полюса зависит, а вращательная часть – не зависит!

Закон движения и траектории точек тела

$$\vec{r}_M(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{\rho}(t)$$

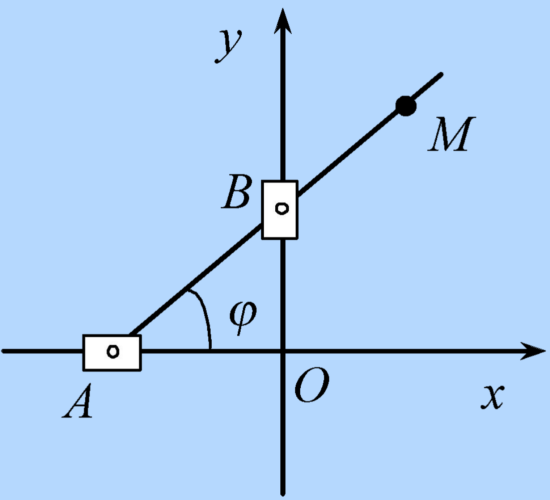
$$x_M(t) = x_A(t) + \rho(t)\cos(\alpha + \varphi(t))$$

$$y_M(t) = y_A(t) + \rho(t)\sin(\alpha + \varphi(t))$$



Пример (движение эллипсографа)

$$AB = l,\ AM = b;$$



Определить закон движения

и траекторию точки M

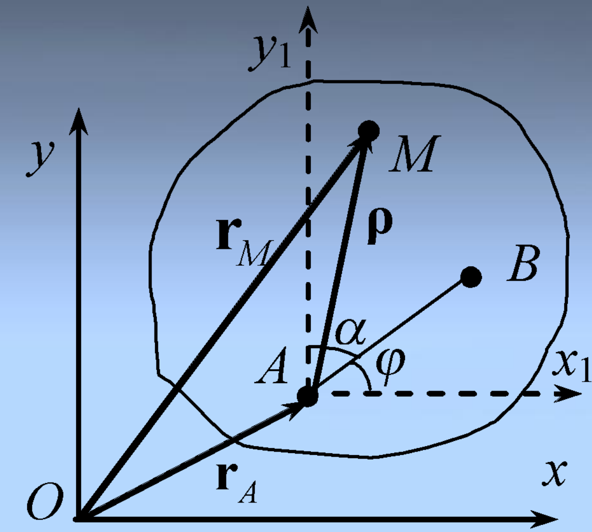
$$x_M(t) = (b-l)\cos\varphi(t)$$

$$y_M(t) = b\sin\varphi(t) \text{ – закон движения}$$

$$\frac{x_M^2}{(b-l)^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1 \text{ – эллипс}$$

Скорости точек тела

$$\vec{r}_M(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{\rho}(t)$$



Дифференцируя, получим:

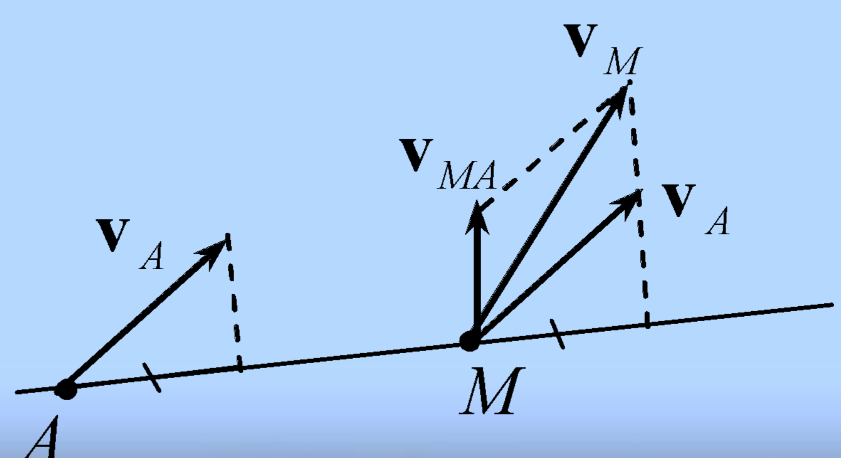
$$\vec{\mathbf{v}}_M = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\mathbf{v}}_{MA}$$

$\vec{\mathbf{v}}_A$ – *скорость полюса*

$\vec{\mathbf{v}}_{MA} = \dfrac{d\vec{\rho}}{dt}$ – *скорость вращения вокруг полюса*

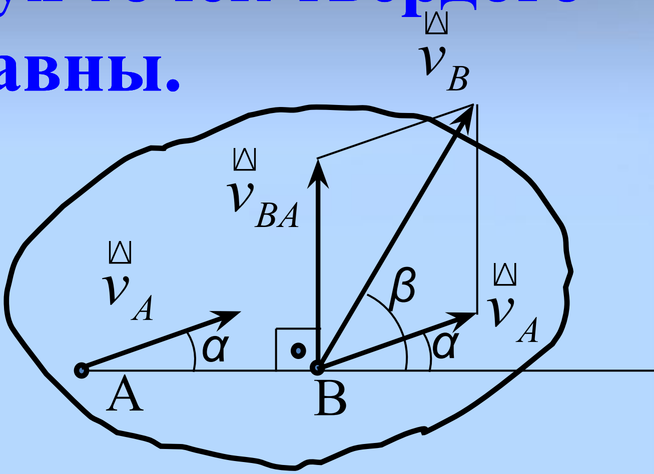
$(\vec{\mathbf{v}}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ – *скорость* M *в системе* Ax_1y_1).

$$\mathrm{v}_{\mathrm{MA}} = \omega \cdot AM$$



Следствия формулы для скоростей точек

Следствие 1. **Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, их соединяющую, равны.**

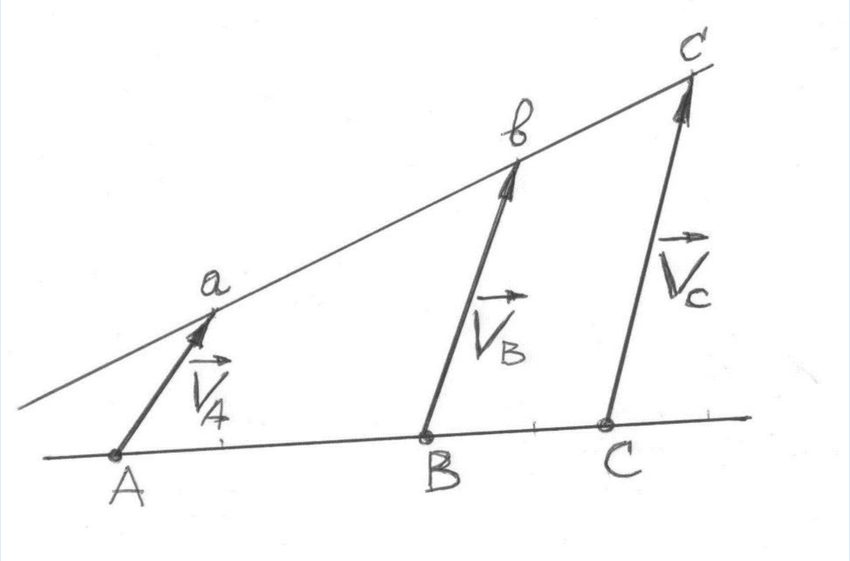


Доказательство.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \Rightarrow$$

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha$$

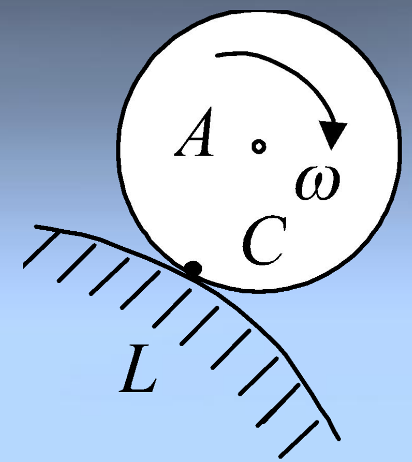
Следствие 2. **Если точки A,B,C лежат на одной прямой, то и концы векторов** $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C$ **лежат на одной прямой, причем** $ab/bc = AB/BC$



Мгновенный центр скоростей (МЦС)

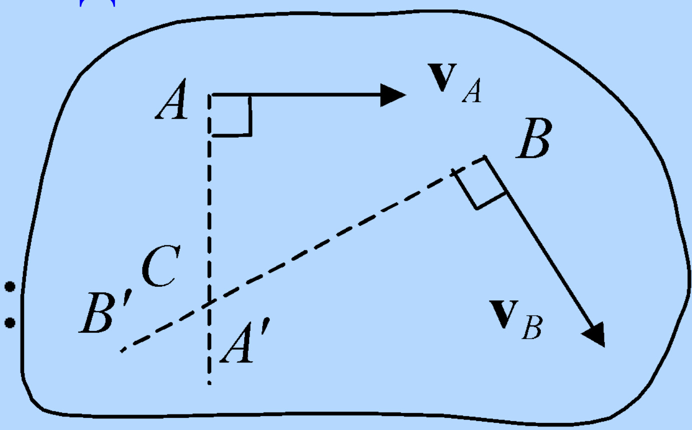
МЦС – это точка, скорость которой равна нулю в данный момент времени.

Пример. Катящийся без проскальзы-вания диск. МЦС-точка С.



Утверждение. **Если угловая скорость не равна нулю для данного t, то МЦС существует и единственен.**

Доказательство.



Т.к. $\omega \neq 0$ то $\exists$ A и B, $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$.

Если $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ *не параллельны*:

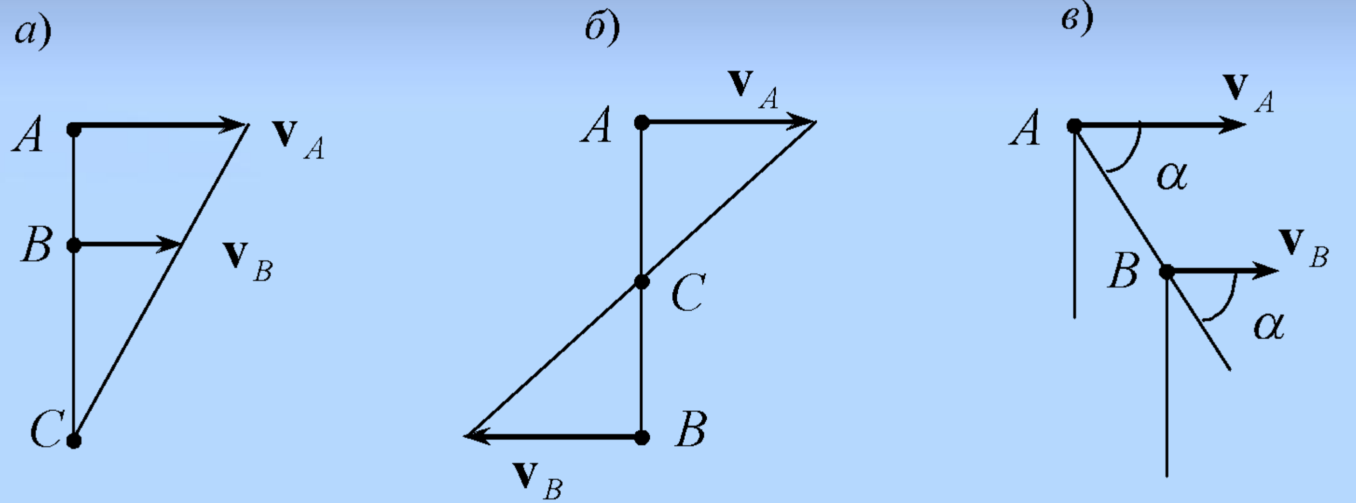
$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{AC}; \quad \vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC}$$

Если $\vec{v}_C = 0$ *то* $\vec{v}_A \perp AC, \ \vec{v}_B \perp BC \Rightarrow$

C – найдено.

Мгновенный центр скоростей (МЦС)

Если $\vec{v}_A$ *и* $\vec{v}_B$ *параллельны* :



Если $\omega \neq 0$ *то случай в) невозможен*

(по теореме о проекциях)

Если $\omega = 0$ *то для всех* $A, B : \vec{v}_A = \vec{v}_B$

и МЦС – не существует

Свойства МЦС.

Пусть Р- МЦС. Выбирая Р за полюс, получим:

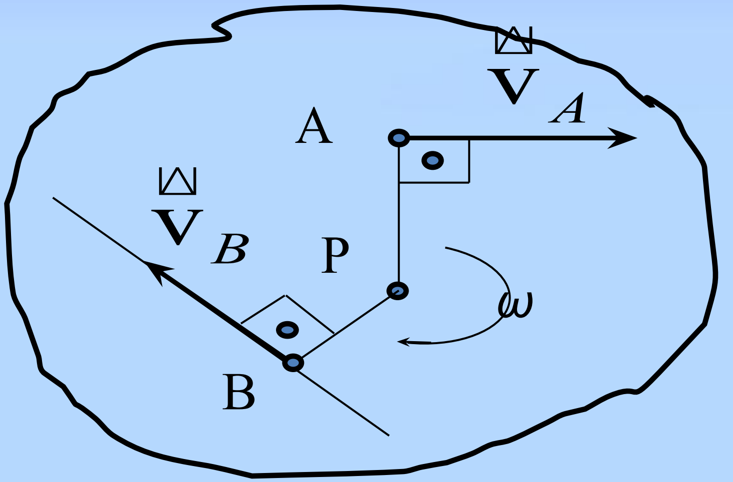
$$v_A = \omega \cdot PA;\ v_B = \omega \cdot PB;$$

$$\vec{v}_A \perp PA;\ \vec{v}_B \perp PB$$

$$\text{Или}:\ \omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_C}{CP} = \ldots$$

$\vec{v}_B \perp PB$

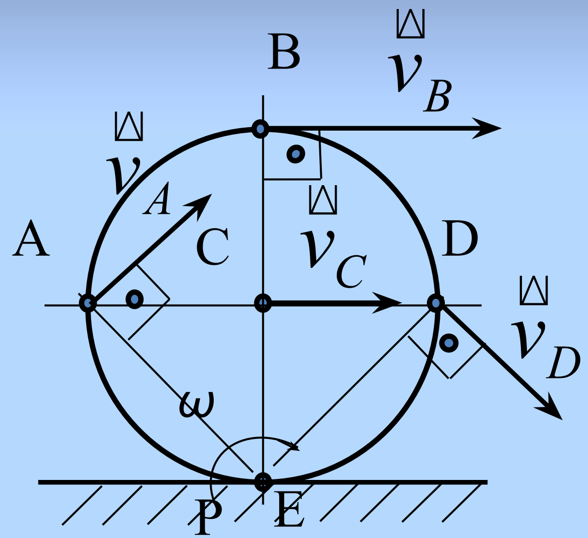
Причем $\vec{v}_C \perp PC$

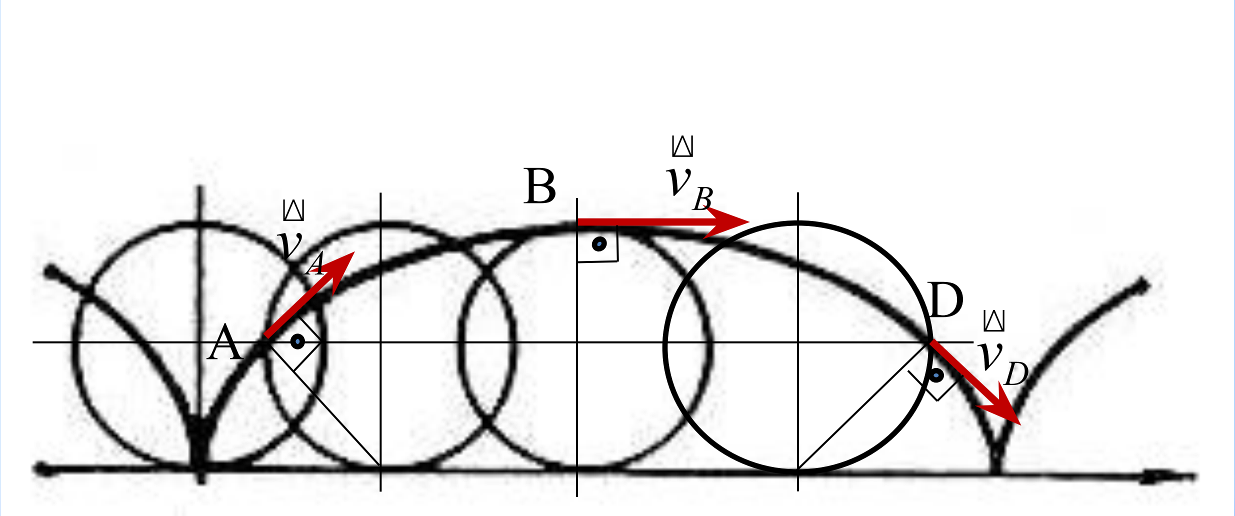


Вывод. Если МЦС (точку Р) взять за полюс, то плоское движение для данного t представляет собой чистое вращение вокруг точки Р

МЦУ(пример)

Пример. Колесо катится без проскальзывания по прямой дороге.



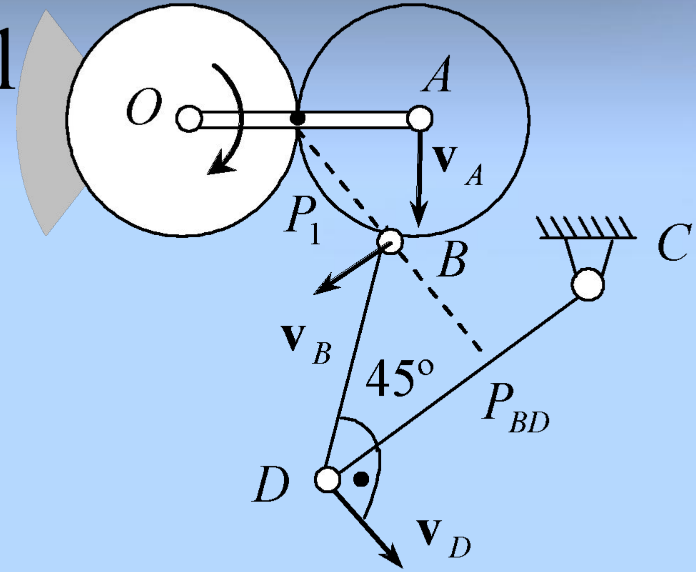


Пример (расчет скоростей плоского механизма)

Дано: ω_{OA}, $r_1 = r_2 = r$, $BD = CD = l$

Определить $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_D, \omega_{BD}; \omega_{CD}$

Решение.



$$OA: \quad v_A = OA\,\omega_{OA};$$

$$AB: \quad P_1 \text{ - МЦС}_{AB} \Rightarrow \vec{v}_B \perp \vec{BP}_1;$$

$$\omega_{AB} = v_A/AP_1 = v_B/BP_1 \Rightarrow v_B = 2\sqrt{2}r\omega_{OA}$$

$$BD: \quad P_{BD} - \text{МЦС}_{BD} \Rightarrow \omega_{BD} = v_B / BP_{BD} = v_D / DP_{BD} \Rightarrow$$

$$\omega_{BD} = 4r\omega_{OA}/l, \; v_D = 2\sqrt{2}r\omega_{OA}$$

$$CD: \quad \vec{v}_D \perp \vec{CD}, \omega_{CD} = v_D / CD = 2\sqrt{2}r\omega_{OA}/l$$

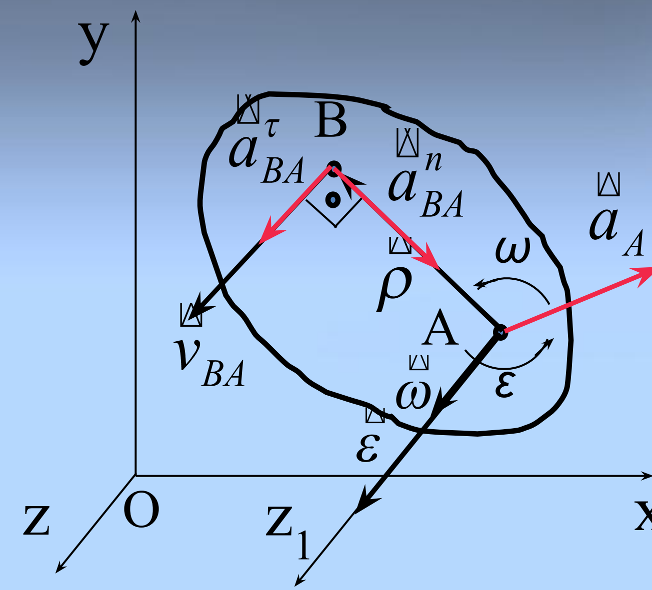
Ускорения точек тела.

Имеем равенство: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

Продифференцируем его:

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} =$$

$$= \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$



$$\vec{a}^{\tau}_{BA} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}; \quad \vec{a}^{n}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA}$$

Ускорение точки B равно сумме ускорения полюса A и ускорения вращения точки B вокруг полюса A

Следствие формулы для ускорений точек

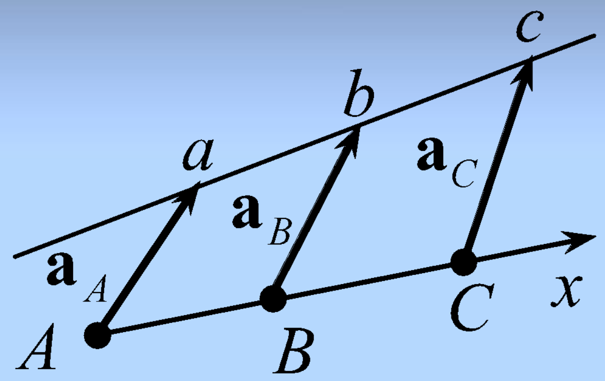


Рис. 13.19

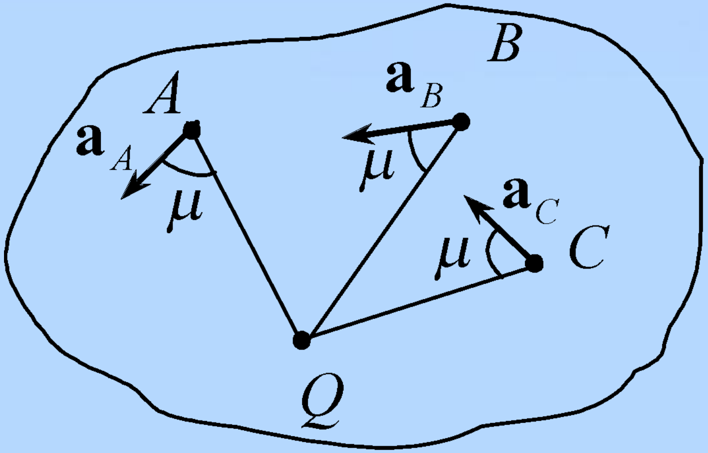
Следствие . **Если точки A,B,C лежат на одной прямой, то и концы векторов** $\vec{a}_A, \vec{a}_B, \vec{a}_C$ **лежат на одной прямой, причем** $ab/bc = AB/BC$

Мгновенный центр ускорений (МЦУ)

МЦУ- это точка Q , ускорение которой в данный момент времени t равно нулю.

Утверждение. Для непоступательного движения МЦУ существует и единственен.

Доказательство.



$$\vec{a}_A = \vec{a}_Q + \vec{a}_{AQ};\, Q - МЦУ \Rightarrow$$

$$a_A = a_{AQ};\, tg\mu = \varepsilon / \omega^2;$$

$$a_A = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \Rightarrow AQ = a_A / \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Распределение ускорений как при вращении вокруг Q.

$$a_A / AQ = a_B / BQ = a_C / CQ = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Замечание. МЦС и МЦУ- разные точки!

Кинематический расчет плоского механизма

Пример. **Дано:** $\omega_{OA} = \omega, \varepsilon_{OA} = \varepsilon$

Определить: $\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{A}}, \vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{B}}, \omega_{AB},$

$\omega_{BC}, \vec{a}_{\mathrm{A}}, \vec{a}_{\mathrm{B}}, \varepsilon_{AB}, \varepsilon_{AB}$

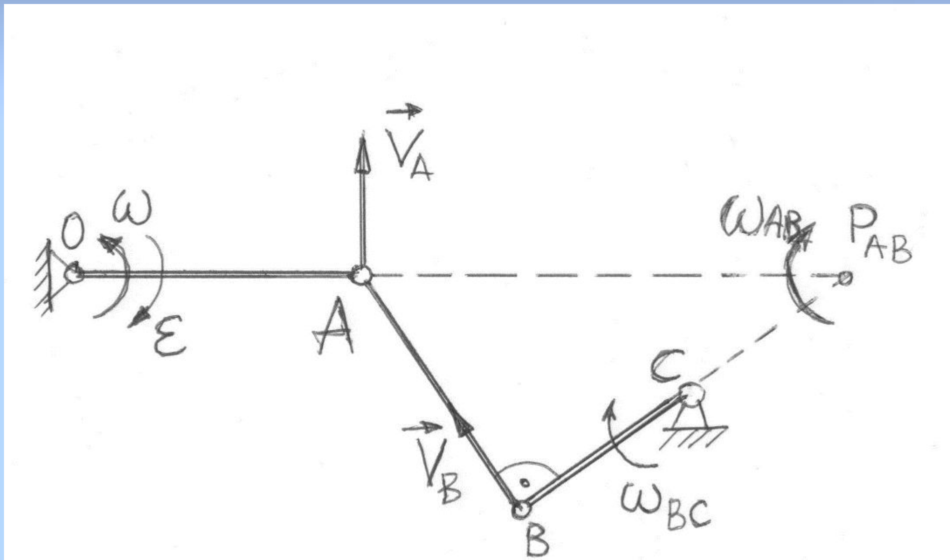


Схема решения.

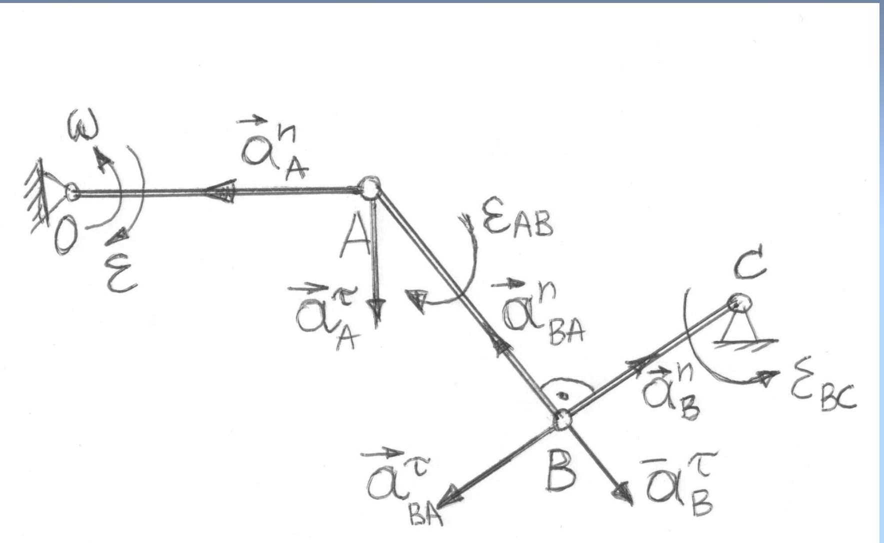
1. Расчет скоростей.

$OA: \mathrm{v}_A = \omega OA; \ \vec{\mathrm{v}}_A \perp OA;$

$AB: \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{B}} \perp \mathrm{BC} \Rightarrow \mathrm{P}_{\mathrm{AB}} - \text{МЦС}_{\mathrm{AB}}; \ \omega_{\mathrm{AB}} = \mathrm{v}_{\mathrm{A}}/\mathrm{AP}_{\mathrm{AB}} = \mathrm{v}_{\mathrm{B}}/\mathrm{BP}_{\mathrm{AB}}$

$\mathrm{BC}: \omega_{\mathrm{BC}} = \mathrm{v}_{\mathrm{B}}/\mathrm{BC}$

Кинематический расчет плоского механизма



2. Расчет ускорений.

$$OA: a_A^n = \omega^2 OA; \; a_A^\tau = \varepsilon OA;$$

$$AB: \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n; \; a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 AB; \; a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} AB;$$

$$BC: \vec{a}_B = \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n \quad (*); \; a_B^n = \omega_{BC}^2 BC; \; a_B^\tau = \varepsilon_{BC} BC$$

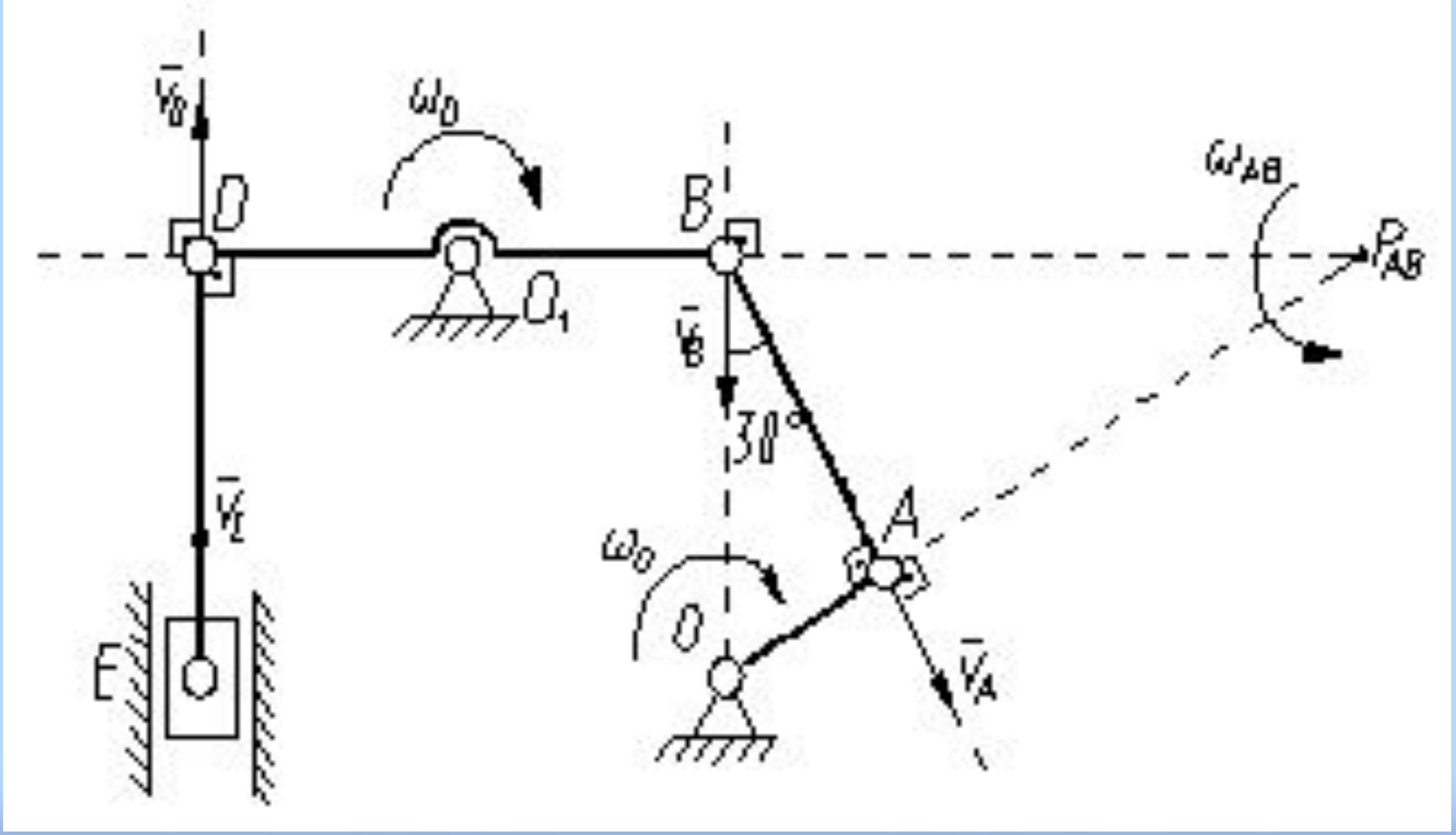
$$\Rightarrow \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n \quad (**)$$

В (**) две неизвестные: $\varepsilon_{AB}, \varepsilon_{BC}$. *Проецируя (**) на две оси, найдем их. Ускорение* $\vec{a}_B$ *найдем из (*).*

Еще один пример

Дано: $\omega_{OA} = \omega_0,\ OA = l_1;\ AB = l_2;\ BD = l_3;\ DE = l_4$

Определить $\vec{\mathrm{V}}_E$



Заключение

1. Выведен закон плоского движения.
2. Показано, что плоское движение представляется суммой простейших движений – поступательного вместе с полюсом и вращательного вокруг полюса.
3. Выведены формула связи между скоростями точек и ее следствия.
4. Определено понятие МЦС и показаны его своцства.
5. Выведены формула связи между ускорениями точек и ее следствия.
6. Рассмотрены примеры кинематического расчета плоских механизмов.

Контрольные вопросы к лекции

1. Сколько степеней свободы имеет твёрдое тело, совершающее плоское движение?
2. Запишите закон плоского движения твёрдого тела.
3. Как связаны между собой скорости двух точек твёрдого тела, совершающего плоское движение?
4. Чему равна угловая скорость вращения твёрдого тела?
5. Сформулируйте теорему о проекциях скоростей двух точек твёрдого тела при плоском движении.
6. Что называется мгновенным центром скоростей?
7. Что нужно знать, чтобы определить МЦС?
8. Из каких составляющих складывается ускорение точки твёрдого тела, совершающего плоское движение?
9. Чему равно ускорение вращательного движения точки вместе с телом вокруг полюса?

Тема следующей лекции

Сложное движение точки