



**Биномиальное
распределение.
Распределение Пуассона.**

Вопросы:

- Классическое определение вероятности.
- Понятие биномиального распределения.
- Понятие распределения Пуассона.
- Основные свойства распределения Пуассона.

1. Классическое определение вероятности

Вероятность — степень (мера, количественная оценка) возможности наступления некоторого события.

Основными понятиями о случайном событии являются следующие:

1. **Испытание** – это опыт, наблюдение явления, эксперимент. *Например: бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости и т.д.*
2. **Событие** – это результат, исход испытания. *Например, выпадение герба или цифры, попадание в цель или промах, выпадение того или иного числа игральной кости и т.д.*
3. **Два события называют совместными** – если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании. *Например, испытание: однократное бросание игральной кости. Событие A – появление четырех очков, событие B – появление четного числа очков. События A и B совместные.*
4. **Два события называются несовместимыми**, если появление одного из них исключает появление другого. *Например, испытание: однократное бросание монеты. Событие A – выпадение герба, событие B – выпадение цифры.*
5. **Два события называют противоположными** – если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит.

Классическое определение вероятности

6. **События называются достоверными** – если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и невозможным, если в данном испытании оно заведомо не может произойти. *Например, испытание: извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие A – вынут белый шар – достоверное событие; B – вынут черный шар – не достоверное.*
7. **Событие называется случайным** – если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании. *Например, Событие A_6 – выпадение шести очков при бросании игральной кости – случайное. Оно может наступить. Может и не наступить. Например, Событие A_{98} – прорастание девяноста восьми зерен пшеницы из ста – случайное.*
8. **Элементарные события** – это события $A_1, A_2 \dots A_n$ образующие полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий. *Например, бросание игральной кости.*
9. **Вероятность $P(A)$ события A** называется отношение числа элементарных событий, благоприятствующих событию A , к числу все элементарных событий, т.е.:
 $P(A) = m/n$. *Например, вычисли вероятность выпадения герба при бросании монеты. Событие A – выпадение герба и событие B – выпадение цифры – образуют полную группу несовместимых событий. Значит, здесь $n=2$. Событию A благоприятствует лишь одно событие – само A , т.е. $m=1$ / Поэтому $P(A)=1/2$.*

Основными операциями над событиями

- 1. Событие $A+B$ называют суммой** событий A и B , если происходит хотя бы одно из событий A или B . *Пример. В урне находятся красные, белые и черные шары. Опыт – вынимается один шар из урны. Возможны следующие события: A – вынут красный шар, B – вынут белый шар, C – вынут черный шар. Событие $A + B$ означает, что произошло событие «вынут красный или белый шар» или иначе – «вынут нечерный шар», а событие $B + C$ «вынут не красный шар» или иначе – «вынут белый или черный шар».*
- 2. Событие $A*B$ называют произведением** событий A и B , если проходят оба события A и B . *Пример. Опыт – вытаскивание карт из колоды. Событие A – из колоды карт вынута дама, B – из колоды карт вынута карта пиковой масти. Очевидно, AB есть событие «вынута дама пик». Пример. Опыт – бросается игральный кубик. Рассмотрим следующие события: A – число выпавших очков меньше 5, B – число выпавших очков больше 2, C – число выпавших очков четное. Тогда событие ABC заключается в том, что выпало 4 очка.*
- 3. Разностью событий A и B** называется событие C , состоящее в том, что A происходит, а B не происходит и обозначается $A \setminus B$, читается « A без B ».
- 4. Событие \bar{A} , состоящее в том, что событие A не происходит, называют противоположным к событию A .**

Комбинаторные формулы

1. Число перестановок n различных элементов:

$$P_n = n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$$

2. Число размещения m различных элементов на n местах (число способов выбрать m элементов из n различных элементов, если порядок в котором они выбраны, имеет значение).

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n * (n-1) * \dots * (n-m+1)$$

3. Число сочетаний из n различных элементов по m элементов (число способов выбрать m элементов из n различных элементов, если порядок, в котором они выбраны, не имеет значения, а важно лишь, какие элементы выбраны).

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m! * (n-m)!} = \frac{n * (n-1) * \dots * (n-m+1)}{m!}$$

Биномиальное распределение

Биномиальное распределение — распределение количества «успехов» в последовательности из n независимых случайных экспериментов, таких, что вероятность «успеха» в каждом из них постоянна и равна p .

Закон биномиального распределения выражается как формулой Бернулли так и формулой бинома Ньютона.

Схема Бернулли.

Схемой Бернулли называется последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода – «успех» и «неудача», при этом успех в каждом испытании происходит с одной и той же вероятностью p , а неудача – с вероятностью $q=1-p$. Причем событие Успех в n испытаниях появится m раз, событие Неудача будет встречаться $n-m$ раз.

Теорема: для любого $m=0.1.2...n$ вероятность получить в n испытаниях m успехов равна:

$$P_n(m) = C_n^m * p^m * q^{n-m},$$

Набор вероятностей называется биномиальным распределением вероятностей.

Доказательство: событие A означает, что в n испытаниях схемы Бернулли произошло ровно m успехов. Рассмотрим один элементарный исход из события A , когда первые m испытаний завершились успехом, остальные неудачей. Поскольку испытания независимы, вероятность такого элементарного исхода равна $p^m * (1 - p)^{n-m}$. Другие элементарные исходы из события A отличаются лишь расположением m успехов на n местах. Есть ровно C_n^m способов расположить m успехов на n местах. Поэтому событие A состоит C_n^m элементарных исходов, вероятность каждого из которых равна $p^m * q^{n-m}$.

Решение задачи на применение формулы Бернулли

Задача 1: Из n аккумуляторов за год хранения k выходит из строя. Наудачу выбирают m аккумуляторов. Определить вероятность того, что среди них l исправных.
 $n=100, k=7, m=5, l=3$.

Решение: Имеем схему Бернулли с параметрами $p=7/100=0,07$ (вероятность того, что аккумулятор выйдет из строя), $n=5$ (число испытаний), $k=5-3=2$ (число «успехов», неисправных аккумуляторов).

Будем использовать формулу Бернулли (вероятность того, что в n испытаниях событие произойдет k раз).

$$P_n(k) = C_k^n \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Получаем

$$P_5(2) = C_2^5 \cdot 0,07^2 \cdot (1-0,07)^{5-2} = 5!3!2! \cdot 0,07^2 \cdot 0,93^3 = 0,0394.$$

Ответ: 0,0394.

Биномиальное распределение с помощью формулы бинома Ньютона

$$\sum_{m=0}^n P_n(m) = (p + q)^n$$

Рассматривая вероятность появления двух равновероятных событий, получаем их следующее распределение:

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = 1$$

При трех независимых испытаниях возможно $2^3=8$ исходов, вероятности которых распределяются следующим образом:



Пример расчета вероятности с применение бинома Ньютона

Допустим, мы стоим на улице и считаем проходящих прохожих, подразделяя их по полу.

Каждые прошедшие два человека объединим в пары. Эти пары могут иметь следующие варианты: МЖ, ММ, ЖЖ, ЖМ. Вероятность появления мужчины обозначим буквой a , а женщины – b .

Вероятность прохождения мужчин и женщин одинакова, т. е. $a = b = \frac{1}{2}$.

Вероятность появления один за одним двух мужчин или двух женщин в соответствии с теорией вероятности равна $a \cdot a = a^2$ или $b \cdot b = b^2$.

В нашем случае она равна $0,5^2 = 0,25$, т.е. это один случай из 4.

Сочетание появления друг за другом мужчины и женщины равна $ab + ab = 2ab$. Таким образом, рассматривая вероятность появления двух равновероятных событий, получаем их следующее распределение.



Распределение Пуассона

Характер биномиальной кривой определяется двумя величинами: числом испытаний n и вероятностью p ожидаемого результата.

При $p=q$ - биномиальная кривая строго симметрична и по мере увеличения числа испытаний приобретает все более плавный ход, приближаясь к своему пределу – нормальной кривой.

Если $p \neq q$ - Биномиальная кривая становится асимметричной и тем сильнее чем больше разница между p и q .

Когда вероятность события очень мала и исчисляется сотыми и тысячными долями единицы, распределение частот таких редких событий в n независимых испытаниях становится крайне асимметричным.

Для описания такого рода распределений редких и маловероятных событий служит формула Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{a^m}{m!} * e^{-a} = \frac{a^m}{m! * e^a}$$

$a=np$ – наивероятнейшая частота ожидаемого события

m – частота ожидаемого события в n независимых испытаниях;

Пример расчёта

Формула Пуассона позволяет определить вероятность для любых значений a от 0 до n .

Например, для $a=2$ вероятность того, что событие A в данных условиях не осуществится, будет равна

$$P_0 = \frac{2^0}{0! * e^2} = 0,13$$

Для единичного осуществления:

$$P_1 = \frac{2^1}{1! * e^2} = 0,27$$

