

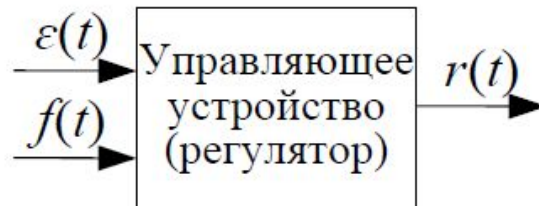
Лекция №2

Математическое описание линейных САУ.
Дифференциальные уравнения, передаточная
функция. Временные и частотные характеристики

2.1 Алгоритм управления

Алгоритм управления (регулирования) показывает, как должно изменяться управляющее (регулирующее) воздействие $r(t)$, чтобы обеспечить заданный алгоритм функционирования $x(t)$.

Законом (алгоритмом) управления (регулирования) называют математическую зависимость выходной координаты регулятора $r(t)$ от и возмущения $f(t)$



В инженерной практике нашли наибольшее применение т. н. типовые алгоритмы (законы регулирования):

1) Позиционный (Старт-стопное регулирование)

2) пропорциональный – П:

$$r(t) = k \varepsilon(t)$$

где k – коэффициент пропорциональности, $\varepsilon(t)$ – отклонения.

3) интегральный – И:

$$r(t) = \frac{k_R}{T_I} \int_0^t \varepsilon(t) dt$$

где T_I – время интегрирования

4 Пропорционально-интегральный – ПИ (пропорциональный с воздействием по интегралу):

$$r(t) = k_R \varepsilon(t) + \frac{k_R}{T_H} \int_0^t \varepsilon(t) dt$$

где k – коэффициент пропорциональности, $\varepsilon(t)$ – отклонение, T_H – время интегрирования

5 Пропорционально-интегрально-дифференциальный ПИД:

$$r(t) = k_R \varepsilon(t) + \frac{k_R}{T_H} \int_0^t \varepsilon(t) dt + k_R T_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

где k – коэффициент пропорциональности, $\varepsilon(t)$ – отклонение, T_H – время интегрирования, T_D – время предварения.

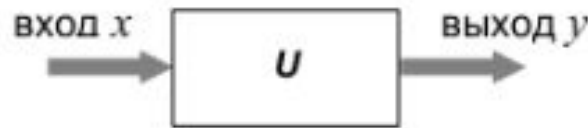
2.2 Дифференциальные уравнения САУ

Модель – это объект, который мы используем для изучения другого объекта (оригинала).

Модель и оригинал должны быть в чем-то похожи, чтобы выводы, сделанные при изучении модели, можно было бы (с некоторой вероятностью) перенести на оригинал.

Любой объект взаимодействует с внешней средой с помощью входов и выходов. **Входы** – это возможные воздействия на объект, **выходы** – это те сигналы, которые можно измерить. Входы независимы, они «приходят» из внешней среды.

При изменении информации на входе меняется внутреннее состояние объекта (так называют его изменяющиеся свойства) и, как следствие, выходы:



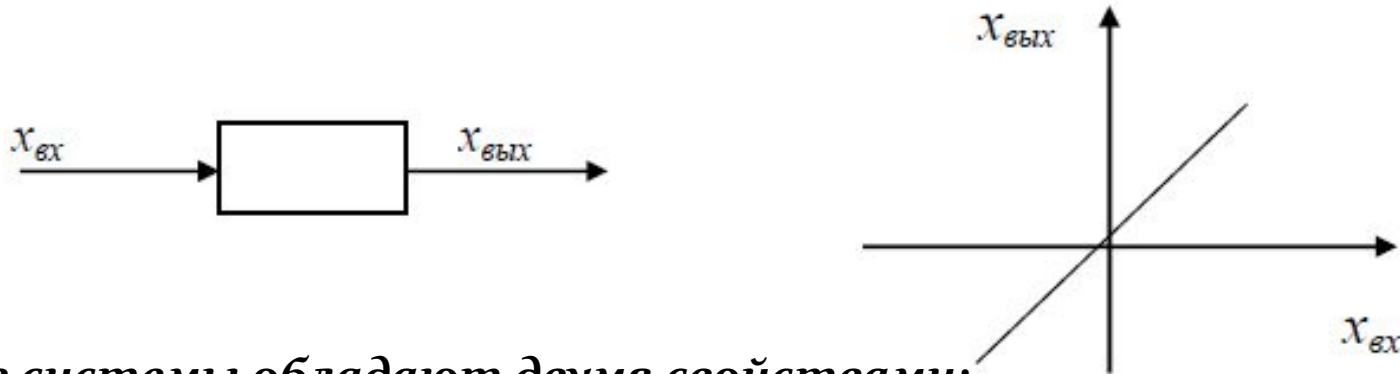
Это значит, что существо преобразует вход x в выход y . Это правило называется **оператором**.

Запись $y = U[x]$ означает, что выход y получен в результате применения оператора U ко входу x .

Построить модель – это значит найти оператор, связывающий входы и выходы. С его помощью можно предсказать реакцию объекта на любой входной сигнал.

Понятие о линейных и нелинейных системах

Линейная система автоматического управления описывается линейными дифференциальными уравнениями. Статические характеристики элементов такой системы имеют следующий вид



Линейные системы обладают двумя свойствами:

1 Если на вход элемента поданы в отдельности входные воздействия $x_{вх1}$, $x_{вх2}, \dots, x_{вхn}$, то на выходе появятся сигналы $x_{вых1}$, $x_{вых2}, \dots, x_{выхn}$.

2 Принцип суперпозиции: если на вход элемента подается сигнал $x_{вх} = x_{вх1} + x_{вх2} + \dots + x_{вхn}$, то на выходе линейного элемента и системы будет выходной сигнал $x_{вых} = x_{вых1} + x_{вых2} + \dots + x_{выхn}$.

Или если на вход подать сумму двух сигналов, выход будет представлять собой сумму реакций того же оператора на отдельные сигналы:

$$U[x_1 + x_2] = U[x_1] + U[x_2].$$

Нелинейные САУ описываются нелинейными дифференциальными уравнениями и включают в себя звенья с существенно нелинейными характеристиками.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

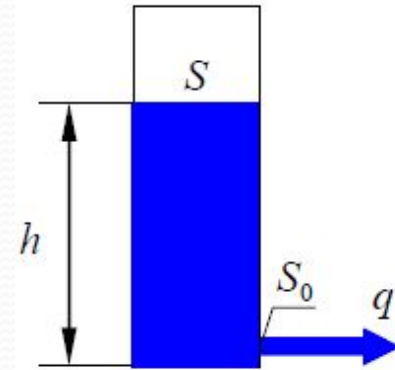
Построим модель, которая связывает уровень воды в баке h и расход вытекающей воды q . Эту связь определяют с помощью закона Бернулли, который в данном случае принимает вид

$$\rho g h = \frac{\rho v^2}{2}$$

Отсюда получаем $v = \sqrt{2gh}$. Учитывая, что расход воды вычисляется как

$q = S_0 \cdot v$, находим

$$q = \alpha \cdot \sqrt{h}, (*)$$



где $\alpha = S_0 \cdot \sqrt{2g}$ – постоянная величина.

Это статическая модель, которая описывает установившееся состояние (статический режим), когда в баке поддерживается постоянный уровень воды и поток вытекающей воды тоже постоянный.

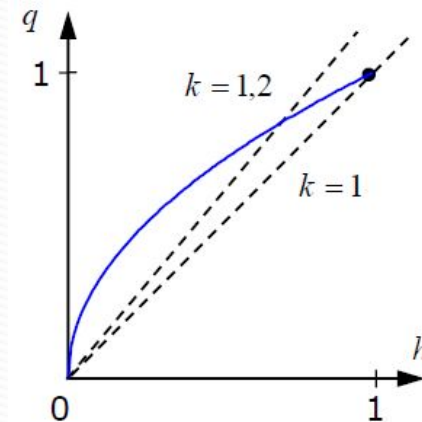
Линеаризовать модель – значит приближенно заменить уравнение (*) линейным уравнением

$$q = k \cdot h,$$

где k – некоторый коэффициент.

Предположим, что уровень воды изменяется в интервале от 0 до 1 м. тогда один из вариантов – вычислить коэффициент как угол наклона отрезка, соединяющего точки кривой $q = \alpha \sqrt{h}$ на концах этого интервала.

Для определенности далее везде принимаем $\alpha = 1$, тогда получаем $k = 1$.

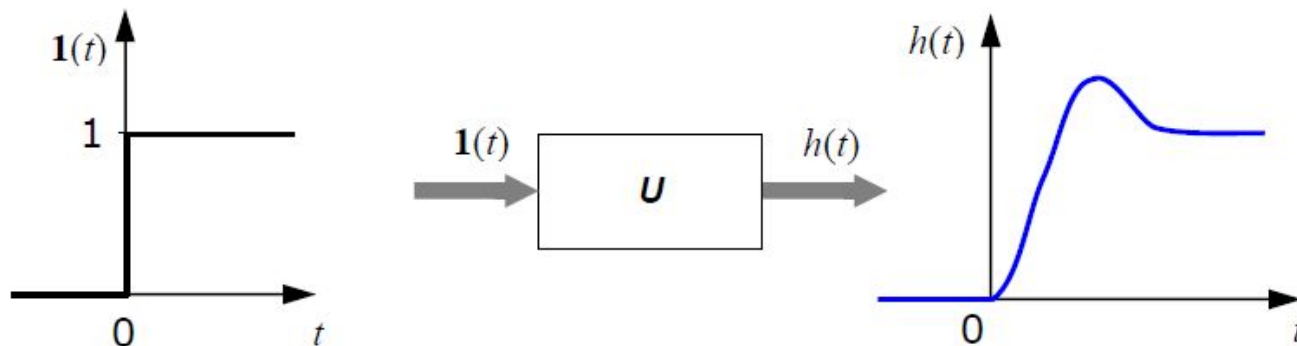


Переходная функция

Один из методов построения моделей «вход-выход» – определение реакции объекта на некоторый стандартный сигнал. Один из простейших сигналов – так называемый «единичный скачок» («единичный ступенчатый сигнал»), то есть мгновенное изменение входного сигнала с 0 до 1 в момент $t = 0$. Формально этот сигнал определяется так:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Реакция объекта на единичный скачок называется **переходной функцией** и обозначается $h(t)$:

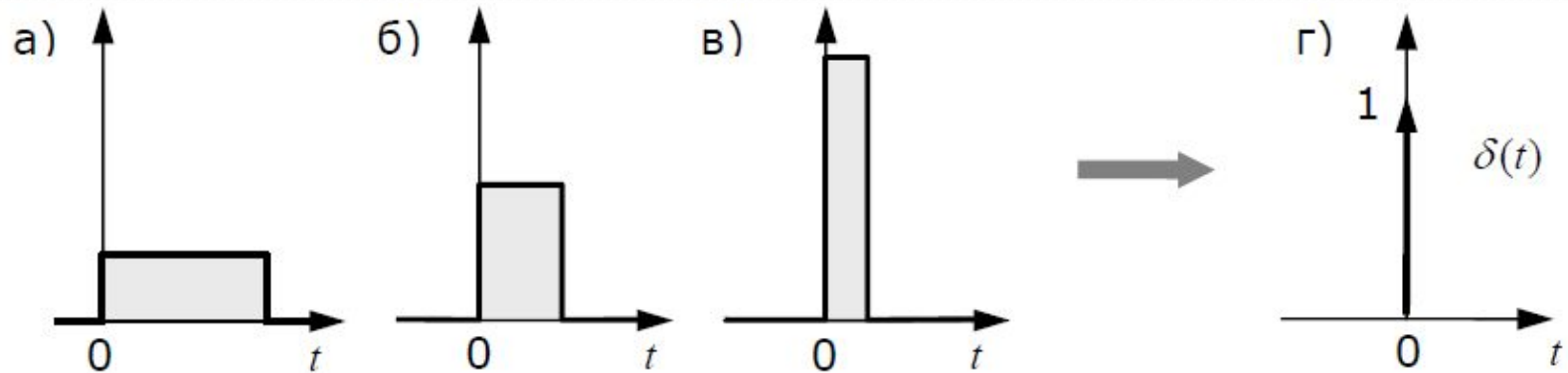


При этом предполагается, что объект в начальный момент находится в состоянии покоя, то есть, имеет нулевые начальные условия. Это значит, что все его переменные состояния равны нулю и внутренняя энергия также нулевая.

Импульсная характеристика (весовая функция)

В качестве тестового сигнала можно использовать любой сигнал.

Например, можно изучать реакцию системы на прямоугольный импульс. На рисунках а)-в) показаны три импульса, имеющих одинаковые площади. Для простоты будем считать, что эта площадь равна единице.



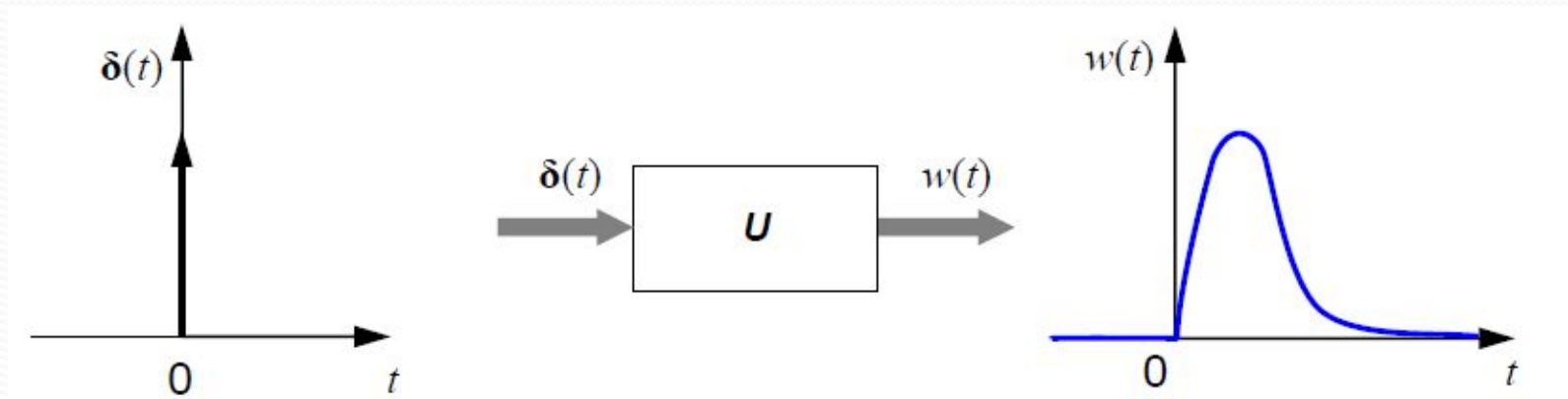
Что будет, если уменьшать ширину импульса, сохраняя его площадь? Очевидно, что высота импульса будет расти и в пределе (когда ширина стремится к нулю) станет бесконечной. Таким образом, получаем еще один классический тестовый сигнал – *единичный импульс или дельта-функцию Дирака $\delta(t)$* .

Это идеальный (невозможный в реальной жизни) сигнал, который равен нулю во всех точках, кроме $t = 0$, где он уходит к бесконечности, причем его площадь (интеграл по всей оси времени) равен единице.

Поскольку бесконечный импульс невозможно нарисовать, на графике он изображается стрелкой, высота которой равна единице (см. рисунок г).

Иногда определяют дельта-функцию как производную от единичного ступенчатого сигнала $1(t)$. Действительно, эта производная равна нулю при всех значениях t , кроме нуля, где она обращается в бесконечность.

Реакция системы на единичный импульс (дельта-функцию) называется **импульсной характеристикой** и обозначается $w(t)$:

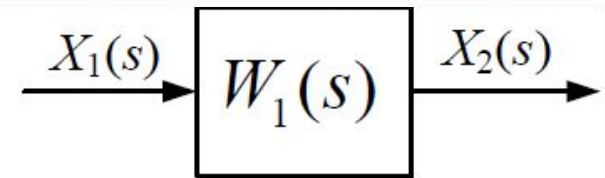


Импульсная характеристика, так же, как и переходная характеристика, определяется при нулевых начальных условиях, то есть, объект должен находиться в состоянии покоя.

Преобразование структурных схем систем автоматического управления

В большинстве случаев значительно быстрее, проще и нагляднее математическое описание САУ составлять не по уравнениям звеньев, а при помощи аппарата передаточных функций САУ.

Структурная схема САУ показывает, из каких динамических звеньев состоит САУ и как они взаимосвязаны между собой. На структурных схемах звенья условно изображаются прямоугольниками, внутри которых записываются их передаточные функции:



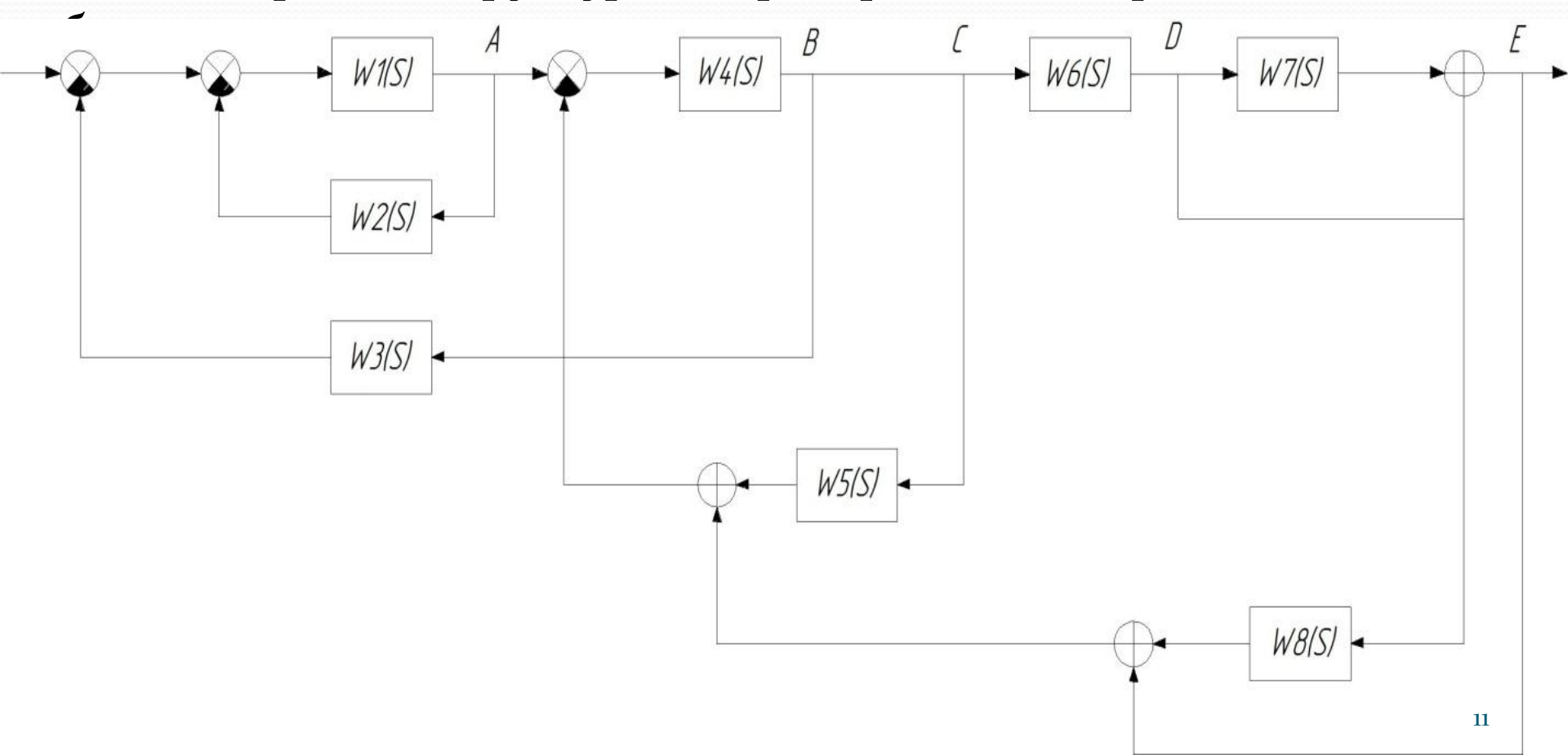
Соединения между звеньями выполняются прямыми линиями со стрелками, указывающими направление передачи воздействий. Внешние воздействия показываются также стрелками.

Структурная схема САУ представляет собой графическое изображение системы дифференциальных уравнений, описывающих работу САУ.

Графическое изображение уравнений звеньев предпочтительнее обычной математической записи этих уравнений, так как позволяет весьма просто и по единообразным правилам производить «свертывание» этих уравнений.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУРНОЙ СХЕМЫ САУ

Имеется структурная схема САУ ТП. Упростить схему САУ с помощью структурных преобразований и записать эквивалентную передаточную функцию. Вид передаточных функций динамических звеньев системы в соответствии с вариантом приведен в таблице 1 МУ к РГР. Правила структурных преобразований приведены в



Вид передаточных динамических звеньев САР в соответствии с вариантом приведен в таблице

Таблица Вариант задания № 02

| $W1$ | $W2$ | $W3$ | $W4$ | $W5$ | $W6$ | $W7$ | $W8$ |
|--------|------|--------------------|------|------|------|-------|---------------------|
| $K1/s$ | $K2$ | $\frac{K3}{T3S+1}$ | $K4$ | 10 | $K6$ | $K7s$ | $\frac{K8S}{T8S+1}$ |

Определим значения коэффициентов K_i и постоянных времени T_i . Номер зачетной книжки 120595, тогда кодовая последовательность будет иметь вид: 12059502.

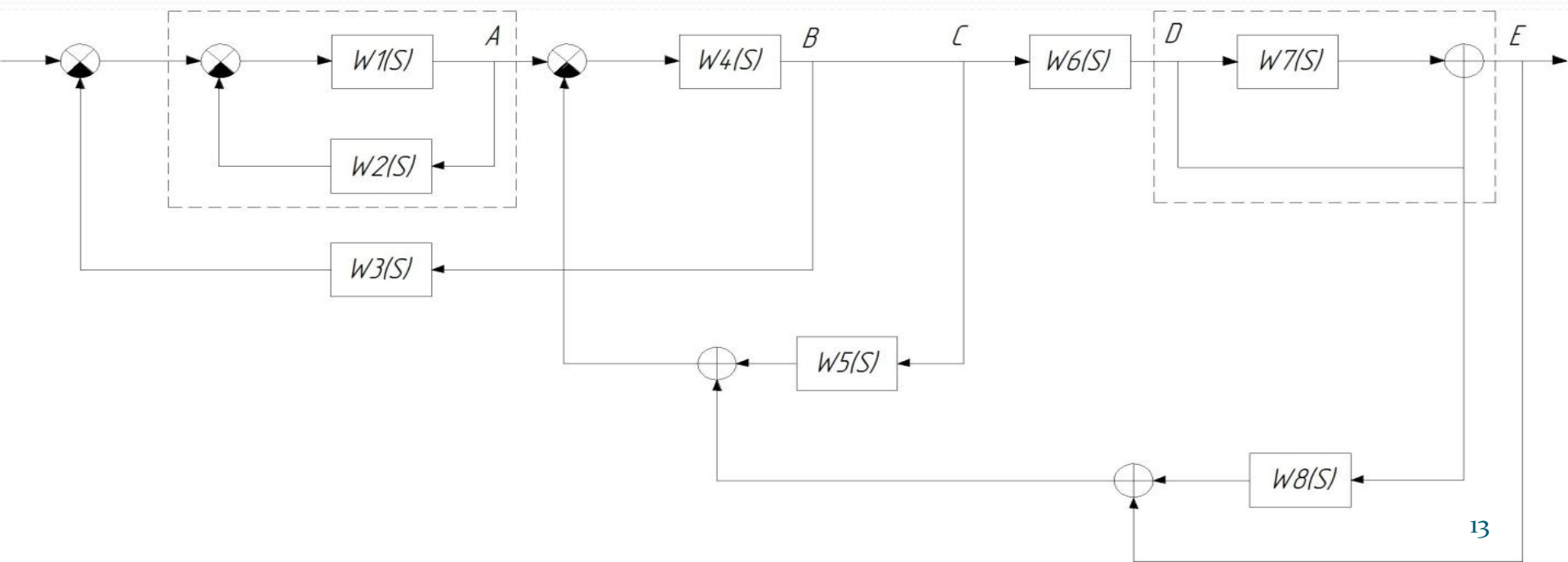
| | | | | | | | |
|---------|---------|--------------------|---------|------|---------|---------|--------------------|
| $K_1=1$ | $K_2=2$ | $K_3=1$ $T_3=1$ | $K_4=5$ | 10 | $K_6=5$ | $K_7=1$ | $K_8=2$ $T_8=2$ |
|---------|---------|--------------------|---------|------|---------|---------|--------------------|

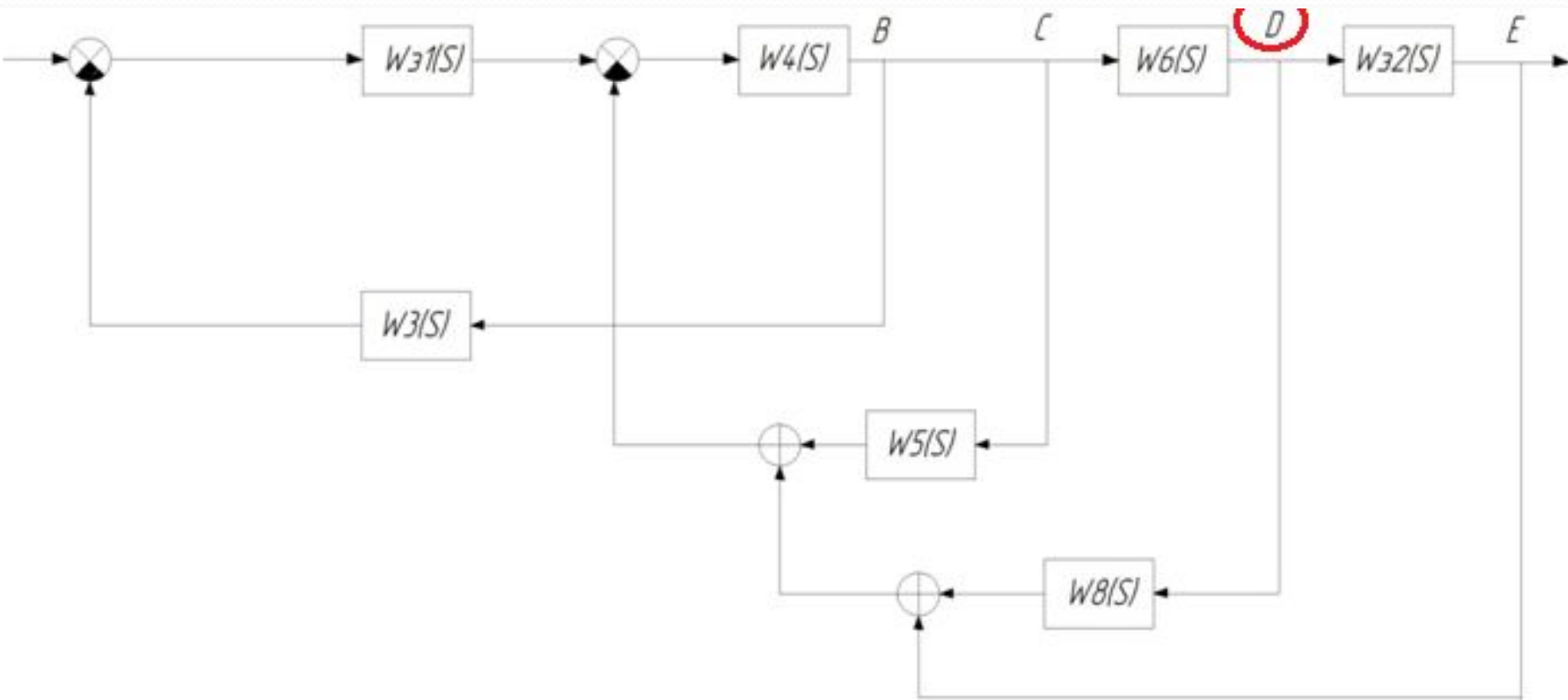
1 Встречно-параллельное соединение звеньев $W_1(S)$ и $W_2(S)$ заменим эквивалентной передаточной функцией $W_{э1}(S)$.

$$W_{э1}(S) = \frac{W_1(S)}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)} = \frac{1}{1 + 1 \cdot 2} = \frac{1}{3} = 0,33$$

2 Параллельное соединение звена $W_7(S)$ и единичного звена заменим эквивалентной передаточной функцией $W_{э2}(S)$.

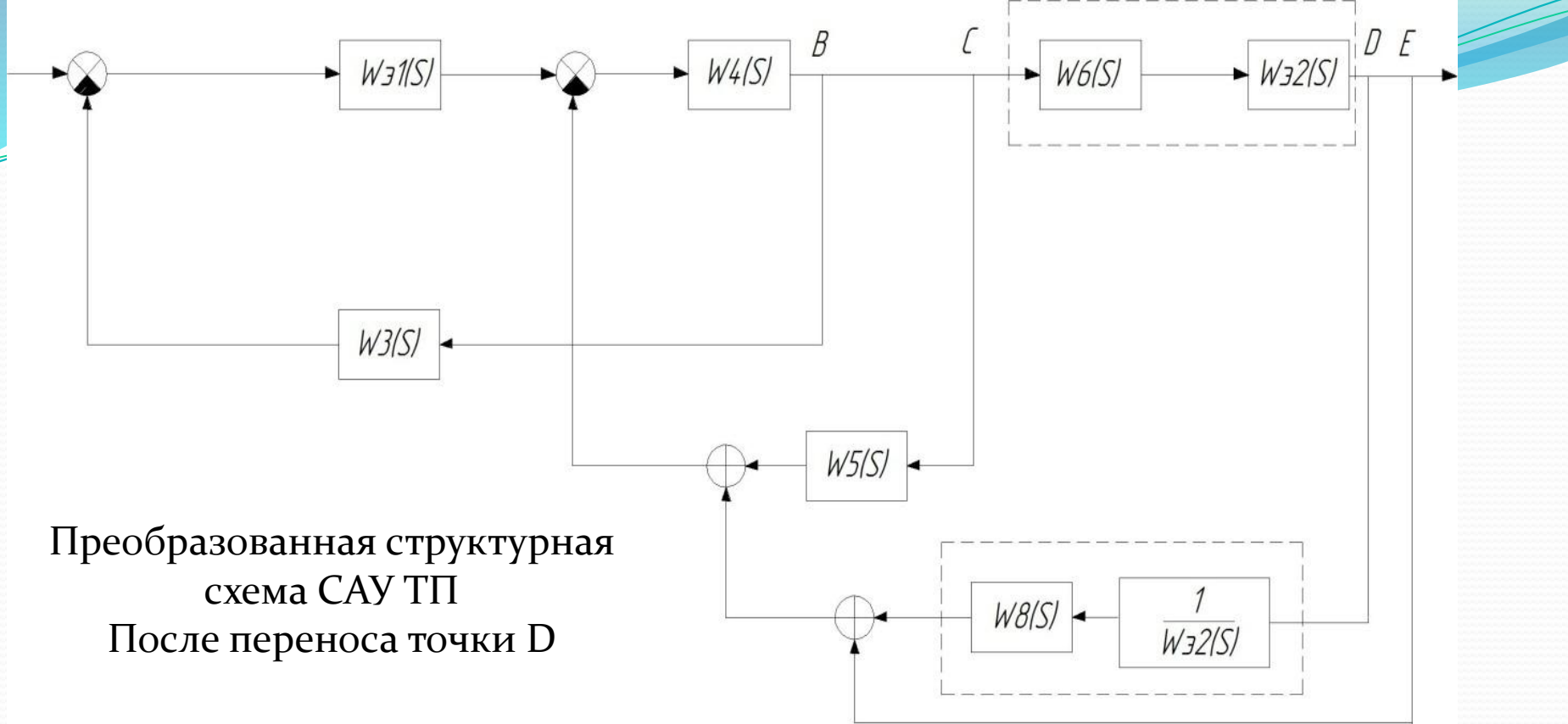
$$W_{э2}(S) = W_7(S) + 1 = S + 1$$





Преобразованная структурная схема САУ ТП

3 Перенесем точку съема D с входа звена $W_{32}(S)$ на выход.



Преобразованная структурная
схема САУ ТП
После переноса точки D

4 Последовательное соединение звеньев $W_6(S)$ и $W_{32}(S)$ заменим эквивалентной передаточной функцией $W_{33}(S)$.

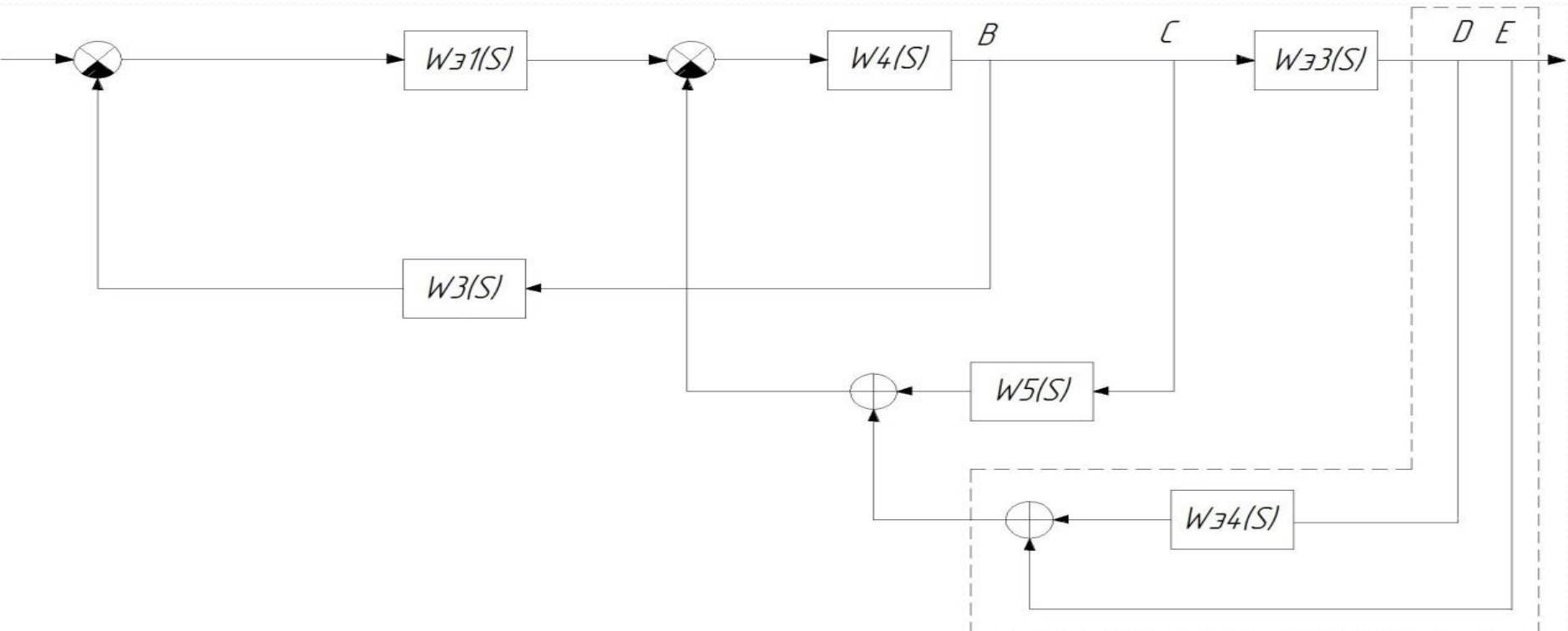
$$W_{33}(S) = W_6(S) \cdot W_{32}(S) = 5 \cdot (S + 1)$$

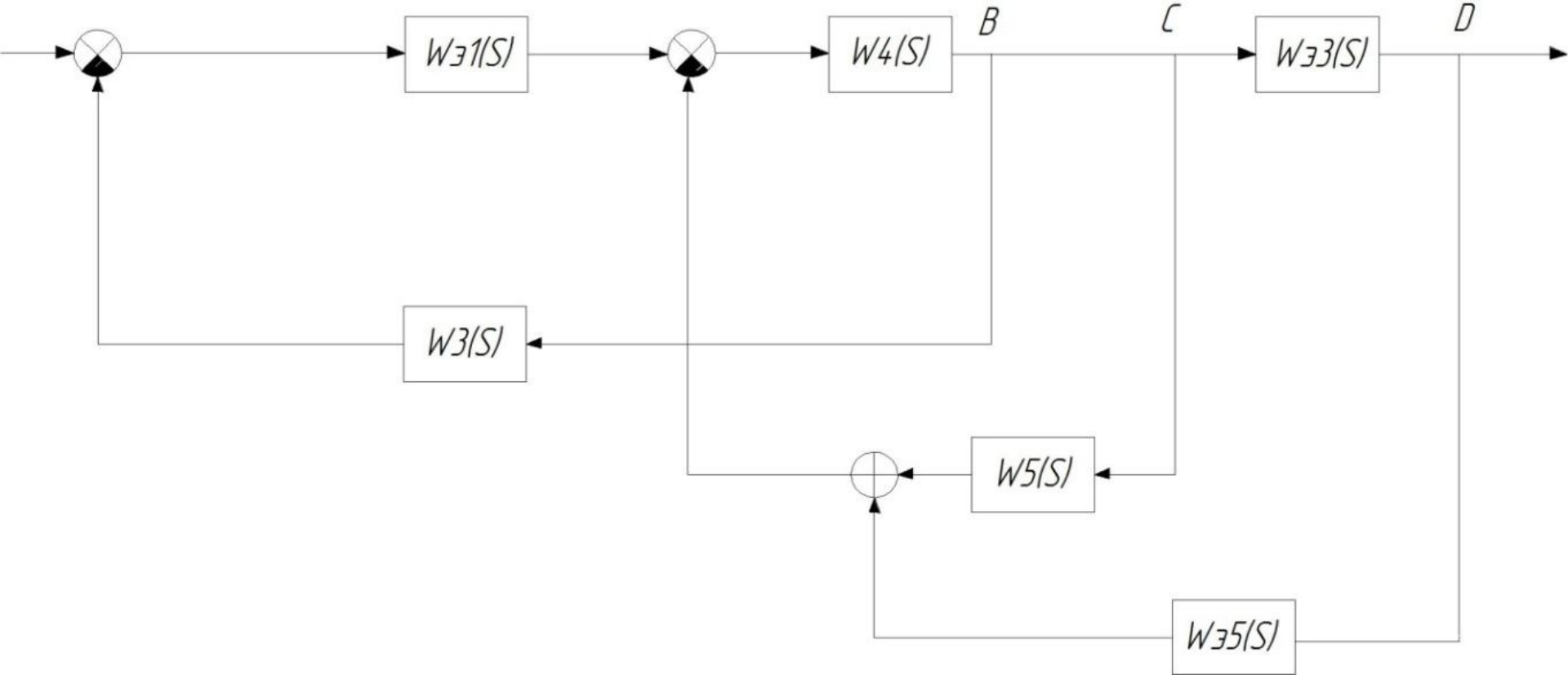
5 Последовательное соединение звеньев $\frac{1}{W_{32}(S)}$ и $W_8(S)$ заменим эквивалентной передаточной функцией $W_{34}(S)$.

$$W_{34}(S) = \frac{W_8(S)}{W_{32}(S)} = \frac{\frac{2S}{2S+1}}{S+1} = \frac{2S}{2S^2 + 3S + 1}$$

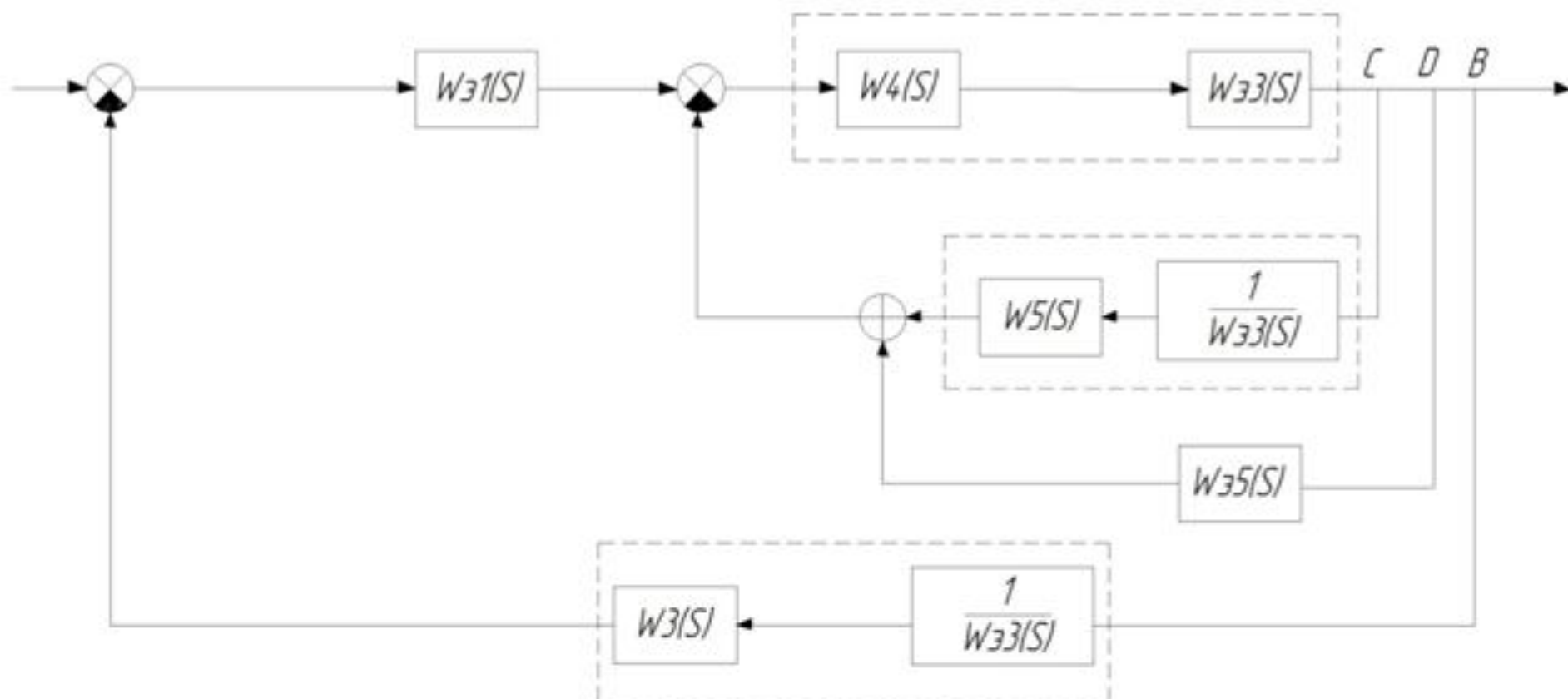
6 Параллельное соединение звена $W_{\text{Э4}}(S)$ и единичного звена заменим эквивалентной передаточной функцией $W_{\text{Э5}}(S)$.

$$W_{\text{Э5}}(S) = W_{\text{Э4}}(S) + 1 = \frac{2S}{2S^2 + 3S + 1} + 1 = \frac{2S^2 + 5S + 1}{2S^2 + 3S + 1}$$





7 Перенесем точки съема В и С со входа звена $W_{33}(S)$ на выход.



Преобразованная структурная схема САУ ТП

8 Последовательное соединение звеньев $W_4(S)$ и $W_{33}(S)$ заменим эквивалентной передаточной функцией $W_{36}(S)$.

$$W_{36}(S) = W_4(S) \cdot W_{33}(S) = 5 \cdot 5 \cdot (S + 1) = 25 \cdot (S + 1)$$

9 Последовательное соединение звеньев $\frac{1}{W_{33}(S)}$ и $W_5(S)$ заменим эквивалентной передаточной функцией $W_{37}(S)$.

$$W_{37}(S) = \frac{W_5(S)}{W_{33}(S)} = \frac{10}{5 \cdot (S+1)} = \frac{2}{S+1}$$

10 Последовательное соединение звеньев $\frac{1}{W_{33}(S)}$ и $W_3(S)$ заменим эквивалентной передаточной функцией $W_{38}(S)$.

$$W_{38}(S) = \frac{W_3(S)}{W_{33}(S)} = \frac{\frac{1}{S+1}}{5 \cdot (S+1)} = \frac{1}{5 \cdot (S+1)^2}$$

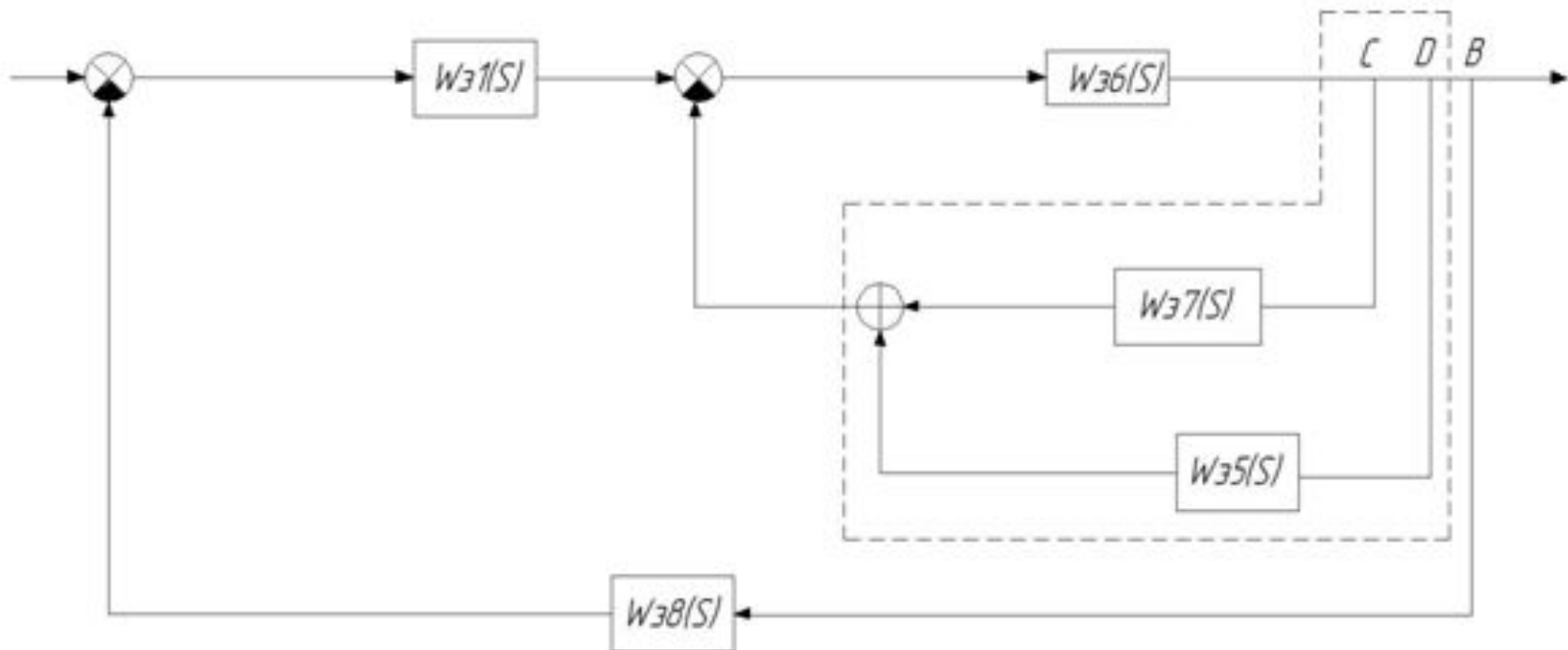
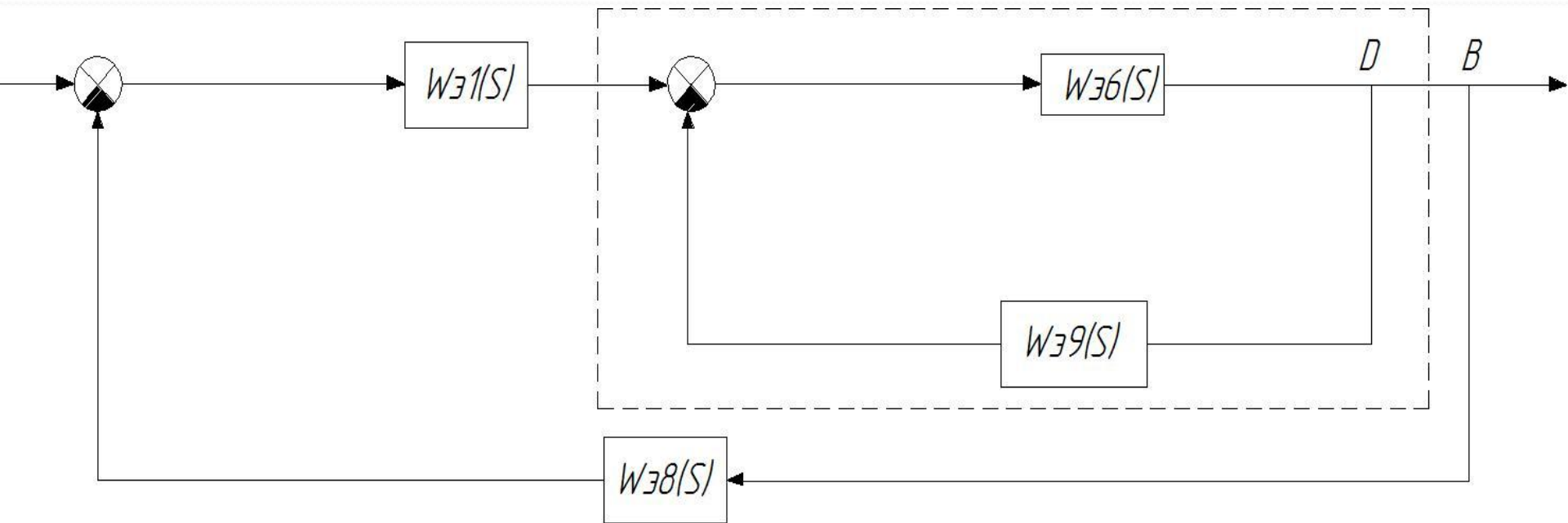


Рисунок 2.8 Преобразованная структурная схема САУ ТП

11 Параллельное соединение звена $W_{37}(S)$ и $W_{35}(S)$ заменим эквивалентной передаточной функцией $W_{39}(S)$.

$$W_{39}(S) = W_{37}(S) + W_{35}(S) = \frac{2}{(S+1)} + \frac{2S^2 + 5S + 1}{2S^2 + 3S + 1}$$



12 Встречно-параллельное соединение с отрицательной обратной связью звеньев $W_{36}(S)$ и $W_{39}(S)$ заменим эквивалентной передаточной функцией $W_{310}(S)$.

$$W_{310}(S) = \frac{W_{36}(S)}{1 + W_{36}(S) \cdot W_{39}(S)} = \frac{25 \cdot (S+1)}{1 + 25 \cdot (S+1) \cdot \left(\frac{2}{(S+1)} + \frac{2S^2 + 5S + 1}{2S^2 + 3S + 1} \right)}$$

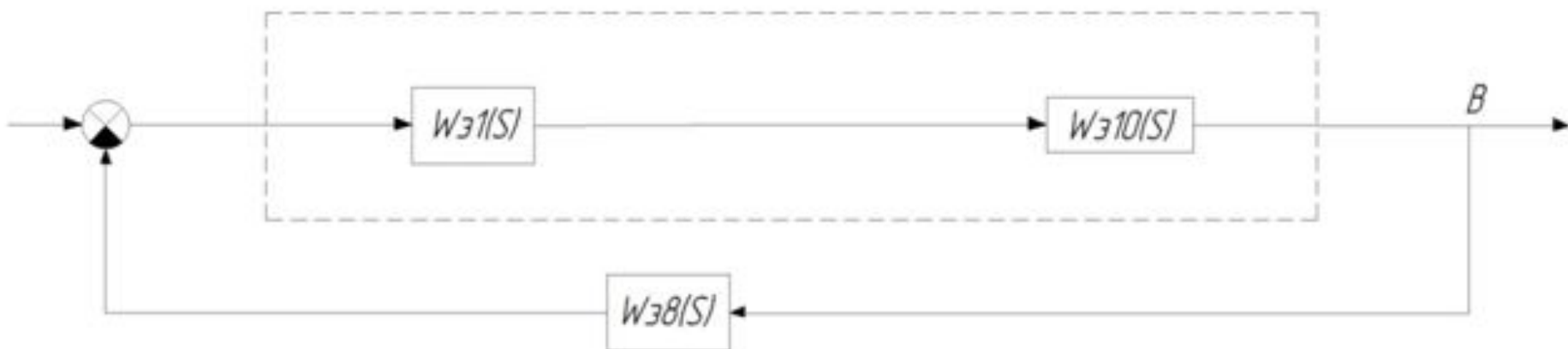
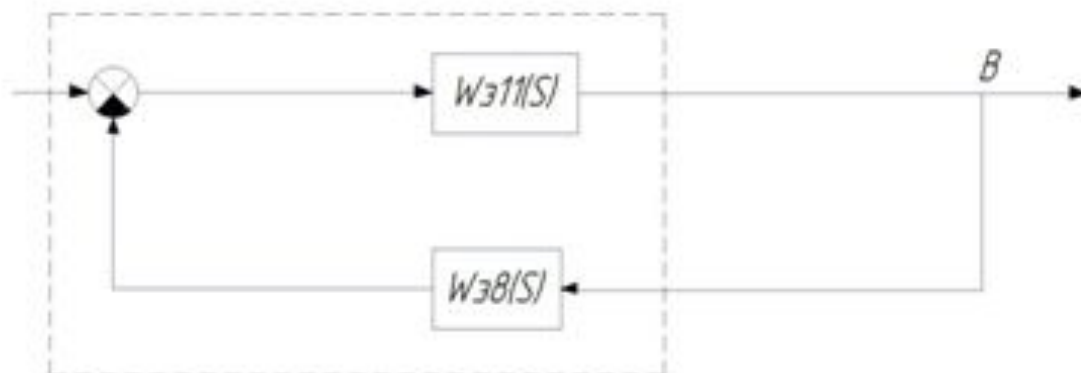


Рисунок 2.10 Преобразованная структурная схема САУ ТП

13 Последовательное соединение звеньев $W_{31}(S)$ и $W_{310}(S)$ заменим эквивалентной передаточной функцией $W_{311}(S)$.

$$\begin{aligned}
 W_{311}(S) &= W_{31}(S) \cdot W_{310}(S) = 0,33 \cdot \frac{25 \cdot (S+1)}{1 + 25 \cdot (S+1) \cdot \left(\frac{2}{(S+1)} + \frac{2S^2 + 5S + 1}{2S^2 + 3S + 1} \right)} \\
 &= \frac{8,25 \cdot (S+1)}{1 + 25 \cdot (S+1) \cdot \left(\frac{2}{(S+1)} + \frac{2S^2 + 5S + 1}{2S^2 + 3S + 1} \right)}
 \end{aligned}$$



14 Встречно-параллельное соединение с отрицательной обратной связью звеньев $W_{Э11}(S)$ и $W_{Э8}(S)$ заменим эквивалентной передаточной функцией $W_{Э12}(S)$.

$$W_{Э12}(S) = \frac{W_{Э11}(S)}{1 + W_{Э11}(S) \cdot W_{Э8}(S)} = \frac{\frac{8,25 \cdot (S+1)}{1 + 25 \cdot (S+1) \cdot \left(\frac{2}{(S+1)} + \frac{2S^2 + 5S + 1}{2S^2 + 3S + 1} \right)}}{1 + \frac{8,25 \cdot (S+1)}{1 + 25 \cdot (S+1) \cdot \left(\frac{2}{(S+1)} + \frac{2S^2 + 5S + 1}{2S^2 + 3S + 1} \right)} \cdot \frac{1}{5 \cdot (S+1)^2}}$$



Преобразованная структурная схема САУ ТП