Функции нескольких переменных.

План

- 1. Определение функций нескольких переменных. Непрерывность функций нескольких переменных.
- 2. Частные производные.
- 3. Экстремумы функций нескольких переменных.
- 4. Метод наименьших квадратов.
- 5. Функции нескольких переменных в задачах экономики.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА И ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

- В общих чертах построение дифференциального и интегрального исчисления было завершено в трудах И.Ньютона(1643-1727) и Г.Лейбница(1646-1716) к концу 17 века .
- Частные производные появились в 17 веке в трудах И. Ньютона и Г.Лейбница. Частные производные являются одним из основных инструментом исследования функций в математическом анализе, в частности используются при отыскании экстремумов, а также при решении классических задач на оптимизацию.
- Для простоты в основном ограничимся рассмотрением случаев функций двух переменных.

Определение функции нескольких переменных.

Пусть каждой точке $M(x,y)$ некоторого множества плоскости поставлено в соответствие число z, тогда говорят, что на множестве задана *функция двух переменных* $z=f(x,y)$. Используется также запись $z=f(M)$.

Аналогично определяется понятие функции нескольких переменных.

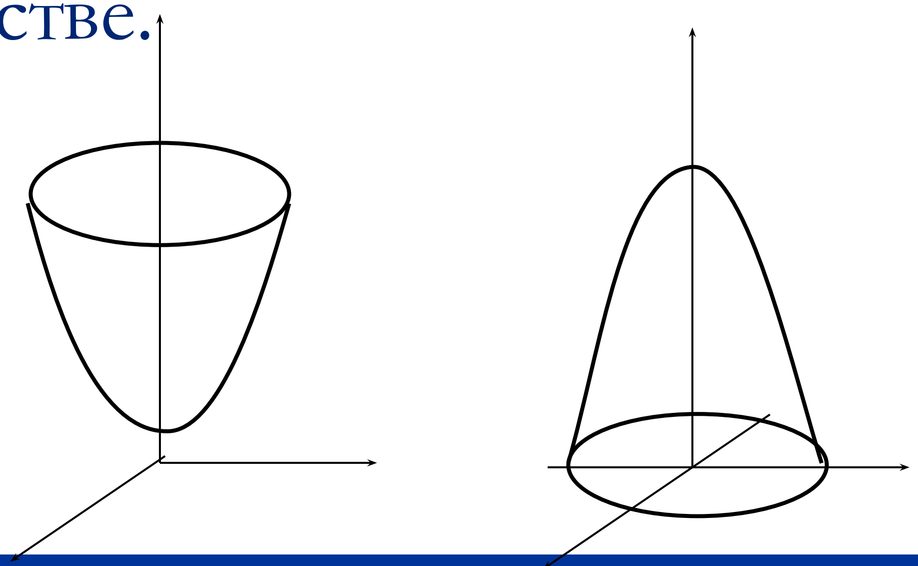
Примеры. Функция спроса *D* – зависимость спроса D на некоторый товар от различных факторов (цены, дохода).

- Функция предложения S – зависимость предложения S некоторого товара от различных факторов (цены, дохода).
- Функция полезности $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ – полезность n приобретенных товаров .
- Функция Кобба – Дугласа $Q = Q_0 K^{\alpha} L^{\beta}$

где K – объем производственных фондов, L – затраты труда, Q – объем выпускаемой продукции. По экономическому смыслу $K \geq 0$, $L \geq 0$, т.е. О.О.Ф. Кобба – Дугласа является первый квадрант.

График *функции двух переменных*

представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве.



Линия уровня $f(x,y)$ -множество точек плоскости, таких что $f(x,y)=C$. .Линии уровня функции полезности называют кривыми безразличия.

Непрерывность функций нескольких переменных.

- Пусть точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ принадлежит области определения функции $z=f(x,y)$. Функция $z=f(x,y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0\left(x_0, y_0\right)$, если имеет место равенство $$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f\left(x,y\right)=f\left(x_0, y_0\right)$$
- Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в области*.

Частные производные.

Определение. *Частной производной по х* от функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения z по *х* к приращению Δx при стремлении Δx к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta x}$$

- Аналогично определяется *частная производная по y*

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

- *Частной производной по x* от функции называется производная по x, вычисленная в предположении, что y – постоянная. *Частной производной по y* от функции называется производная по y, вычисленная в предположении, что x – постоянная.
- **Пример.** $z=x^2y^3, z'_x=?, z'_y=?$
- **Решение.**

$$z'_x=y^3\cdot 2x=2xy^3, z'_y=x^2\cdot 3y^2=3x^2y^2$$

- *Рассмотрим функцию Кобба – Дугласа.*

$$Q = Q_0 K^{\alpha} L^{\beta}$$

- Частная производная $\frac{\partial Q}{\partial L}$ называется предельная производительность труда (приблизительно объем выпуска продукции при увеличении затрат труда на единицу). $\frac{\partial Q}{\partial K}$ называется предельная фондоотдача (приблизительно объем выпуска продукции при увеличении фондов на единицу).

Дифференциал .

- Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M(x, y)$, если её полное приращение в данной точке может быть представлено в виде:
- $$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$
- где *A*, *B* – постоянные, α, β - бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.
- *Дифференциалом* функции двух переменных называется главная линейная часть её приращения.

- Формула для вычисления дифференциала:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

- Рассмотрим функцию Кобба – Дугласа. При небольшом изменении числа рабочих и объема фондов изменение объема выпускаемой продукции вычисляется с помощью предельной производительности труда и предельной фондоотдачи.

$$\Delta Q \approx dQ = \frac{\partial Q}{\partial L}dL + \frac{\partial Q}{\partial K}dK$$

- **Теорема .** Пусть в некоторой окрестности точки $M(x,y)$ функция $z=f(x,y)$ имеет частные производные по всем аргументам, непрерывные в точке $M(x,y)$. Тогда эта функция дифференцируема в точке $M(x,y)$.
- **Теорема.** Если функция $z=f(x,y)$ и её частные производные $f'_x, f'_y, f''_{yx}, f''_{xy}$ определены и непрерывны в точке $M(x,y)$ и в некоторой её окрестности, то в этой точке .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Градиент. Производная по направлению.

- Градиент.

$$\vec{grad} f = \frac{df}{dx}\vec{i} + \frac{df}{dy}\vec{j} = f'_x\vec{i} + f'_y\vec{j}$$

- Производная по направлению.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = f'_x(x_0, y_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cdot\cos\beta$$

- Градиент указывает направление наискорейшего возрастания функции в данной точке, а противоположное ему направление указывает направление быстрейшего убывания функции в данной точке.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\overrightarrow{grad} f, \vec{n}) = \text{ПР}_l \overrightarrow{grad} f$$

- Градиент функции полезности называется вектор предельных полезностей.

- **Производная сложной функции**

$$z = F(u,v), u = \phi(x,y), v = \psi(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

- **Вычисление частных производных неявно заданных функций**

- Производная неявной функции ,заданной уравнением $F(x,y)=0$ выражается формулой

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}, \quad F'_y(x,y) \neq 0$$

$f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$

Необходимое условие экстремума.

- Точку $a \in R^n$ называют точкой максимума (соответственно – минимума) для функции
- $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$, если эта функция непрерывна в точке ***a*** и существует окрестность ***U***(***a***), в которой выполняется неравенство $f(x) \le f(a)$ (соответственно – $f(x) \ge f(a)$).

Необходимое условие экстремума для функции нескольких переменных.

- ***Теорема .*** Если функция $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ имеет экстремум в какой-либо точке, то все ее частные производные в этой точке (если они существуют) необходимо равны нулю.
- Положим для функции $z=f(x,y)$

$$\Delta(M_0)=z''_{xx}(M_0)\cdot z''_{yy}(M_0)-(z''_{xy}(M_0))^2$$

- **Теорема** (*достаточное условие экстремума*). Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности своей стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$
.
- Тогда:
- а)если $\Delta(M_0) > 0$ и $z''_{xx}(M_0) < 0$, то M_0 – точка максимума функции;
- б) если $\Delta(M_0) > 0$ и $z''_{xx}(M_0) > 0$, то M_0 – точка минимума функции;
- в) если $\Delta(M_0) < 0$, то в точке M_0 экстремума нет.

- При отыскании экстремумов функции многих переменных часто возникают задачи, связанные с так называемым *условным экстремумом*. Это понятие можно разъяснить на примере функции двух переменных.
- Пусть заданы функция и линия L на плоскости $0xy$. Задача состоит в том, чтобы на линии L найти такую точку $P(x, y)$, в которой значение функции является наибольшим или наименьшим по сравнению со значениями этой функции в точках линии L, находящихся вблизи точки P. Такие точки P называются *точками условного экстремума* функции на линии L.

- **Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области**
- Для того чтобы найти необходимо:
- 1) найти частные производные функции и критические точки;
- 2) исследовать функцию на условный экстремум на границе области;
- 3) вычислить значения функции в критических точках и точках, подозрительных на условный экстремум;
- 4) из найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

- Большой класс задач составляют оптимизационные.Рассмотрим задачу, которую можно сформулировать в следующем виде: найти значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие системе неравенств (уравнений)
- $$\phi_i\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right) \le b_i, i = \overline{1, m} \qquad (1)$$
- и обращающие в максимум (или минимум) целевую функцию, то есть
- $$Z = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \to \max\left(\min\right) \qquad (2).$$
- При дифференцируемости функций f и φ_i, можно применять классические методы оптимизации.

- Однако, если множество значений аргумента дискретно, или функция Z задано таблично, используют методы математического программирования. Если Z и φ_i - линейные функции , то задача является задачей линейного программирования (ЗЛП). В противном случае имеем задачу нелинейного программирования. В частности, если указанные функции обладают свойствами выпуклости, то задача является задачей выпуклого программирования.

Метод наименьших квадратов

Основа – подобрать функцию так, чтобы она проходила на наименьшем расстоянии от всех точек сразу. Для этого необходимо минимизировать выражение:

$$F = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_t))^2 -> \min$$

Необходимые условия экстремума: $\frac{\partial F}{\partial \hat{a}_0} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \hat{a}_1} = 0$

Возьмем соответствующие производные и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{a}_0} = 2\sum_{t=1}^{n} (Y_t - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_t)) \cdot (-1) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{a}_1} = 2\sum_{t=1}^{n} (Y_t - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_t)) \cdot (-X_t) = 0$$

Раскроем скобки и получим стандартную форму нормальных уравнений:

$$\hat{a}_0 \cdot n + \hat{a}_1 \cdot \sum X_t = \sum Y_t$$

$$\hat{a}_0 \cdot \sum X_t + \hat{a}_1 \cdot \sum X_t^2 = \sum X_t Y_t$$

Решая систему уравнений относительно $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ получаем их оценки,где

$$Y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X$$

Функции нескольких переменных в задачах экономики.

Приведем элементарные сведения по этой тематике. Функция предложения (потребления) – зависимость предложения (потребления) некоторого товара от различных факторов (цены, дохода).

В экономических приложениях используются *производственные функции*, выражающие связь между затратами производственных ресурсов и объемом выпускаемой продукции. Производственные функции, как правило, зависят от многих переменных (факторов). В частности, рассматриваются двух факторные функции $Q = Q(K, L)$.

- где K – объем производственных фондов, L – затраты труда, Q – объем выпускаемой продукции. Примером двухфакторной функции является *функция Кобба – Дугласа*

$$Q = Q_0 K^{\alpha} L^{\beta}$$

- где Q_0, α, β – постоянные.
- Функции нескольких переменных возникают при необходимости учета зависимости некоторой величины более чем от одного фактора.

- В экономическом анализе применяется *функция прибыли* $f(K,L) = pQ(K,L) - p_1 L - p_2 K$
- где $Q = Q(K,L).$ – производственная функция, p– цена выпускаемой продукции, p_1 и p_2 – факторные цены. Пара чисел (K_0, L_0) называется *оптимальным планом*, если *функция прибыли* достигает максимума при $K = K_0, \quad L = L_0.$
- Функция полезности– зависимость полезности некоторого действия от уровня действия . Ее линии уровня называют кривыми безразличия.

- Задача. Найти максимум прибыли

$f(K,L) = pQ(K,L) - p_1 L - p_2 K$,если $Q(K,L) = 4K^{1/4}L^{1/4}$

Решение. Приравняем к 0 частные производные

$$f'_K = pK^{-3/4}L^{1/4} - p_2 \quad f'_L = pK^{1/4}L^{-3/4} - p_1$$

Тогда

$$K_0 = \frac{p^2}{p_1^{1/2} p_2^{3/2}}, L_0 = \frac{p^2}{p_1^{3/2} p_2^{1/2}}$$

Вычисляя вторые производные и пользуясь достаточным условием экстремума, получим, что в точке (K_0, L_0) функция прибыли достигает максимума, равного $\frac{1}{2p_1^{1/2} p_2^{1/2}}$

Примеры из тестов.

- Решение N1.

$$\vec{grad} f = \frac{df}{dx}\vec{i} + \frac{df}{dy}\vec{j} + \frac{df}{dz}\vec{k} =$$
$$2xy^3 z\vec{i} + x^2 3y^2 z\vec{j} + x^2 y^3 \vec{k},$$
$$\vec{grad} f(M) = (-4, 6, 1)$$

- Решение N2. $\partial y / \partial l$ $=0{,}5k^{0,5}l^{-0,5}$, $0{,}5*2*(1/5)=0{,}2$

$$N1.\ u = x^2 y^3 z, M(-1,1,2), \vec{grad} f(M) = ?$$
$$(1.)(0,1,4)(2.)(-4,6,1)(3.)(1,2,5)(4.)(1,0,2)$$

$$N2.\ y = k^{0,5} l^{0,5}, \partial y / \partial l = ?, k = 4, l = 25$$
$$(1.)0{,}4(2.)2{,}5(3.)1{,}25(4.)0{,}2$$

ТЕСТЫ.

Дана функция полезности $u = x + 4\sqrt{y}$. Тогда кривая безразличия задается уравнением…

- ○ $4x\sqrt{y} = C$
- ○ $\frac{x}{4\sqrt{y}} = C$
- ○ $1 + \frac{2}{\sqrt{y}} = C$
- ◉ $x + 4\sqrt{y} = C$