



Применение производной при исследовании функций



Доказать, что функция монотонна на заданном промежутке:

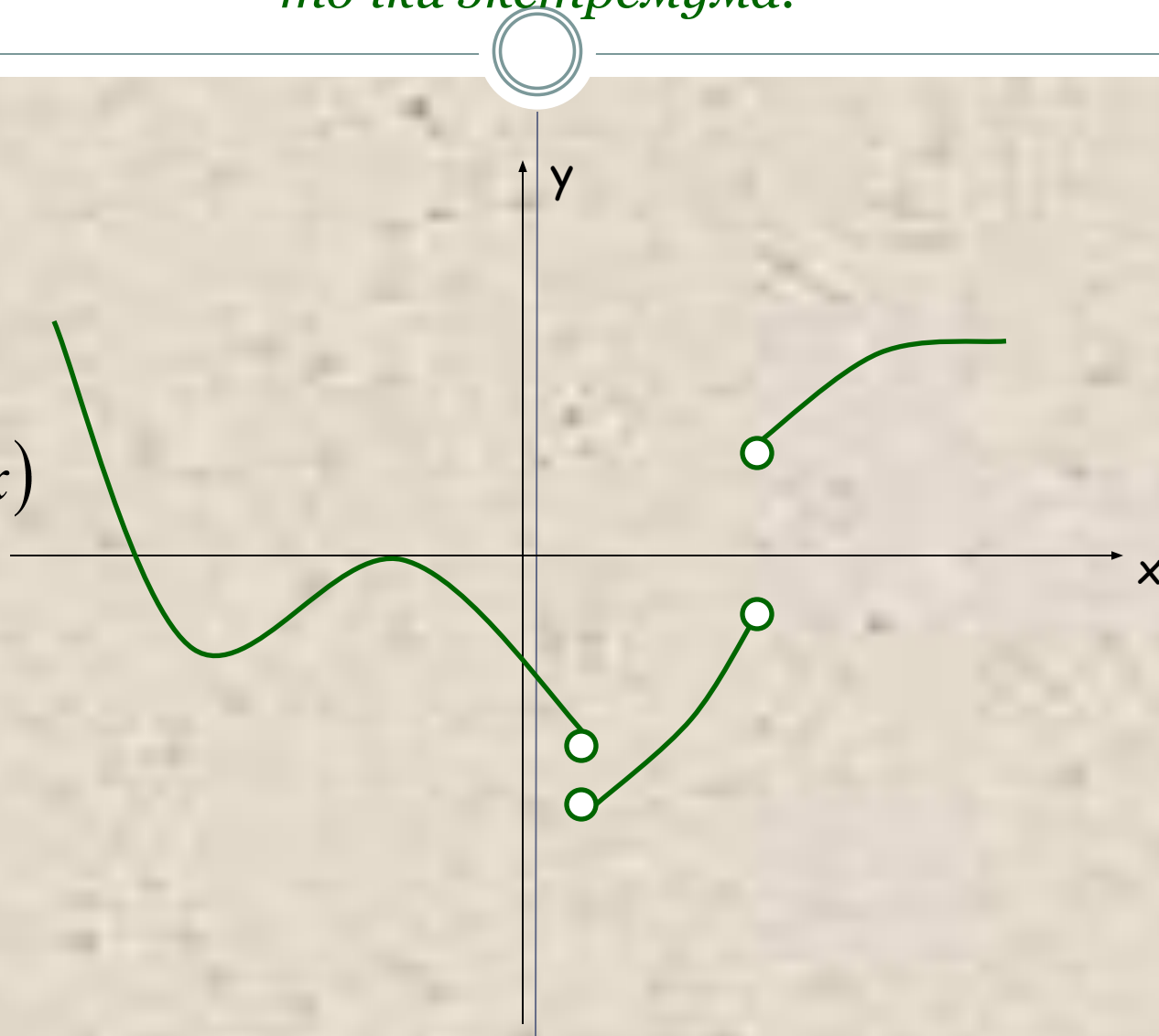
$$y = 4x - 2008; \text{ если } x \in \mathbb{R};$$

$$y = -2x + \sin x; \text{ если } x \in \mathbb{R};$$

$$y = x^5 + x^3 - 448; \text{ если } x \in \mathbb{R}.$$

Дана непрерывная на \mathbb{R} функция. Используя график производной этой функции, определите, имеет ли функция точки экстремума.

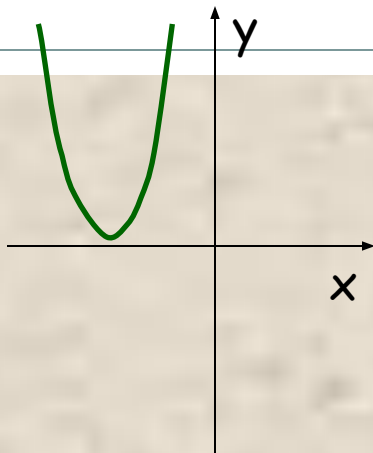
$$y = f'(x)$$



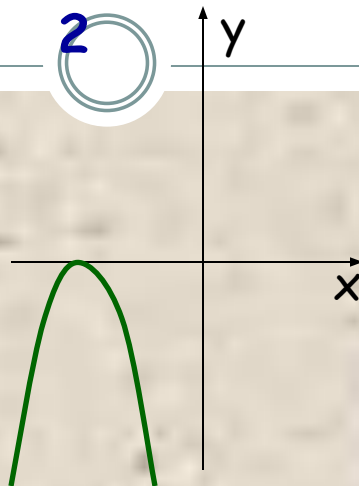
Найти пары

$(f(x); f'(x))$.

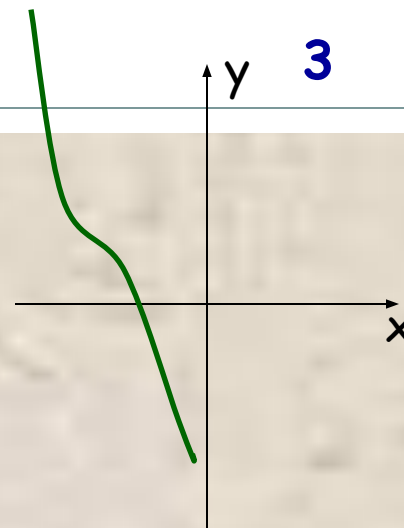
1



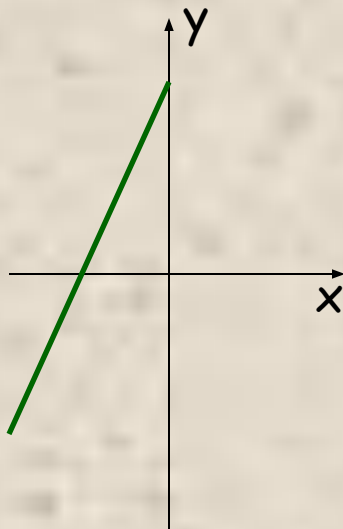
2



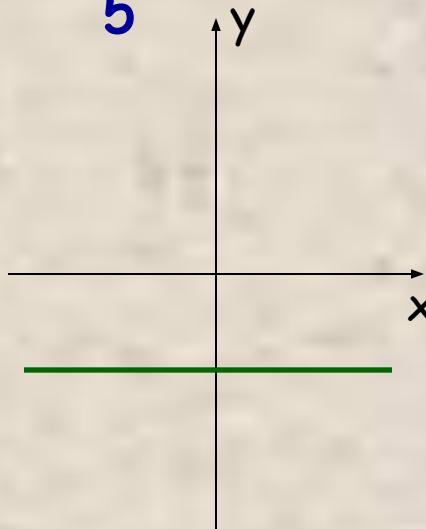
3



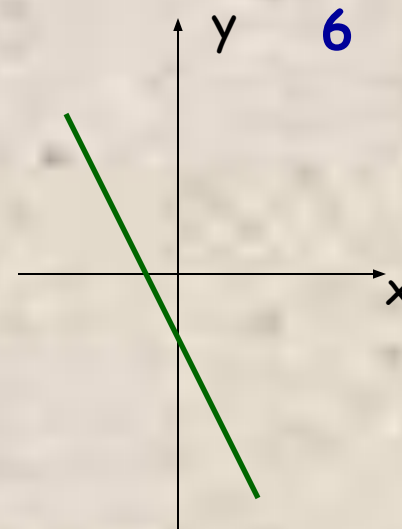
4



5



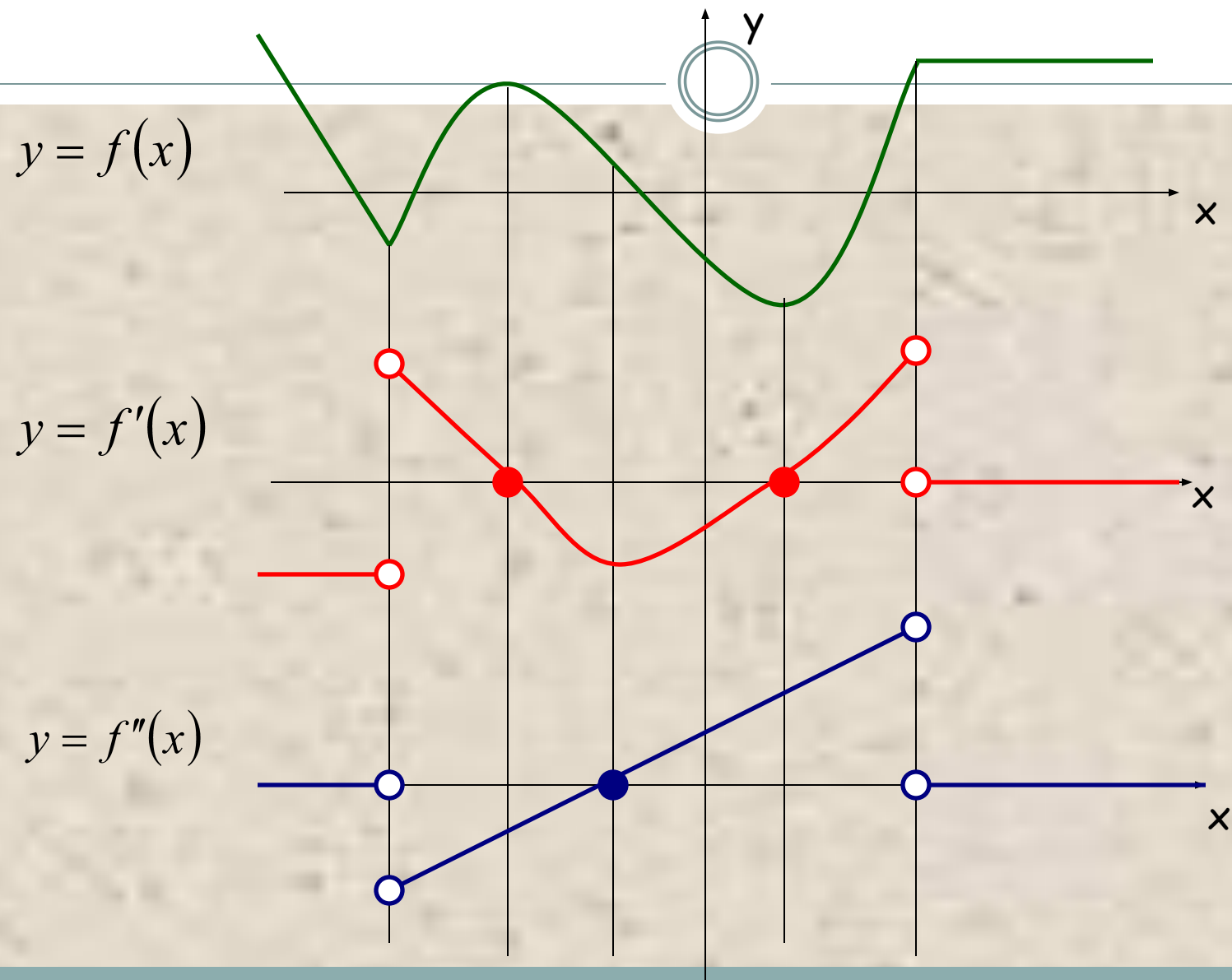
6



(1; 4); (3; 2); (6; 5)

Нарисовать эскизы графиков

$f'(x)$ и $f''(x)$

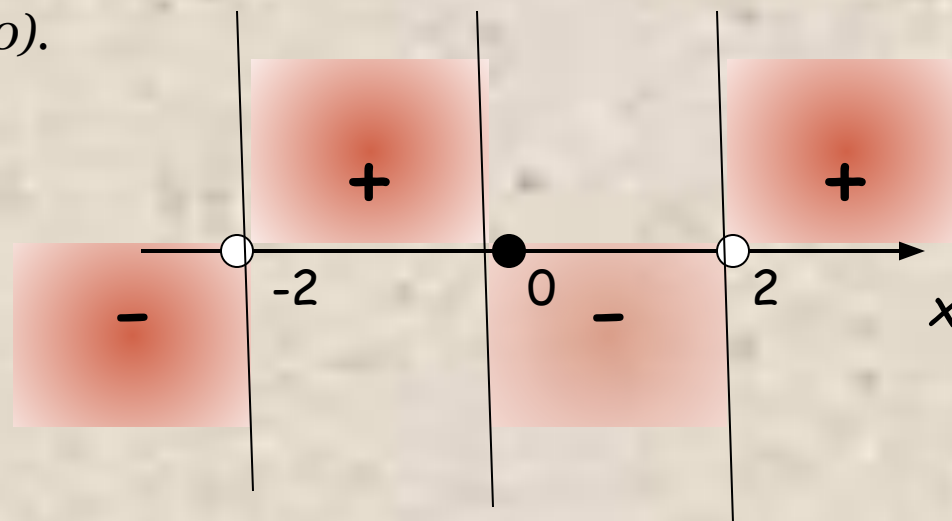


Исследовать функцию
и построить её график

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty);$$

2. Функция нечётная, график симметричен относительно начала отсчёта.
3. Точки пересечения с осями:
с Oy : $(0; 0)$; с Ox : $(0; 0)$.
4. Промежутки знакопостоянства функции:



5. Вертикальные асимптоты:

$x = 2$ и $x = -2$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left| \frac{8}{0} \right| = \infty,$$

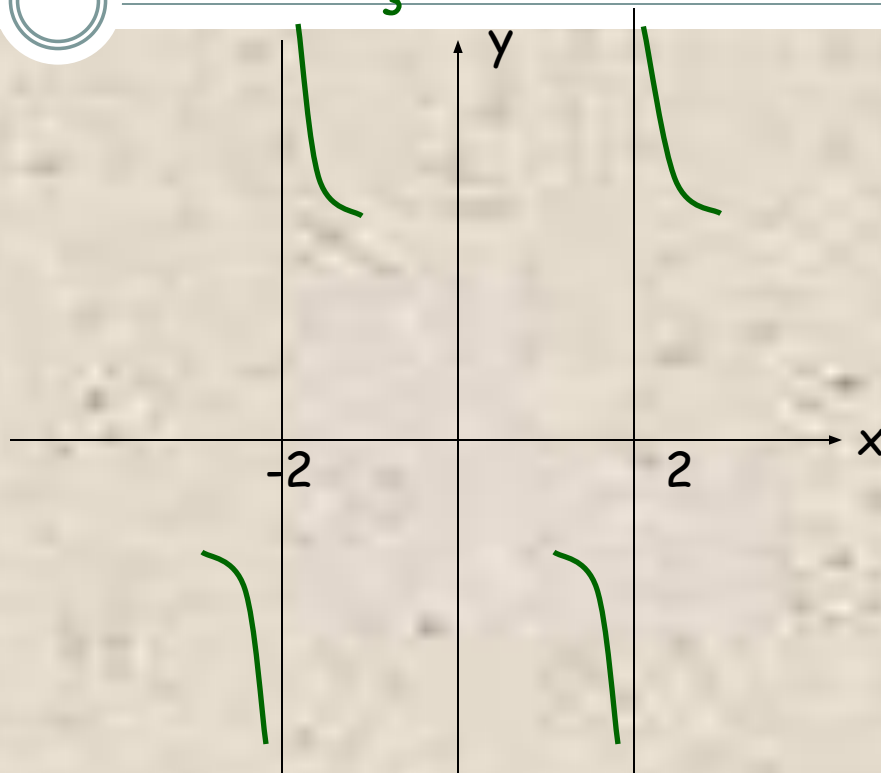
$$\lim_{x \rightarrow -2_-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2_+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left| \frac{-8}{0} \right| = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2_-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2_+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty.$$

ЭСКИ

3



6. Наклонные асимптоты

$$y = x$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x^2 - 4)x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(x^2 - 4)x} = 1.$$

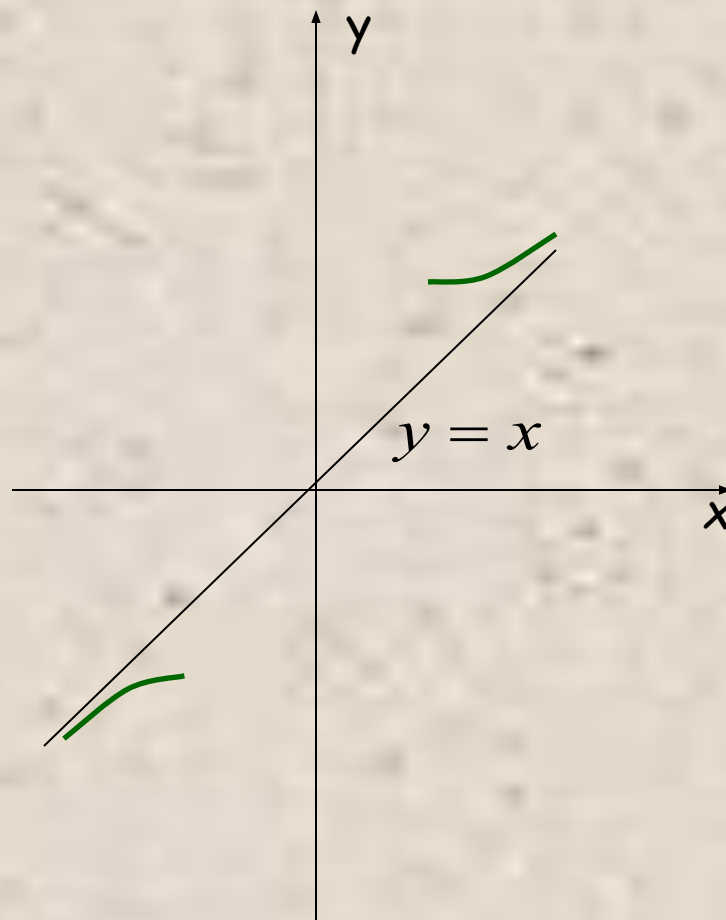
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0_+;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0_-.$$

ЭСКИ

3



7. Исследование на монотонность и наличие точек экстремума.

$$f'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2};$$

$$f'(x) = 0, \text{ если } x^4 - 12x^2 = 0 \\ x^2 = 0; \quad x = \pm 2\sqrt{3}.$$

$f'(x)$ – не существует, если

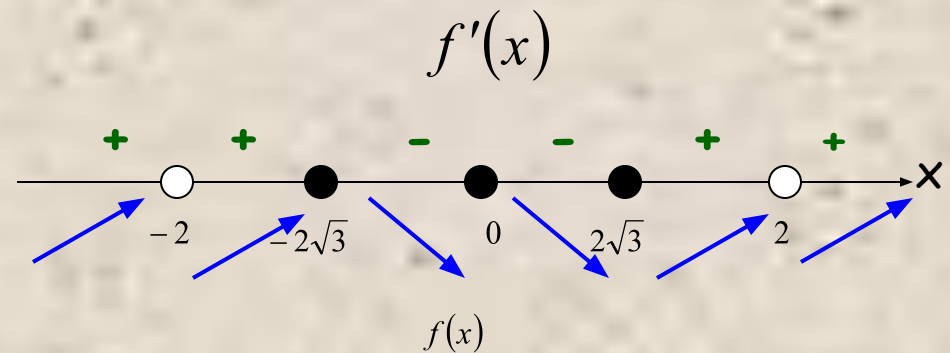
$$(x^2 - 4)^2 = 0, \\ x = 2; \quad x = -2.$$

$x = -2\sqrt{3}$ – точка локального максимума

$$f(-2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$$

$x = 2\sqrt{3}$ – точка локального минимума

$$f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$$

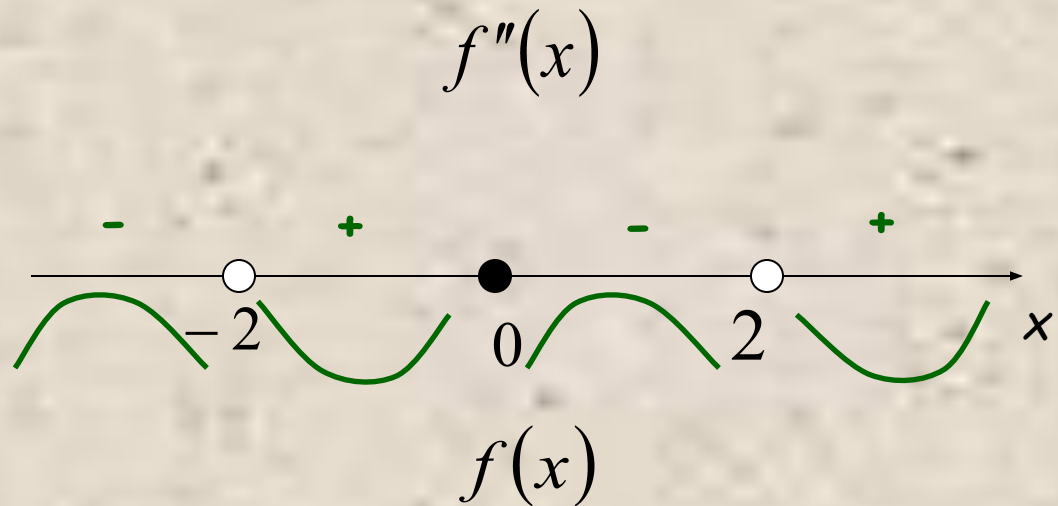


Исследование на направление выпуклостей и наличие точек перегиба.

$$f''(x) = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3};$$

$$f''(x) = 0, \text{ если } x = 0.$$

$f''(x)$ – не существует, если
 $x = -2, x = 2$



$(0; f(0))$ – точка перегиба

Эски

3

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

