Лекция 8. Интегрирование биноминальных дифференциалов. Разложение на простейшие дроби. Интегрирование тригонометрических функций.

Биноминальный дифференциал – это выражение вида $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, где $a, b \in R, m, n, p \in Q$

<u>Теорема Чебышева</u>

Интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ (1)

может быть выражен в элементарных функциях только в следующих трех случаях:(1) p - целое число. Тогда выражение $(a+bx^n)^p$ развертывается по формуле бинома Ньютона и подынтегральная функция после раскрытия скобок будет суммой элементов вида

$\frac{m+1}{n}$ – целое число.

Интеграл (1) приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $t=\sqrt[r]{a+bx^n}$, где r – знаменатель дроби *p*

$\frac{m+1}{n}+p$ – целое число. Интеграл (1) приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $t=\sqrt[r]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$

, где r – знаменатель дроби *p*

Разложение на простейшие дроби. Общий случай.

Пусть $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где *P(x),Q(x)* – многочлены.

Прежде всего заметим, что если степень *m* числителя *P(x)* больше или равна степени n знаменателя *Q(x),* то разделив многочлен *P(x)* на многочлен *Q(x),* получим в частном некоторый многочлен *N(x)* и в остатке многочлен $P_1(x)$ не выше степени *(n-1).*

Следовательно $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=N(x)+\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$

Для *N(x)* – обычное интегрирование.

Дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь.

Многочлен *Q(x)* может быть представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами

$Q(x)=(x-\alpha)^k...(x^2+px+q)^t...$, где α-*к*-кратный корень уравнения *Q(x)=0*,

а квадратное уравнение $x^2+px+q=0$

имеет сопряженные комплексные корни $(p^2-4q<0)$

, которые служат *t*-кратными сопряженными корнями уравнения *Q(x)=0*

Общая формула разложения дроби следующая:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{B_t x + C_t}{(x^2+px+q)^t} + \frac{B_{t-1}x + C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}} + \ldots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} \quad (*)$$

Таким образом, интеграл от всякой рациональной дроби сводится к интегралам от простейших рациональных дробей, которые находятся достаточно легко.

Примеры

1. $\int \frac{x-3}{x^3-x}dx \quad \frac{x-3}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow x-3 = A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$

Получаем систему

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=1 \\ -A=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B+-1 \\ C=-2 \end{cases}$$

Более простой метод:

При *x=0, A*=3. При *x=1, B*=-1. При *x=-1, C=-2*

Имеем тождество $\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}$, тогда

$$\int \frac{x-3}{x^3-x}dx = 3\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{x+1} = 3\ln|x| - \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + c$$

2. $\int \frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx$ $x^4+x^3-x-1 = x^3(x+1)-(x+1) = (x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

Разлагаем дробь на простейшие дроби:

$$\frac{12}{x^4+x^3-x-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Коэффициенты *A,B,C,D* находим из тождества

$$12 = A(x-1)(x^2+x+1) + B(x+1)(x^2+x+1) + (Cx+D)(x+1)(x-1)$$

Подставляя последовательно *x=0, x=1, x=-1, x=2* получим систему

$$\begin{cases} 12 = 6B \\ 12 = -2A \\ 12 = -A+B-D \\ 12 = 7A+21B+6C+3D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -6 \\ B = 2 \\ C = 4 \\ D = -4 \end{cases}$$ следовательно

$$\int \frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx = -6\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x-1} + 4\int \frac{x-1}{x^2+x+1} = -6\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + 2\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx$$

$$-6\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + 2\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - 6\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = -6\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + 2\ln|x^2+x+1|$$

$$-4\sqrt{3}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

3 $\int \frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx \quad \frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$

$$x^2+x-1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x + (Dx+E)x(x^2+1)$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+D=0 \\ E=0 \\ 2A+B+D=1 \Rightarrow A=-1; B=2; C=1; D=1; E=0 \\ C+E=1 \\ A+-1 \end{cases}$$

Имеем $\int \frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx + \int \frac{x}{x^2+1}dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} =$

$$-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \frac{1}{x^2+1} + \int \frac{(x^2+1-x^2)dx}{(x^2+1)^2} = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \frac{1}{x^2+1} + arctgx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$$

Интеграл $\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ вычислим применив правило интегрирования по частям

$u = x; dv = \frac{xdx}{(x^2+1)^2}; du = dx; v = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$ тогда

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}arctgx + c$$

Окончательно исходный интеграл равен

$$\int \frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx = \frac{x-2}{2(x^2+1)} + \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + \frac{1}{2}arctgx + c$$

Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим основные методы интегрирования тригонометрических функций

1. В приложениях математического анализа важное значение имеют интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n xdx$ Рассмотрим различные значения параметров *m* и *n*

a) Если хотя бы одно из *m* или *n* нечетное (*m>0,n>0*), то интеграл вычисляется непосредственно.

Пример

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 xdx = -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 xd(\cos x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + c$$

b) Если оба показателя четные числа (*m>0,n>0*), то используются формулы двойного аргумента, понижающие степень, а именно

$$2\sin^2 x = 1-\cos 2x; 2\cos^2 x = 1+\cos 2x; \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

Пример

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 x(1+\cos 2x)dx =$$

$$\frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx +$$

$$\frac{1}{48}\sin^3 2x = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + c$$

с) Если *m<0* и *n<0* и сумма их четна, то применяется подстановка *t=tgx* или *t=ctgx.* Исходный интеграл сводится к сумме интегралов от степенных функций.

$$t = tgx; \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Пример

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\cdot \frac{t^3}{(1+t^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}} = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + c = -\frac{1}{2tg^2 x} + \ln|tgx| + c$$

d) Если *m<0* и *n<0*, то единица в числителе представляется как $(\sin^2 x + \cos^2 x)^k$ где *2k*=|*m*+*n*|-2

Пример

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^6 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + 2\int \frac{ctg^2 x}{\sin^2 x} dx + \int \frac{ctg^4 x}{\sin^2 x} dx = -ctgx - \frac{2}{3}ctg^3 x - \frac{1}{5}ctg^5 x + c$$

е) Если *m=0*, *n* – нечетное отрицательное или *n=0, m* – нечетное отрицательное, то используется универсальная подстановка

$$t = tg\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Так как $\sin x = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$ и $\cos x = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Пример

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x} = \int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \int\frac{(1+t^2)^2}{8t^3}dt = -\frac{1}{8t^2}+\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{t^2}{8}+c = -\frac{1}{8tg^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\ln|tg\frac{x}{2}|+\frac{tg^2\frac{x}{2}}{8}+c$$

2. Рассмотрим интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

При вычислении такого интеграла возможны различные случаи представления подынтегральной функции:

Функции *sinx, cosx* – только в четных степенях. Тогда можно использовать подстановку $t = tgx, \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}, dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ Интеграл упрощается.

Пример

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x-3\cos^2 x}=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{t^2}{1+t^2}-\frac{3}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{t^2-3}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+c=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{tgx-\sqrt{3}}{tgx+\sqrt{3}}\right|+c$$

Замечание Такой же подстановкой вычисляется интеграл вида $\int R(tgx)dx$

Пример

$$\int\frac{dx}{1+2tgx}=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+2t\right)}=\frac{1}{5}[x+2\ln|\cos x+2\sin x|]+c$$

Это после разложения на простейшие дроби, вычисления интегралов от них и возврата к старой переменной.

b) Функция *R(sinx,cosx)* имеет вид $\dfrac{1}{a\cos x+b\sin x+c}$

В этом случае применяется универсальная подстановка

$$t=tg\frac{x}{2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

Замечание Использование универсальной подстановки всегда приводит к цели, но в силу своей общности она часто не является наилучшей в смысле краткости и простоты необходимых преобразований.

3.В теории рядов Фурье, важное значение имеют интегралы

$$\int\sin mx\cdot\sin nxdx,\int\cos mx\cdot\cos nxdx,\int\sin mx\cdot\cos nxdx$$

Они вычисляются на основании формул тригонометрии:

$t = \sqrt{bx+c}$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]; \cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)];$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y\_ + \sin(x+y)]$$

Пример

$$\int \sin x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 6x) dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

Интегрирование некоторых иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок

В приложениях математического анализа интегралы от иррациональных функций в некоторых случаях можно вычислять, используя тригонометрические подстановки.

Рассмотрим интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ (1), где $a \neq 0; c - \frac{b^2}{4a} \neq 0$

В случае a=0 получаем интеграл вида $\int R(x, \sqrt{bx+c})dx$, замена $t = \sqrt{bx+c}$ и так далее.

В случае $c - \frac{b^2}{4a} = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2$ и если *a>0* имеем дело с рациональной функцией, если *a<0*, то функция $\sqrt{ax^2+bx+c}$ не определена ни при каком значении *x*.

Рассмотрим метод преобразования интеграла (1) к интегралу вида

$\int R(\sin z, \cos z)dz$ (2) Выполним преобразование $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$

Замена $t = x + \frac{b}{2a}; dx = dt$ Получаем $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + (c - \frac{b^2}{4a})}$

Рассмотрим все возможные случаи:

1. Пусть $a > 0; c - \frac{b^2}{4a} > 0.$ Введем обозначение $a = m^2; c - \frac{b^2}{4a} = n^2$

   Получаем $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 + n^2}$

2. Пусть $a > 0; c - \frac{b^2}{4a} < 0.$ Введем обозначение $a = m^2; c - \frac{b^2}{4a} = -n^2$

   Получаем $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 - n^2}$

3. Пусть $a < 0; c - \frac{b^2}{4a} > 0.$ Введем обозначение $a = -m^2; c - \frac{b^2}{4a} = n^2$

   Получаем $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-m^2 t^2 + n^2}$

Пусть $a < 0; c - \frac{b^2}{4a} < 0.$ Введем обозначение $a = -m^2; c - \frac{b^2}{4a} = -n^2$

Получаем $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-m^2t^2 - n^2} \in C$ (комплексное число)

Таким образом интеграл (1) преобразуется к одному из следующих типов интегралов:

I. $\int R(t, \sqrt{m^2t^2 + n^2})dt$ **(3.1) II** $\int R(t, \sqrt{m^2t^2 - n^2})dt$ **(3.2) III** $\int R(t, \sqrt{-m^2t^2 + n^2})dt$ **(3.3)**

Интеграл (3.1) приводится к интегралу вида (2) с помощью подстановки

$$t = \frac{n}{m} tgz$$

Интеграл (3.2) приводится к интегралу вида (2) с помощью подстановки

$$t = \frac{n}{m} \sec z = \frac{n}{m \cos z}$$

Интеграл (3.3) приводится к интегралу вида (2) с помощью подстановки

$$t = \frac{n}{m} \sin z$$

Пример $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$ (интеграл типа III). Замена *x=asint ; dx=acostdt*.

Получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}} = \int \frac{a\cos tdt}{\sqrt{\left(a^2-a^2\sin^2 n\right)^3}} = \int \frac{a\cos tdt}{a^3\cos^3 t} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a^2} tg^2 t = \frac{1}{a^2}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + c$$

Многократное интегрирование по частям при вычислении интегралов.

В приложениях математического анализа встречаются интегралы вида

$$\int x^m \sin xdx, \int x^m \cos xdx, \int x^m e^x dx, \int e^x \sin xdx, \int e^x \cos xdx, m > 0, m \in N$$

Вычисление таких интегралом требует многократного интегрирования по частям.

a) $\int x^2 \cos xdx = \{u = x^2; du = 2xdx; dv = \cos xdx; v = \sin x\} = x^2 \sin x - 2\int x\sin xdx$

$$\{u = x; du = dx; dv = \sin x; v = -\cos x\} = x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \int \cos xdx) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$$

b) $\int e^x \cos xdx = \{u = \cos x; du = -\sin x; dv = e^x dx; v = e^x\} = e^x \cos x + \int e^x \sin xdx$

$\{u = \sin x; du = dx; dv = e^x dx; v = e^x\} = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos xdx$ тогда получаем

$$2\int e^x \cos xdx = e^x(\cos x + \sin x) \Rightarrow \int e^x \cos xdx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c$$

Замечание Если принять вначале $\left\{u = e^x; dv = \cos x dx; ...\right\}$

то получим тождество $\int e^x \cos x dx = \int e^x \cos x dx$

О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции

При интегрировании может возникнуть вопрос, а именно:

1. Всякая ли непрерывная функция f(x) имеет неопределенный интеграл $\int f(x)dx;$
2. Каким способом можно найти этот интеграл, если он существует

Ответом на первую часть вопроса является теорема Коши, являющейся основной теоремой интегрального исчисления.

Теорема Коши

Всякая непрерывная функция имеет первообразную. Иными словами, для каждой непрерывной в интервале *(a,b)* функции *f(x)* существует функция *F(x),* производная которой в интервале *(a,b)* в точности равна данной функции *f(x),* то есть *F'(x)=f(x),* тем самым существует и неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + c, c = const$

Теорема Коши не решает вторую часть вопроса. Теорема Коши вовсе не утверждает, что первообразную данной функции можно отыскать с помощью конечного числа известных операций и выразить ответ в элементарных функциях. Более того, имеются непрерывные элементарные функции, интегралы от которых не являются элементарными функциями. Такие интегралы называются "**неберущимися**", то есть они не могут быть выражены с помощью конечного числа элементарных функций.

Примеры: $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx$ - интеграл вероятностей (функция Лапласа);

Si(x)= $\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус; E(x)= $\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx$ -эллиптический интеграл.

Для функций Ф(x), Si(x), E(x) – составлены таблицы.