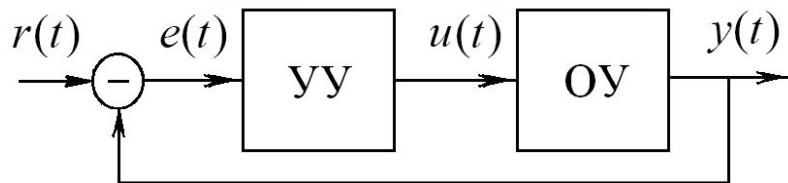

Тема 8.

Анализ показателей качества переходных процессов

Обсуждаемые вопросы

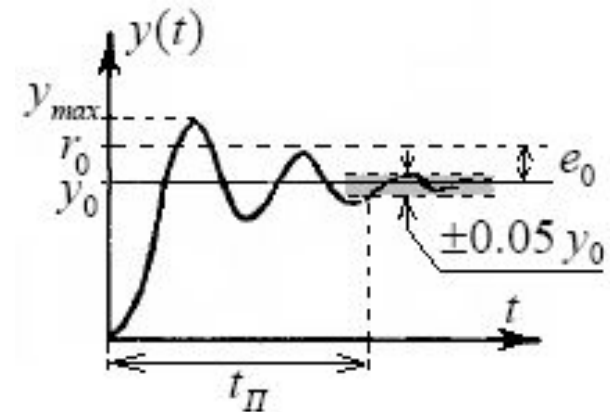
1. *Показатели качества переходных процессов*
2. *Анализ ошибки в установившемся режиме для статической системы*
3. *Анализ ошибки в установившемся режиме для астатической системы*
4. *Скоростная ошибка*
5. *Корневой метод анализа показателей качества переходных процессов*
6. *Диаграмма Вышнеградского*
7. *Форма начального участка переходной функции динамического звена*

Показатели качества переходных процессов



$$r(t) = r_0 \cdot 1(t) \quad e(t) = r(t) - y(t)$$

Значение выхода в установившемся режиме $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0$



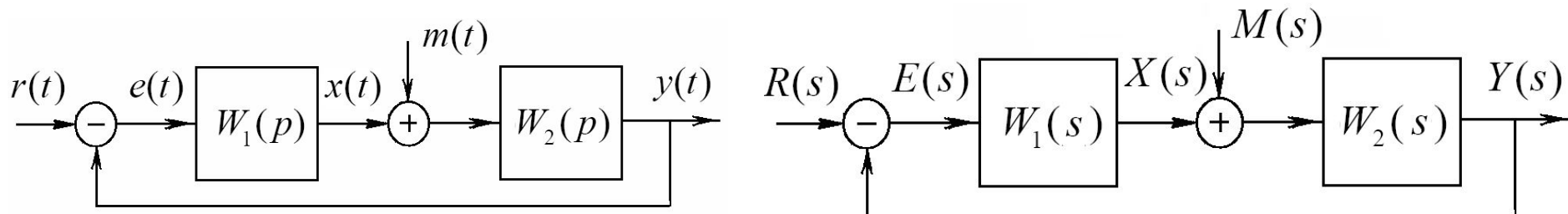
Ошибка в установившемся режиме – $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_0$

Время переходного процесса – время установления переходного процесса на выходе в 5%-й области установившегося режима

Перерегулирование – величина максимального отклонения переходной функции от установившегося режима, выраженная в процентах

$$\sigma = \frac{y_{max} - y_0}{y_0} \cdot 100 \%$$

Анализ ошибки в установившемся режиме для статической системы⁴



$$W_1(s) = \frac{B_1(s)}{A_1(s)} = \frac{b_{m_1+1,1}s^{m_1} + \dots + b_{3,1}s^2 + b_{2,1}s + b_{1,1}}{s^{n_1} + a_{n_1,1}s^{n_1-1} + \dots + a_{3,1}s^2 + a_{2,1}s + a_{1,1}}$$

$$m_1 < n_1$$

$$W_2(s) = \frac{B_2(s)}{A_2(s)} = \frac{b_{m_2+1,2}s^{m_2} + \dots + b_{3,2}s^2 + b_{2,2}s + b_{1,2}}{s^{n_2} + a_{n_2,2}s^{n_2-1} + \dots + a_{3,2}s^2 + a_{2,2}s + a_{1,2}}$$

$$m_2 < n_2$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_1(s) = \frac{b_{1,1}}{a_{1,1}} = k_1 > 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_2(s) = \frac{b_{1,2}}{a_{1,2}} = k_2 > 0$$

$$R(s) = L\{r_0 1(t)\} = \frac{r_0}{s}$$

$$M(s) = L\{m_0 1(t)\} = \frac{m_0}{s}$$

$$e_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Ошибка в установившемся режиме

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad Y(s) = W_2(s)[M(s) + X(s)] \quad X(s) = W_1(s)E(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + W_1(s)W_2(s)} R(s) + \frac{(-1)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} M(s)$$

$$\begin{aligned} e_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + W_1(s)W_2(s)} R(s) + \frac{(-1)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} M(s) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + W_1(s)W_2(s)} R(s) + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(-1)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} M(s) \end{aligned}$$

$$e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + W_1(s)W_2(s)} \cdot \frac{r_0}{s} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(-1)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} \cdot \frac{m_0}{s}$$

$$\text{Полная ошибка} \Rightarrow e_0 = \frac{1}{1 + k_1 k_2} \cdot r_0 + \frac{(-1)k_2}{1 + k_1 k_2} \cdot m_0$$

Относительная ошибка

Полная ошибка в установившемся режиме

$$e_0 = \frac{1}{1 + k_1 k_2} \cdot r_0 + \frac{(-1)k_2}{1 + k_1 k_2} \cdot m_0 \quad \Rightarrow \quad e_0 = e_{0r} + e_{0m}$$

Ошибка по задающему воздействию $r(t) \Rightarrow e_{0r}$

Ошибка по возмущению $m(t) \Rightarrow e_{0m}$

$$k_1 \rightarrow \infty \Rightarrow e_{0r} \rightarrow 0$$

$$k_2 \rightarrow \infty \Rightarrow e_{0r} \rightarrow 0$$

$$k_1 \rightarrow \infty \Rightarrow e_{0m} \rightarrow 0$$

$$k_2 \rightarrow \infty \Rightarrow e_{0m} \rightarrow \frac{-1}{k_1} m_0$$

Относительная ошибка

по задающему воздействию $r(t) \Rightarrow \bar{e}_{0r} = \left| \frac{e_{0r}}{r_0} \right| = \frac{1}{1 + k_1 k_2}$

Относительная ошибка

по возмущению $m(t) \Rightarrow \bar{e}_{0m} = \left| \frac{e_{0m}}{m_0} \right| = \frac{k_2}{1 + k_1 k_2}$

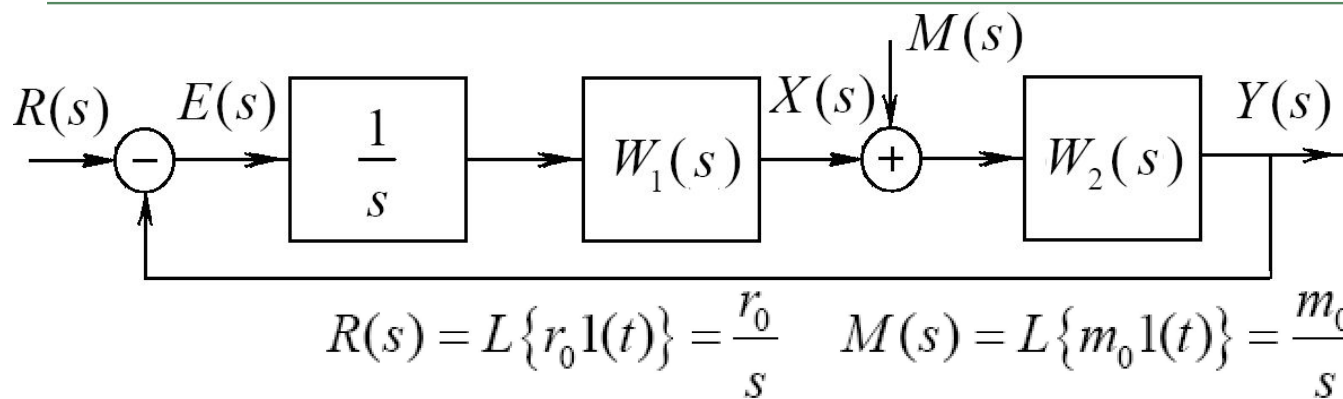
Определение: Система, в которой величина ошибки в установившемся режиме по задающему воздействию $r(t)$ зависит от величины этого воздействия, называется **статической системой** по входу $r(t)$

Определение: Система, в которой величина ошибки в установившемся режиме по возмущению $m(t)$ зависит от величины этого возмущению, называется **статической системой** по входу $m(t)$

Определение: Система, в которой величина ошибки в установившемся режиме по задающему воздействию $r(t)$ равна нулю независимо от величины этого постоянного воздействия, называется **астатической системой** по входу $r(t)$

Определение: Система, в которой величина ошибки в установившемся режиме по возмущению $m(t)$ равна нулю независимо от величины постоянного возмущения, называется **астатической системой** по входу $m(t)$

Анализ ошибки в установившемся режиме для астатической системы с интегратором на входе



$$\lim_{s \rightarrow 0} W_1(s) = k_1$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_2(s) = k_2$$

$$e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{s} W_1(s) W_2(s)} R(s) + \frac{(-1)W_2(s)}{1 + \frac{1}{s} W_1(s) W_2(s)} M(s) \right]$$

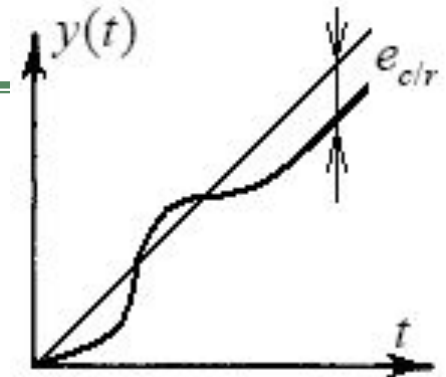
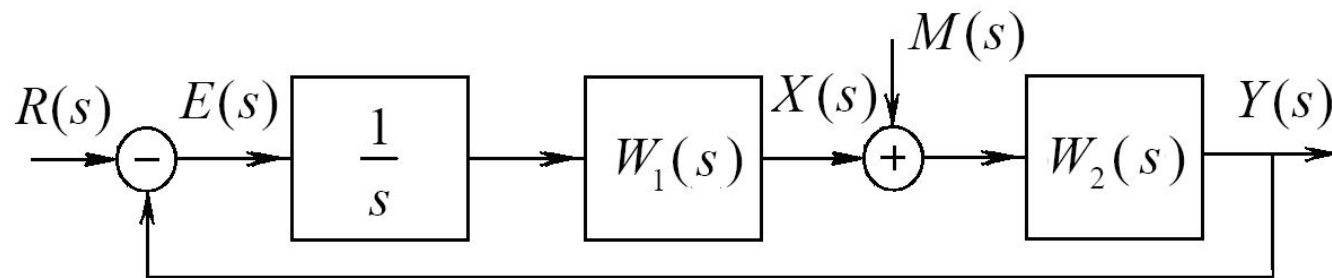
$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s + W_1(s) W_2(s)} R(s) + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 (-1) W_2(s)}{s + W_1(s) W_2(s)} M(s) \Rightarrow$$

$$e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s + W_1(s) W_2(s)} \cdot \frac{r_0}{s} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 (-1) W_2(s)}{s + W_1(s) W_2(s)} \cdot \frac{m_0}{s} \Rightarrow$$

$$e_0 = 0 \cdot r_0 + 0 \cdot m_0$$

Скоростная ошибка по задающему воздействию

9



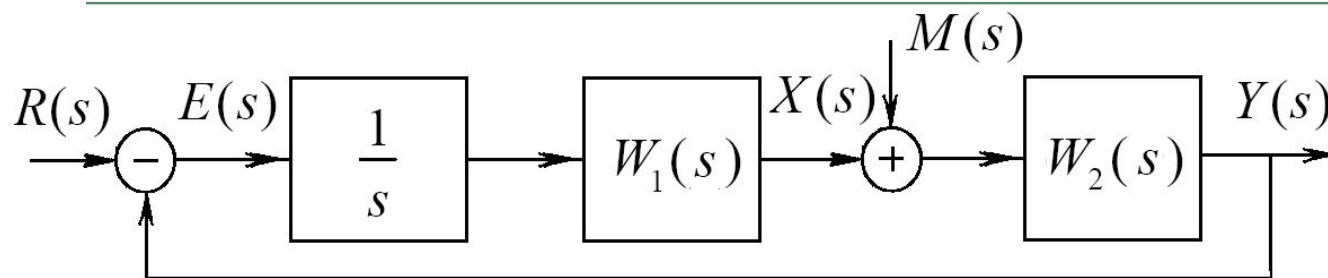
$$\lim_{s \rightarrow 0} W_1(s) = k_1 \quad \lim_{s \rightarrow 0} W_2(s) = k_2 \quad R(s) = L\{a_r t 1(t)\} = \frac{a_r}{s^2} \quad m(t) = 0 \Rightarrow M(s) = 0$$

Скоростная ошибка по входу $r(t)$

$$e_{c/r} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{s} W_1(s) W_2(s)} R(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s + W_1(s) W_2(s)} R(s) \Rightarrow$$

$$e_{c/r} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s + W_1(s) W_2(s)} \cdot \frac{a_r}{s^2} = \frac{1}{k_1 k_2} a_r \Rightarrow \bar{e}_{c/r} = \left| \frac{e_{c/r}}{a_r} \right| = \frac{1}{k_1 k_2}$$

Скоростная ошибка по возмущению



$$\lim_{s \rightarrow 0} W_1(s) = k_1$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_2(s) = k_2$$

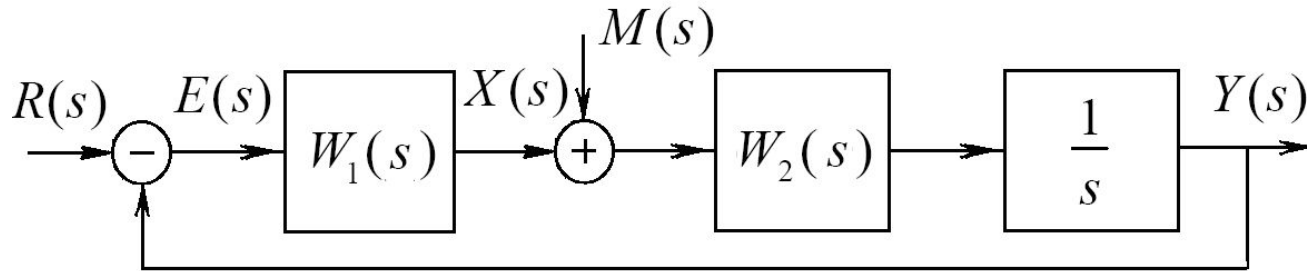
$$r(t) = 0 \Rightarrow R(s) = 0 \quad M(s) = L\{a_m t 1(t)\} = \frac{a_m}{s^2}$$

Скоростная ошибка по входу $m(t)$

$$e_{c/m} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{(-1)W_2(s)}{1 + \frac{1}{s}W_1(s)W_2(s)} M(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(-1)W_2(s)}{s + W_1(s)W_2(s)} M(s) \Rightarrow$$

$$e_{c/m} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(-1)W_2(s)}{s + W_1(s)W_2(s)} \cdot \frac{a_m}{s^2} = \frac{(-1)}{k_1} a_m \Rightarrow \bar{e}_{c/m} = \left| \frac{e_{c/m}}{a_m} \right| = \frac{1}{k_1}$$

Анализ ошибки в установившемся режиме для астатической системы с интегратором на выходе



$$\lim_{s \rightarrow 0} W_1(s) = k_1 \quad \lim_{s \rightarrow 0} W_2(s) = k_2 \quad R(s) = L\{r_0 1(t)\} = \frac{r_0}{s} \quad M(s) = L\{m_0 1(t)\} = \frac{m_0}{s}$$

$$e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + W_1(s)W_2(s)\frac{1}{s}} R(s) + \frac{(-1)W_2(s)\frac{1}{s}}{1 + W_1(s)W_2(s)\frac{1}{s}} M(s) \right]$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s + W_1(s)W_2(s)} R(s) + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(-1)W_2(s)}{s + W_1(s)W_2(s)} M(s)$$

$$e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s + W_1(s)W_2(s)} \cdot \frac{r_0}{s} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(-1)W_2(s)}{s + W_1(s)W_2(s)} \cdot \frac{m_0}{s} \Rightarrow e_0 = 0 \cdot r_0 + \frac{(-1)}{k_1} \cdot m_0$$

Корневой метод анализа показателей качества¹² переходных процессов

$$x^{(n)} + a_n x^{(n-1)} + \dots + a_2 x^{(1)} + a_1 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}$$

$$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1$$

$$A(p) = 0 \Rightarrow p_1, p_2, \dots, p_n$$

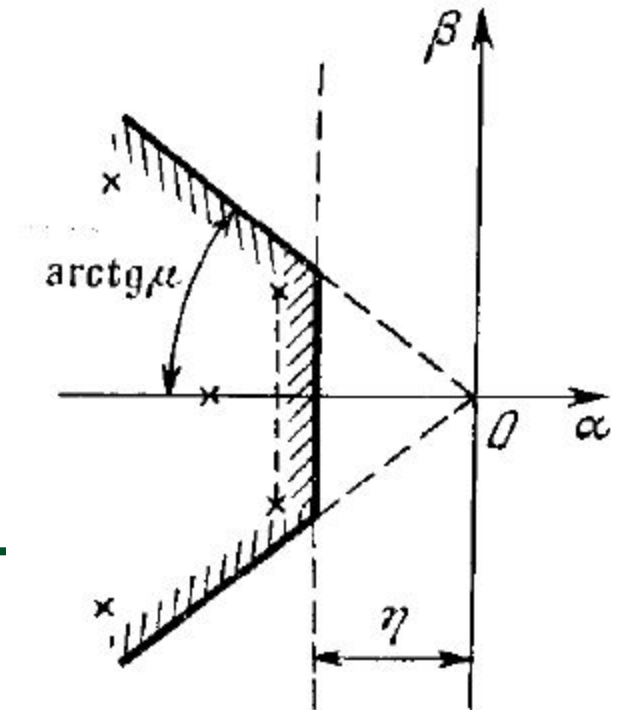
$$p_i = \alpha_i \pm j\beta_i$$

Степень устойчивости:

$$\eta = \min_i |\alpha_i|$$

Колебательность системы:

$$\mu = \max_i \left| \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right|$$



Определение: Степенью устойчивости η называется расстояние от мнимой оси до ближайшего корня или ближайшей пары комплексно-сопряженных корней

$$\eta = \min_i |\alpha_i|$$

$$t_{\Pi} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta_{5\%}} = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0.05} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{\Pi} \approx \frac{3}{\eta}}$$

Определение: Колебательностью системы μ называется тангенс угла наклона, образованного отрицательной вещественной полуосью и лучом из начала координат к корню, у которого модуль отношения мнимой части к действительной части имеет максимальное значение, т.е.

$$\mu = \max_i \left| \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma \approx 100 e^{-\pi/\mu} [\%]}$$

Диаграмма Вышнеградского

$$W(p) = \frac{k}{T^3 p^3 + AT^2 p^2 + BTp + 1} \Rightarrow A(p) = T^3 p^3 + AT^2 p^2 + BTp + 1$$

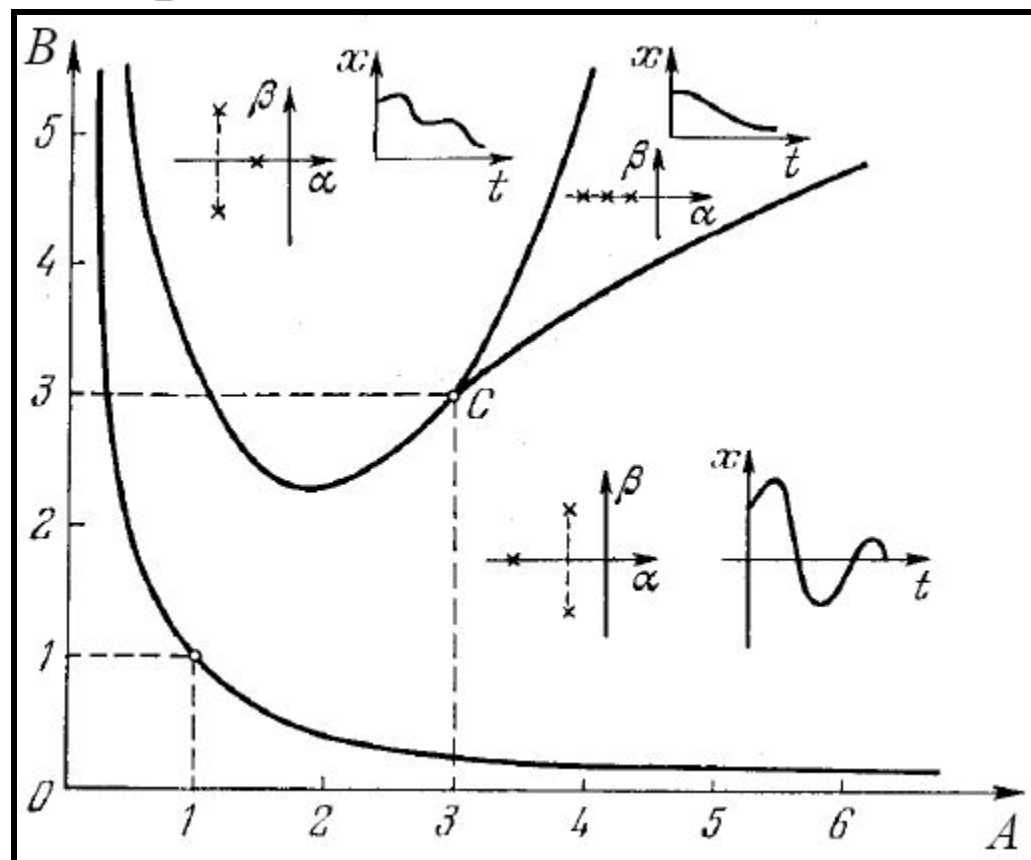
$$q = Tp \Rightarrow A(q) = q^3 + Aq^2 + Bq + 1$$

$$H = \begin{bmatrix} A & 1 & 0 \\ 1 & B & 0 \\ 0 & A & 1 \end{bmatrix}$$

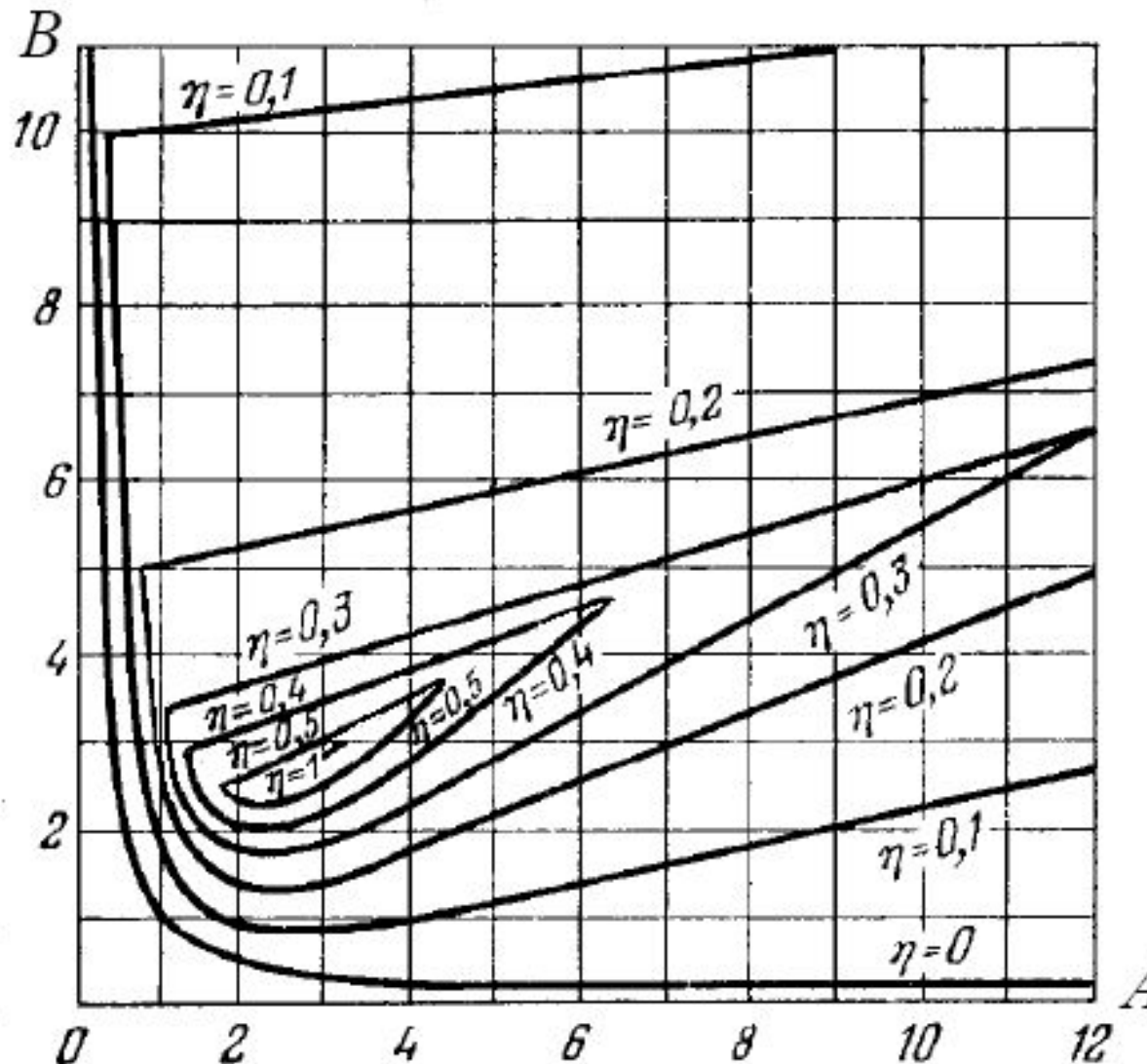
$$\Delta_1 = \det A = A > 0$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} A & 1 \\ 1 & B \end{bmatrix} = AB - 1 > 0$$

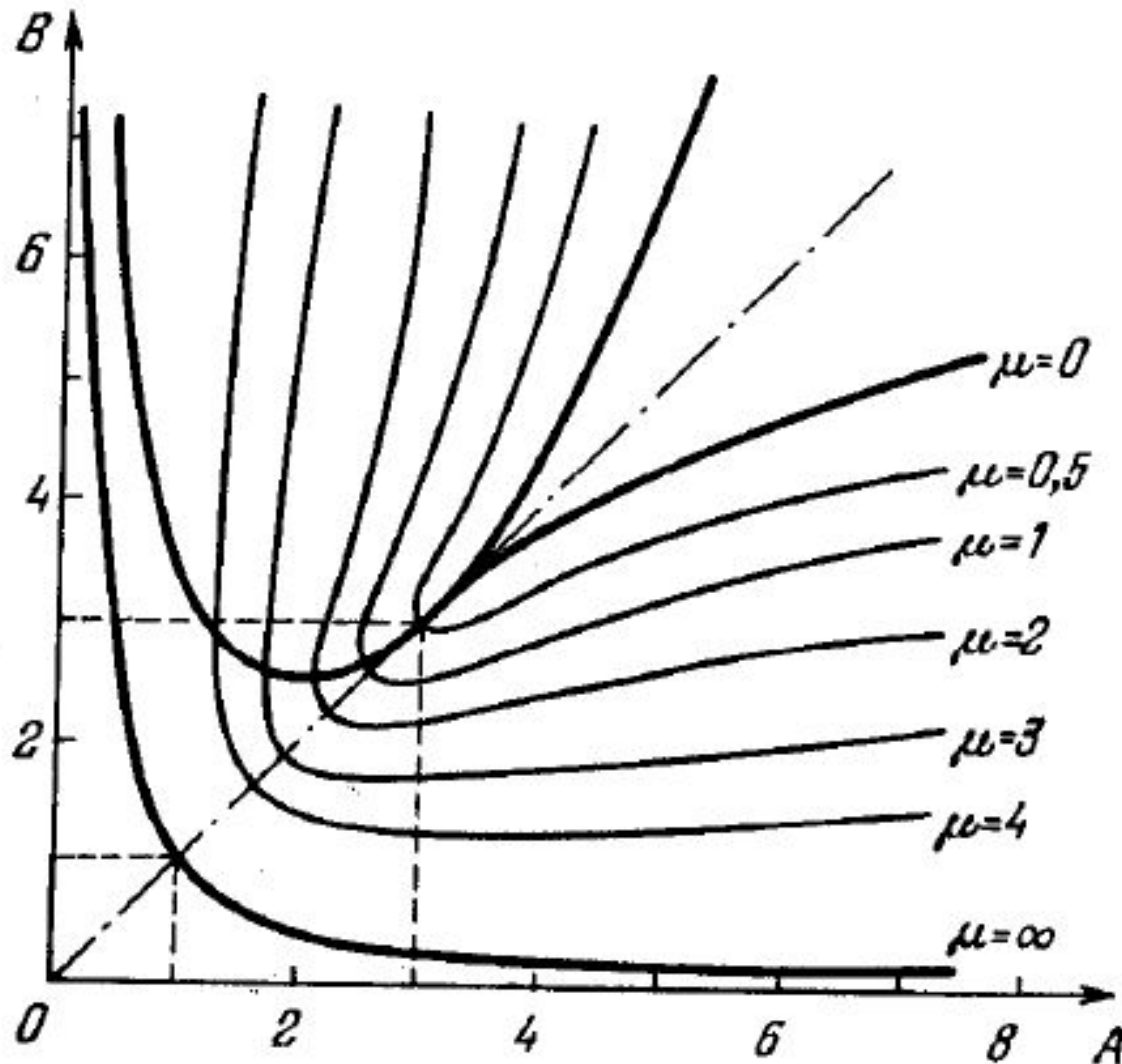
$$\Delta_2 = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{A}$$



Линии равных значений степени устойчивости



Линии равных значений колебательности



Свойства динамического звена на высоких частотах

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_{m+1}s^m + b_ms^{m-1} + \dots + b_3s^2 + b_2s + b_1}{s^n + a_ns^{n-1} + \dots + a_3s^2 + a_2s + a_1} \quad \boxed{m < n}$$

$$= \frac{1}{s^{n-m}} \cdot \frac{b_{m+1} + b_m \frac{1}{s} + \dots + b_3 \frac{1}{s^{m-2}} + b_2 \frac{1}{s^{m-1}} + b_1 \frac{1}{s^m}}{1 + a_n \frac{1}{s} + \dots + a_3 \frac{1}{s^{n-2}} + a_2 \frac{1}{s^{n-1}} + a_1 \frac{1}{s^n}}$$

$$s \rightarrow 0 \Rightarrow W(s) \rightarrow \frac{b_1}{a_1}$$

Вывод: В области низких частот свойства динамического приближаются к свойствам пропорционального звена

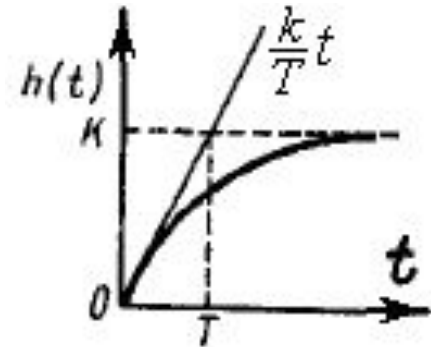
$$s \rightarrow \infty \Rightarrow W(s) \rightarrow \frac{b_{m+1}}{s^{n-m}}$$

Вывод: В области высоких частот свойства динамического звена приближаются к свойствам $(n-m)$ последовательно-соединенных интегрирующих звеньев

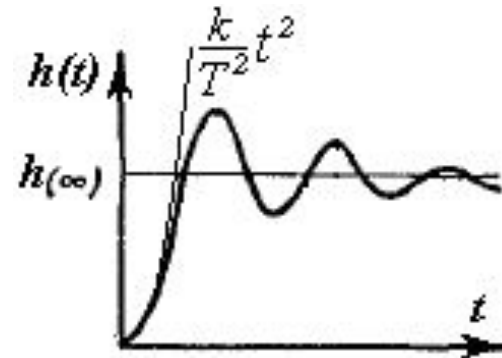
Форма начального участка переходной функции динамического звена

18

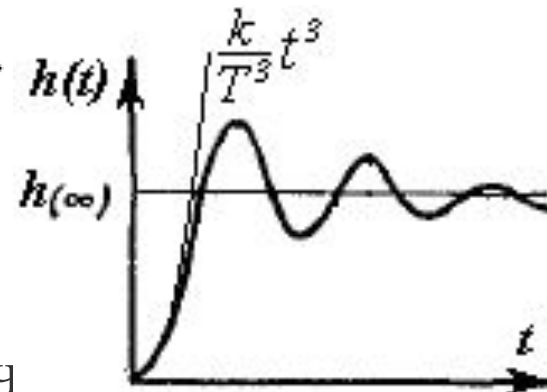
$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1} \Rightarrow s \rightarrow \infty \Rightarrow W(s) \rightarrow \frac{k}{T} \cdot \frac{1}{s}$$



$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2dT s + 1} \Rightarrow$$
$$s \rightarrow \infty \Rightarrow W(s) \rightarrow \frac{k}{T^2} \cdot \frac{1}{s^2}$$



$$W(s) = \frac{k}{T^3 s^3 + AT^2 s^2 + BT s + 1} \Rightarrow$$
$$s \rightarrow \infty \Rightarrow W(s) \rightarrow \frac{k}{T^3} \cdot \frac{1}{s^3}$$



Тема 9.

Частотные методы анализа показателей качества переходных процессов
