Стохастическая модель

Это – модель, где учитываются случайные факторы.

В природе нет совершенно случайных и совершенно детерминированных процессов. Но есть процессы, на которые случайные факторы влияют существенно, а есть такие процессы, где влияние случайности настолько мало, что ею можно пренебречь. Между этими крайностями лежит множество процессов, где случайный фактор оказывает большую или меньшую роль. Учитывать или не учитывать случайный фактор, зависит от того, какова цель моделирования.

Случайная функция (1)

Случайная функция $X(t)$ – это функция, **сечение** которой (т.е. если зафиксировать t), представляет собой обычную случайную величину с определенной плотностью вероятности. В результате проведения опыта (т.е. реализация $X(t)$) случайная функция превращается в обычную функцию. Например (рис. 1) случайная функция обозначает изменение напряжения в сети (допустим оно должно колебаться около значения u_0. Тогда реализация случайной функции будет представлять собой детерминированную функцию, колеблющуюся около значения u_0. Если было проведено несколько экспериментов, то получается семейство реализаций (рис. 2).

Случайная функция, параметром которой является время t, называется **случайным процессом**.

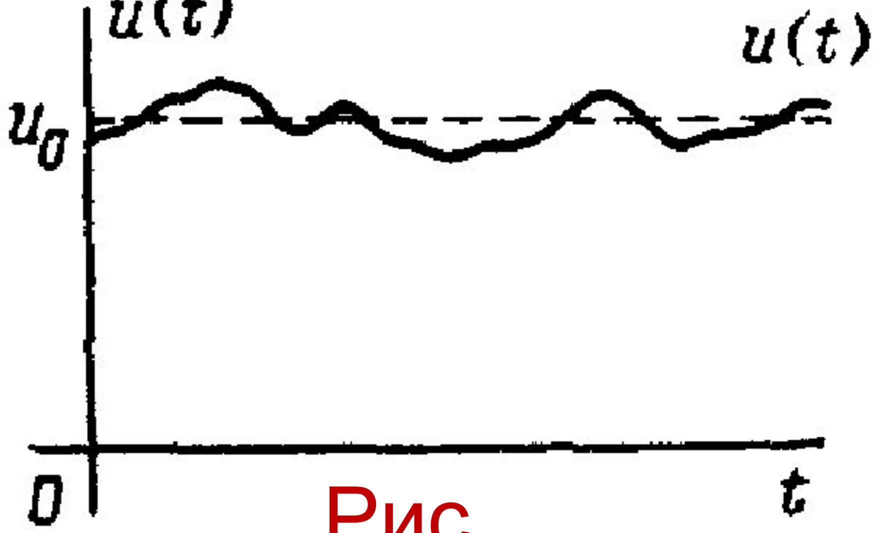


Рис. 1

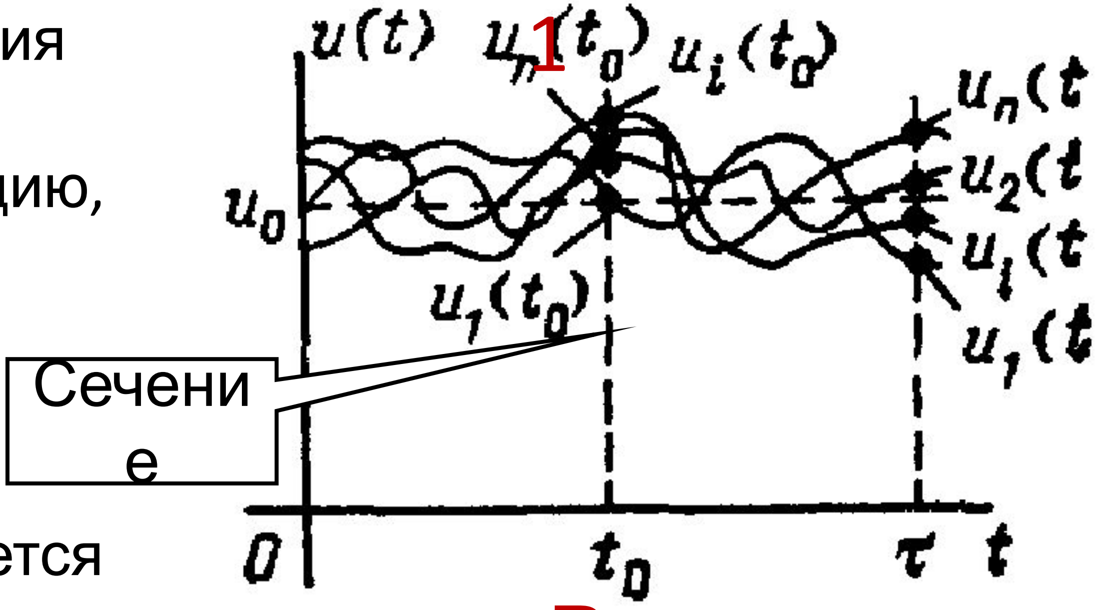


Рис.

Случайная функция (2)

Случайная функция может зависеть от нескольких переменных. Например, броуновское движение молекулы можно описать с помощью двух случайных функций *X*(*t*) и *Y*(t), описывающих положение частицы на плоскости. Такой случайный процесс называется векторным. При фиксированном *t* такой процесс представляет собой систему двух случайных величин, изображаемую случайным вектором *Q*(*t*) (см. рис. 1). При изменении t точка Q будет блуждать по

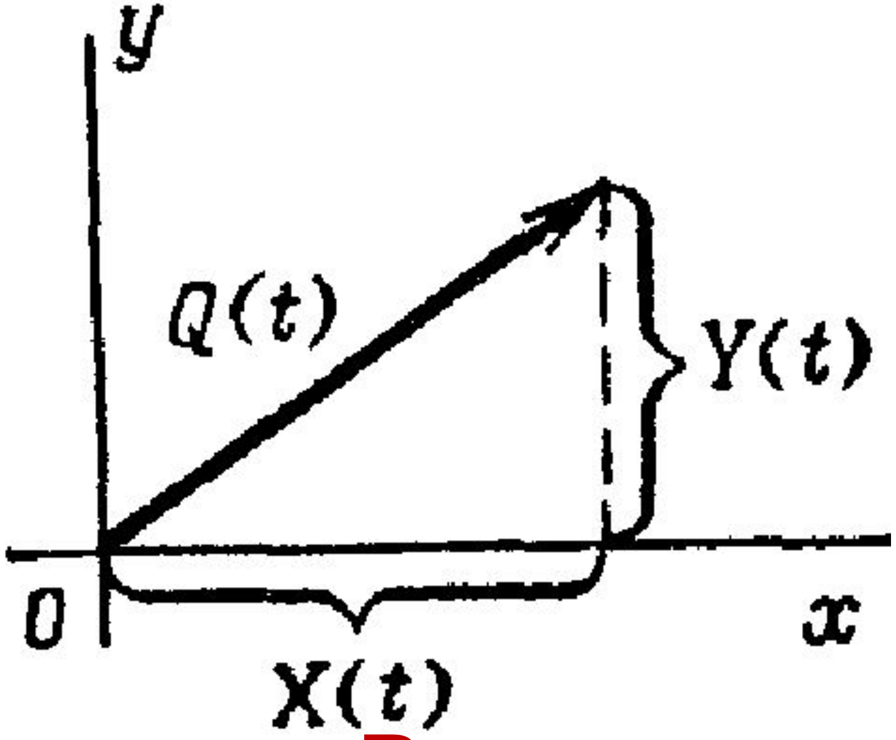


Рис.

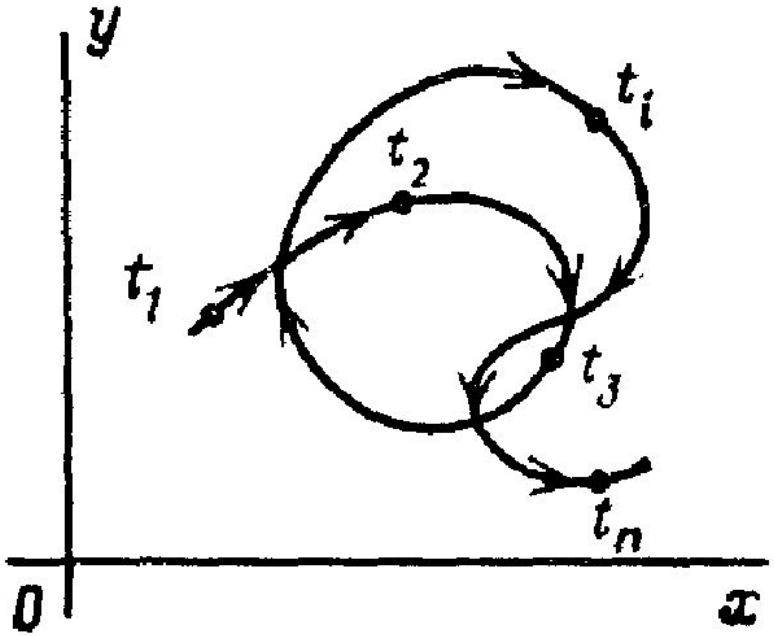


Рис.

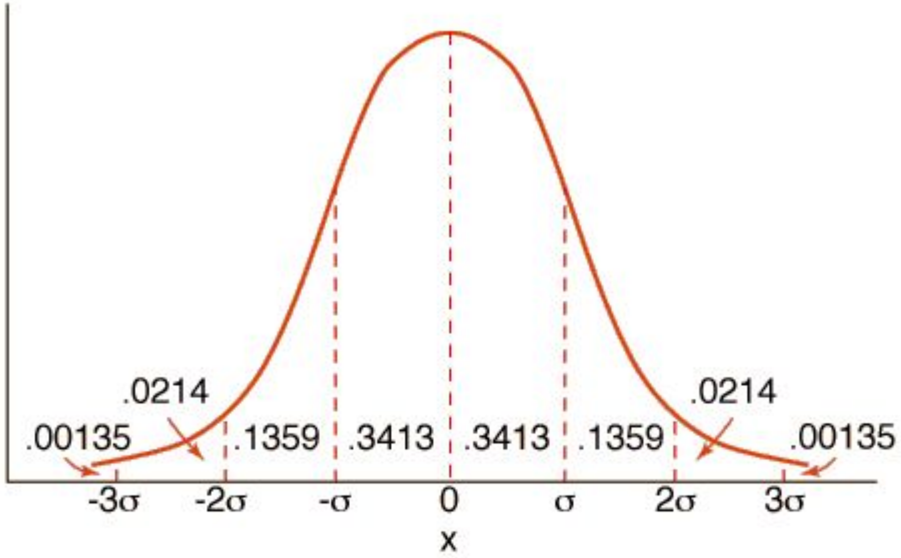
Случайная функция (3)

Многомерный случайный процесс – когда существует множество описываемых случайным процессом параметров. Например, полет ракеты характеризуется ее координатами ($X(t)$,$Y(t)$,$Z(t)$), центра массы ракеты, объемом топлива, ориентацией (углами наклона) и т.д. В этом случае «блуждание» точки, описывающей состояние объекта или системы, в моменты времени t будет происходить в многомерном фазовом пространстве.

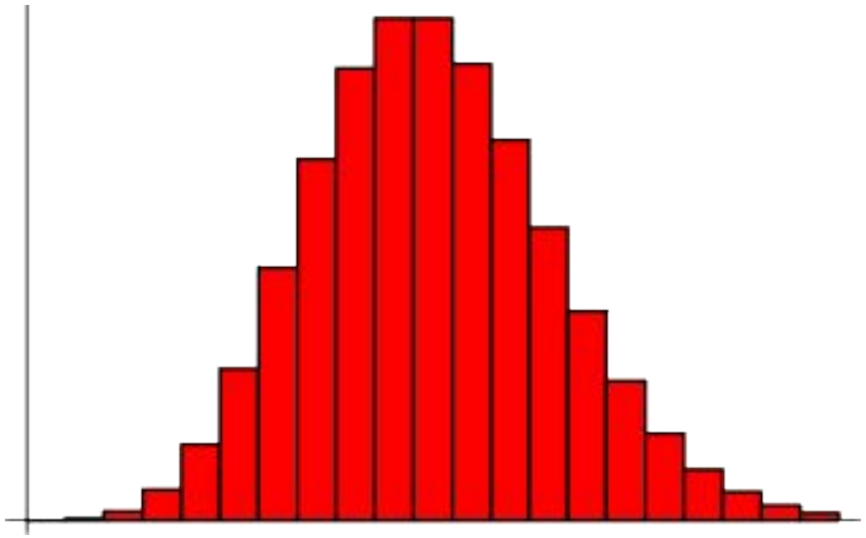
Случайный процесс, блуждающий по состояниям (процессы с качественными состояниями). Когда объект или система описываются счетным множеством состояний, в одном из которых система может находиться в момент времени t. Такой процесс описывается с помощью теории ***марковских процессов****.*

процессов (1)

Процесс с непрерывными состояниями – процесс, сечение которой в любой момент *t* представляет собой непрерывную случайную величину (с. в.), т.е. множество значений с.в. непрерывно.



Процесс с дискретными состояниями – процесс, сечение которого в любой момент времени t, представляет собой дискретную с.в., т.е. множество значений с.в. либо конечно, либо счетно.



процессов (2)

Процесс с непрерывным временем – процесс, при котором объект может изменять состояние в любой момент времени.

Процесс с дискретными временем – процесс, при котором объект может менять состояние в определенные моменты времени.

Таким образом, все случайные процесс можно разделить на **четыре класса**:

1а. С дискретным состояниями и дискретным временем (цепи Маркова).

1б. С дискретным состояниями и непрерывным временем (непрывные марковские процессы).

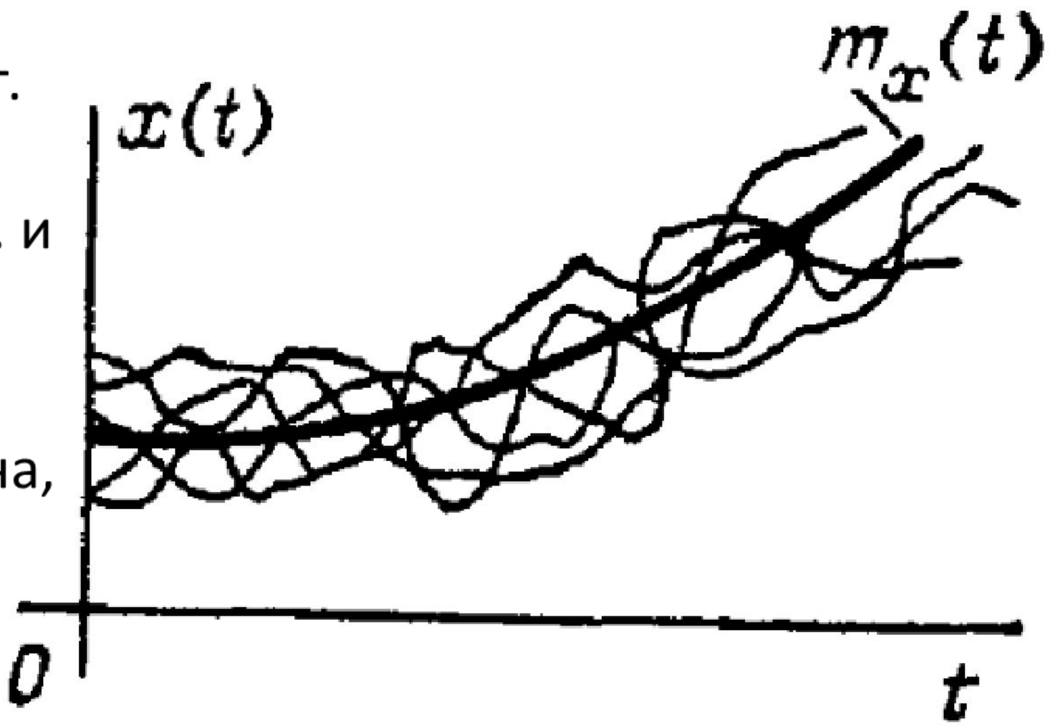
2а. С непрерывными состояниями и дискретным временем.

2б. С непрерывными состояниями и непрерывным временем.

процессов

Довольно часто в инженерных задачах пользуются только их числовыми характеристиками с.в.: мат. ожидание, дисперсия, ковариация, начальные и центральные моменты и т.д. Так, и для случайного процесса можно выделить аналог числовой характеристики с.в., только таким характеристиками будут функции аргумента t:

- **Математическое ожидание** $m_x(t)$ – это «средняя функция», вокруг которой происходит разброс реализации $X(t)$. Функция $m_x(t)$ является неслучайной. Значение функции $m_x(t)$ является мат. ожиданием каждого сечения случайного процесса $X(t)$: $m_x(t)$=M[$X(t)$] (M[X]=$\sum_i x_i P_i$ для дискретной с.в. и M[X]=$\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)$ для непрерывной с.в.).
- **Дисперсия** $D_x(t)$. $D_x(t)$=M[($m_x(t)$-$X(t)$)^2=M[X(t)^2] – x[$m_x(t)$]^2. Дисперсия с.п. – это неслучайная величина, дисперсии сечения с.п. $X(t)$ в момент времени t.
- **Среднеквадратическое отклонение (СКО)** $\sigma_x(t)=\sigma_x[X(t)]=\sqrt{D[X(t)]}$

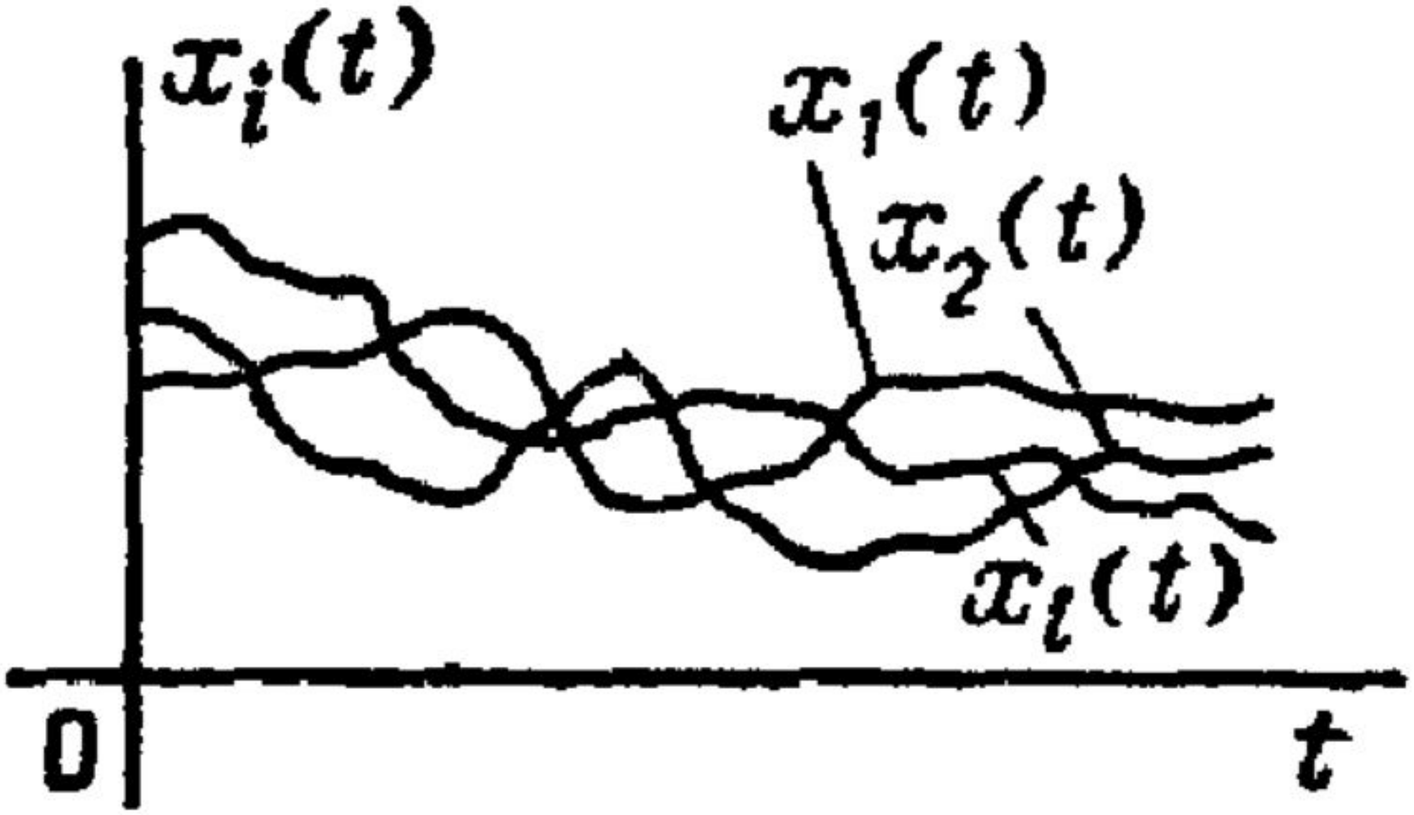


(функций)

Р-схема моделирует случайный процесс

Случайный процесс *X*(*t*) – это функция, которая в любой момент времени *t* принимает значения, являющиеся случайной величиной (в случае Р-схемы t – дискретная величина).

Реализация случайного процесса *X*(*t*) :
одна из возможных траекторий функции, описываемой *X*(*t*).

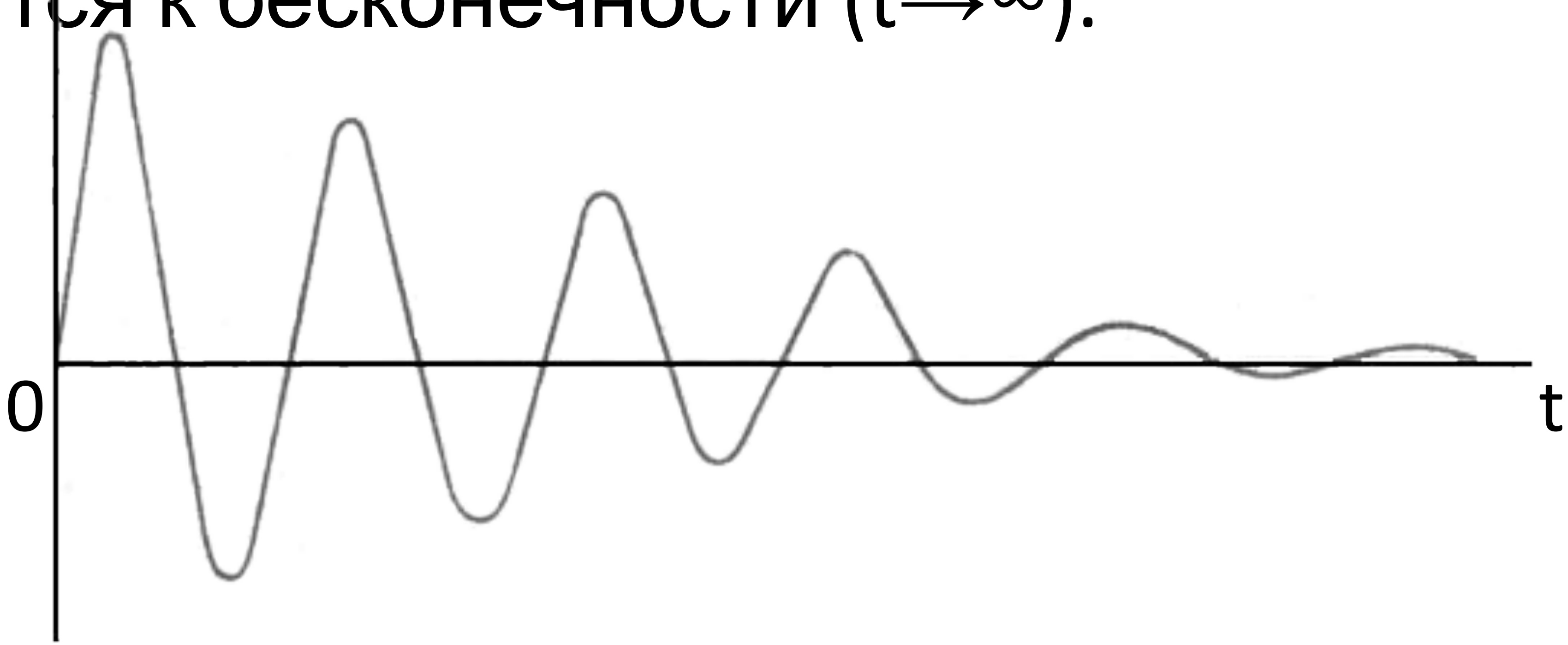


Примеры случайных процессов

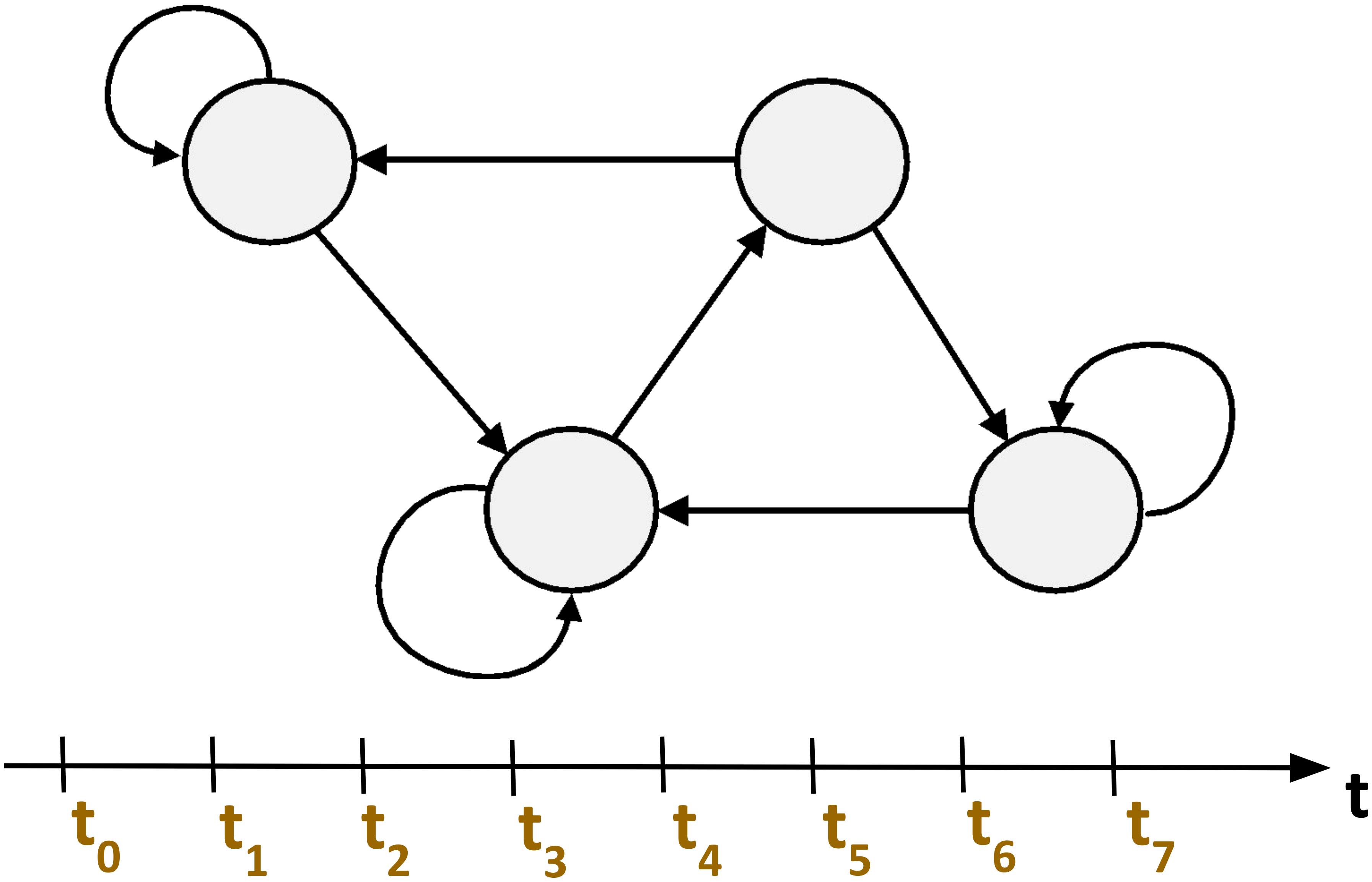
1. Случайны автомат (на дугах этого автомата стоят вероятности перехода из одного состояния в другое.
2. Частица, совершающая броуновское движение, меняет свое состояние случайным образом.
3. ЭВМ в процессе эксплуатации: может пребывать в состояниях: работает нормально; имеет необнаруженную неисправность; неисправность обнаружена, ищется ее причина; ремонтируется.

Стохастическая модель

Цель исследования стохастической модели – нахождение характеристик объекта моделирования в стационарном состоянии (стационарные вероятности), т.е. состояние объекта, когда время стремится к бесконечности ($t \to \infty$).



Р-схема моделирования



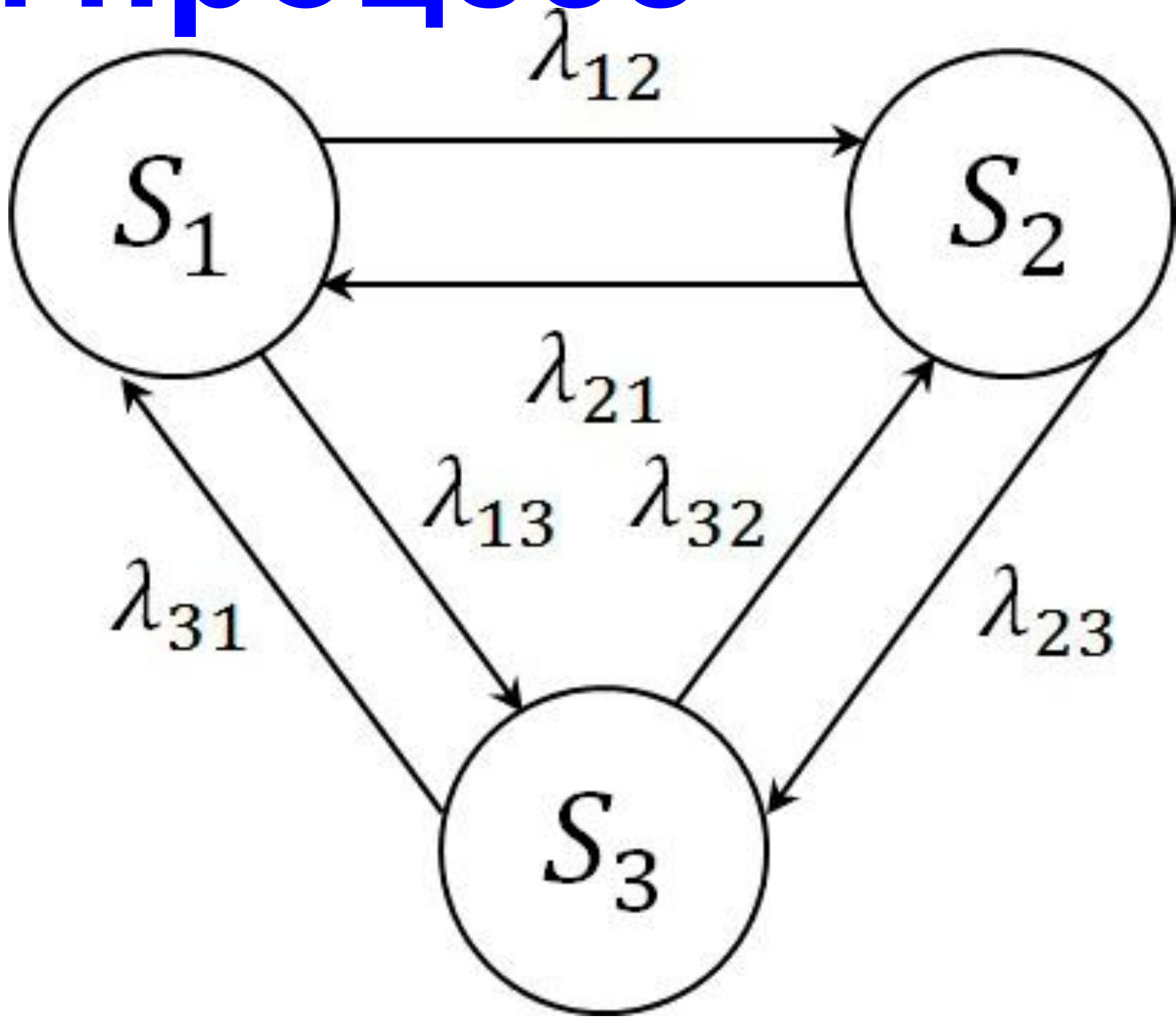
основоположник теории сетей Маркова

А.А. Марков (1856 - 1922)
Оставил труды в области Теории вероятностей и случайных процессов, математическом анализе и теории чисел.

Не путать с А.А. Марковым младшим (сын), создателем алгорифмов Маркова.

Марковский процесс

Модель представляет собой граф, где узлы обозначают состояние моделируемого объекта, а дуги – вероятность перехода из одного состояния в другое.

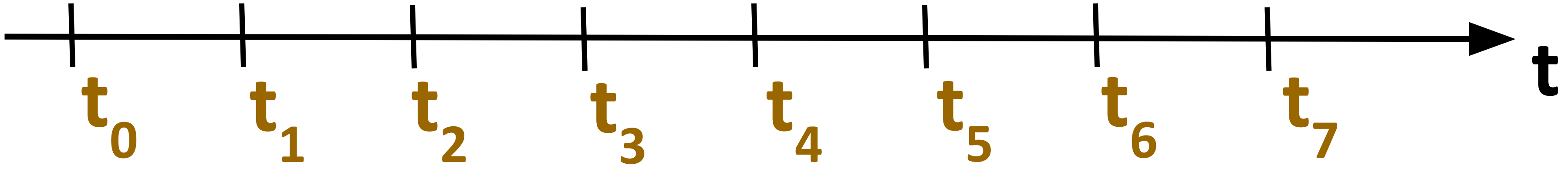


S_k - состояние объекта моделирования
λ_{ij}- вероятность переходи из i-го состояния в

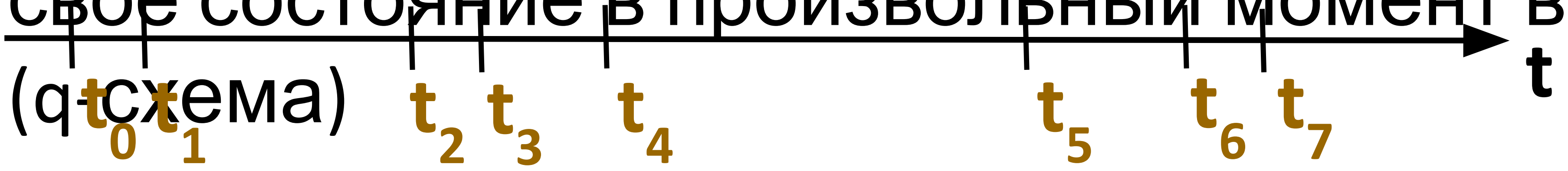
Марковские процессы

Марковские процессы делятся на два вида:

1. Дискретные (цепи Маркова), где система меняет свое состояние в определенные такты времени (P-схема)



2. Непрерывные цепи Маркова, где система меняет свое состояние в произвольный момент времени (q-схема)



Свойство марковости

В марковской сети вероятность события зависит только от текущего состояния сети, т.е.

$P(X_{n+1}=i_{n+1} | X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1}, \ldots, X_0=i_0)=P(X_{n+1}=i_{n+1} | X_n=i_n)$

где

$\{X_n\}$ – пространство состояний цепи

i – номер шага

Тогда вероятность попасть из состояние *i* в состояние *j* за *m* шагов равно:

$p_{ij}^{(m)} = P[X_{n-1} = j \mid X_n = i]$ (1)

Выражение (1) можно переписать в виде рекуррентной формулы:

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{(m-1)} p_{ki}$$

т.е. для того, чтобы попасть в состояние E_j, необходимо сначала за *m*-1 шагов попасть в множество состояние E_k, а затем уже из них перейти в состояние E_j.

Условная вероятность

Условной называется вероятность, что произойдет какое-либо событие, если известно, что произошло до этого произошло другое событие.

Условная вероятность записывается в виде:

$P(A/B)$ или $P(A|B)$, где A – событие, B – событие, которое уже произошло.

Условная вероятность вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{P(A/B)=P(AB)/\,P(B),}$$

где $P(AB)$ – вероятность того, что произойдут сразу два события A и B.

Примеры дискретных марковских процессов

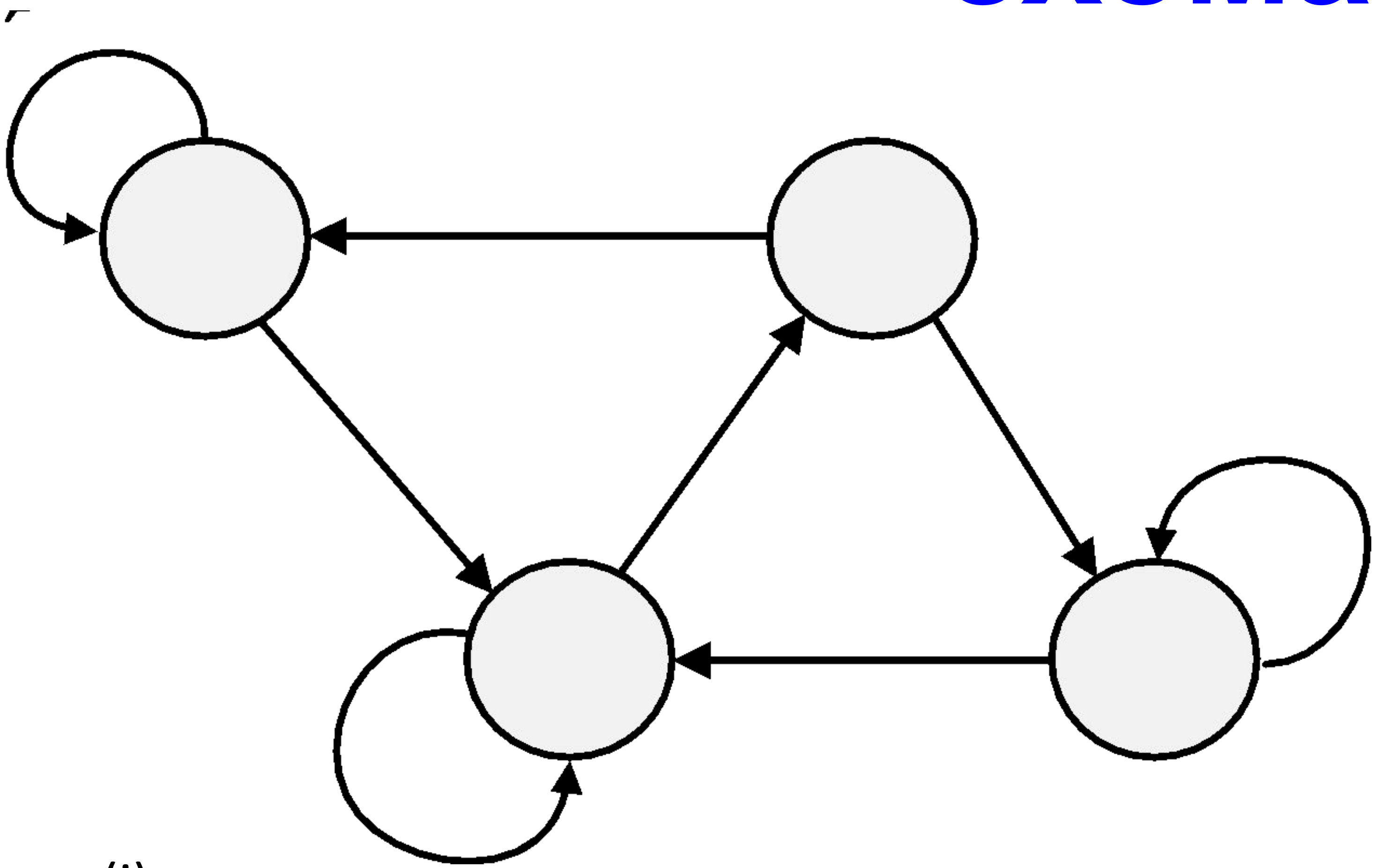
1. Ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона

Наблюдается популяция живых организмов в дискретные моменты времени t=0,1,2,… . В единицу времени один организм производит случайное количество потомков Х. p_n – вероятность того, что $X=n$. X_t – число особей в момент t. Стохастическая последовательность X_1, X_2, … , X_t образует цепь Маркова.

2. Случайный автомат (автомат, который случайным образом переходит из одного состояния в другое; к дугам, показывающим переход, приписывается вероятность перехода из одного состояния в другое). Переход в новое состояние происходит в определенные моменты времени.

3. Моделирование надежности работы прибора. В систему входит n приборов. Состояния S_0 – нет исправных приборов, S_1 – один исправный прибор,…, S_n – все приборы исправны. Состояние прибора проверяется регулярно в определенные моменты времени

схема)



Матрица переходных вероятностей (P)

	1	2	3	4
1	0,8	0,2		
2		0,5	0,5	
3	0,3			0,7
4		0,4		0,6

$\pi^{(i)}=(1,0,0,0)$ – вектор вероятностей состояний (показывает вероятность того, что система будет находиться в i-м состоянии). $\pi^{(i)}$ – это сечение

перехода

	1	2	3	4	
1	0,8	0,2			=1
2		0,5	0,5		=1
3	0,3			0,7	=1
4		0,4		0,6	=1

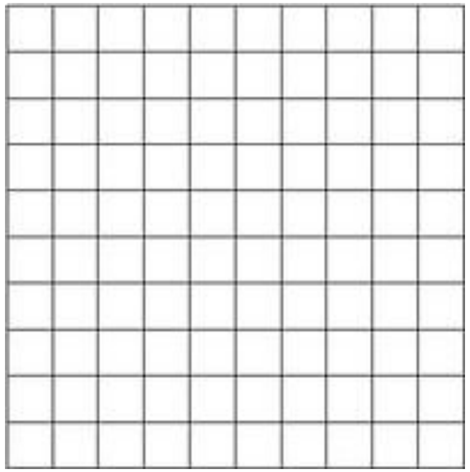
Сумма всех элементов в строке матрицы вероятностей равняется единице!!!

Имитационное моделирование дискретной сети Маркова

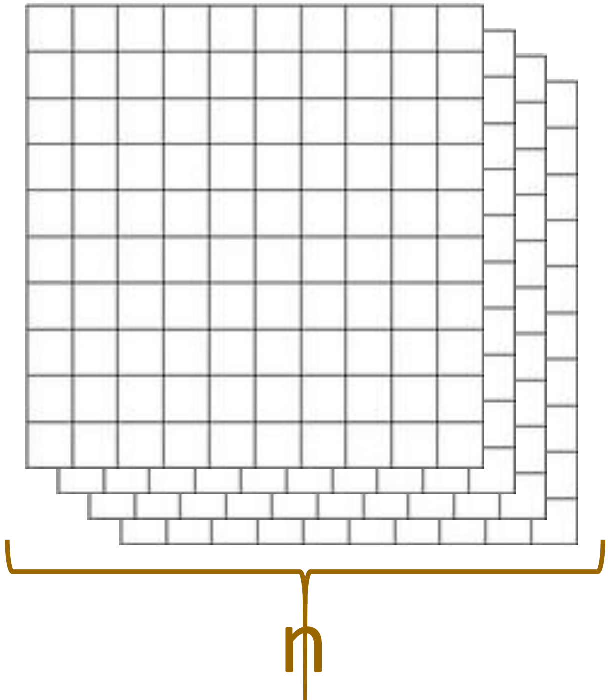
$\pi^{(n)}=\pi^{(n-1)}*P$ (*), где n – номер шага моделирования. Моделирование представляет собой последовательность вычислений по формуле * (шаг моделирования). После применения формулы перепишем значение из P’ в P (т.е. P=P’) и совершим еще один шаг моделирования. Вычисления продолжаются до тех пор, пока среднеквадратичное отклонение между P и P’ не будет меньше заданного значения ε $(||P-P'||) < \varepsilon$.

Маркова

Однородная цепь – где на каждом шаге применяется одна и та же таблица вероятностей перехода.

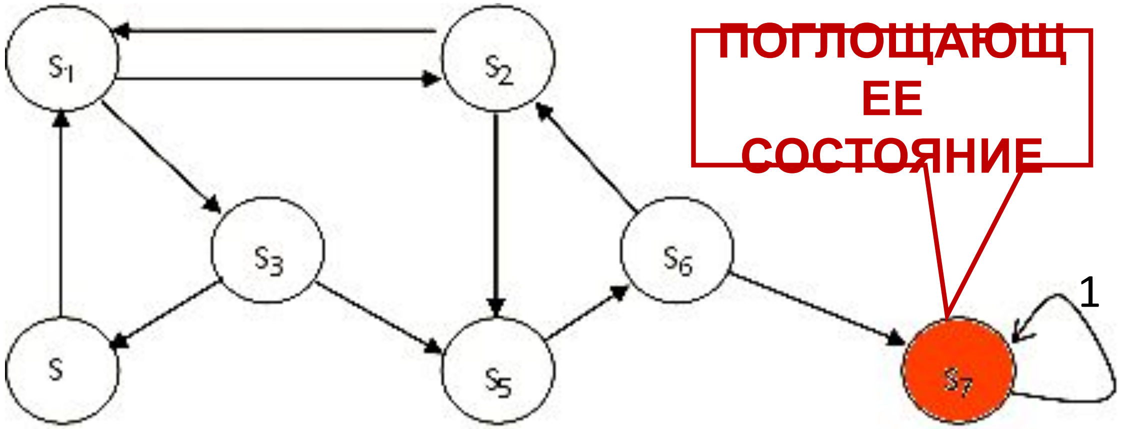


Неоднородная цепь – где для каждого шага существует своя таблица вероятностей перехода (если моделируется n переходов, то необходимо n матриц ($P_1, P_2, \ldots, P_n$)

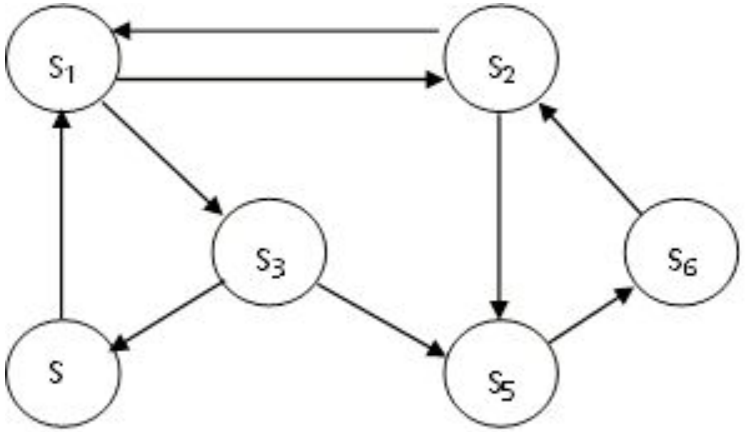


Маркова

Разложимая цепь – содержит невозвратные (поглощающие) состояния (множества состояний). Из таких вершин не выходит ни одна дуга. В установившемся режиме вероятность пребывания в таком состоянии равна 1. Необходимым условием того, что состояние *i* является поглощающим является: $p_{ii} = 1$.

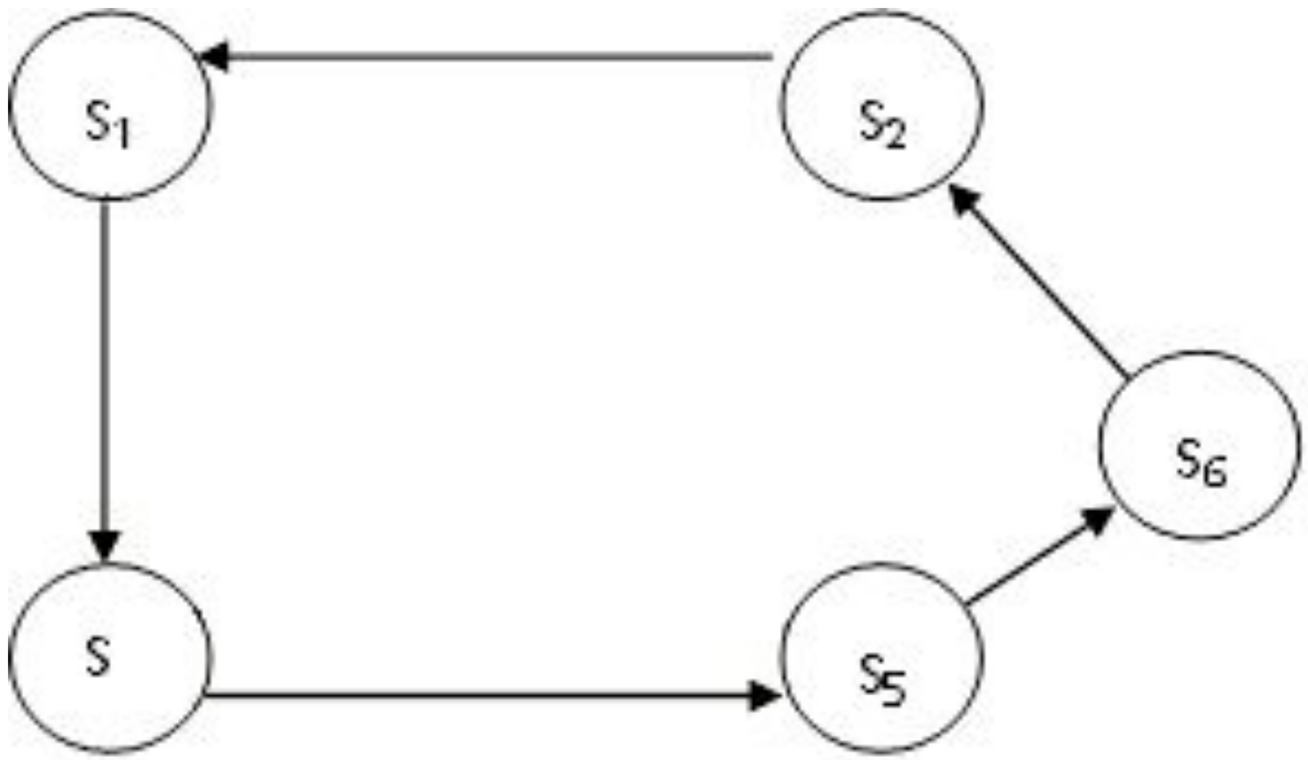


Неразложимая цепь – Не содержит поглощающих состояний или поглощающих подмножеств узлов. Такие цепи описываются сильно связным графом.



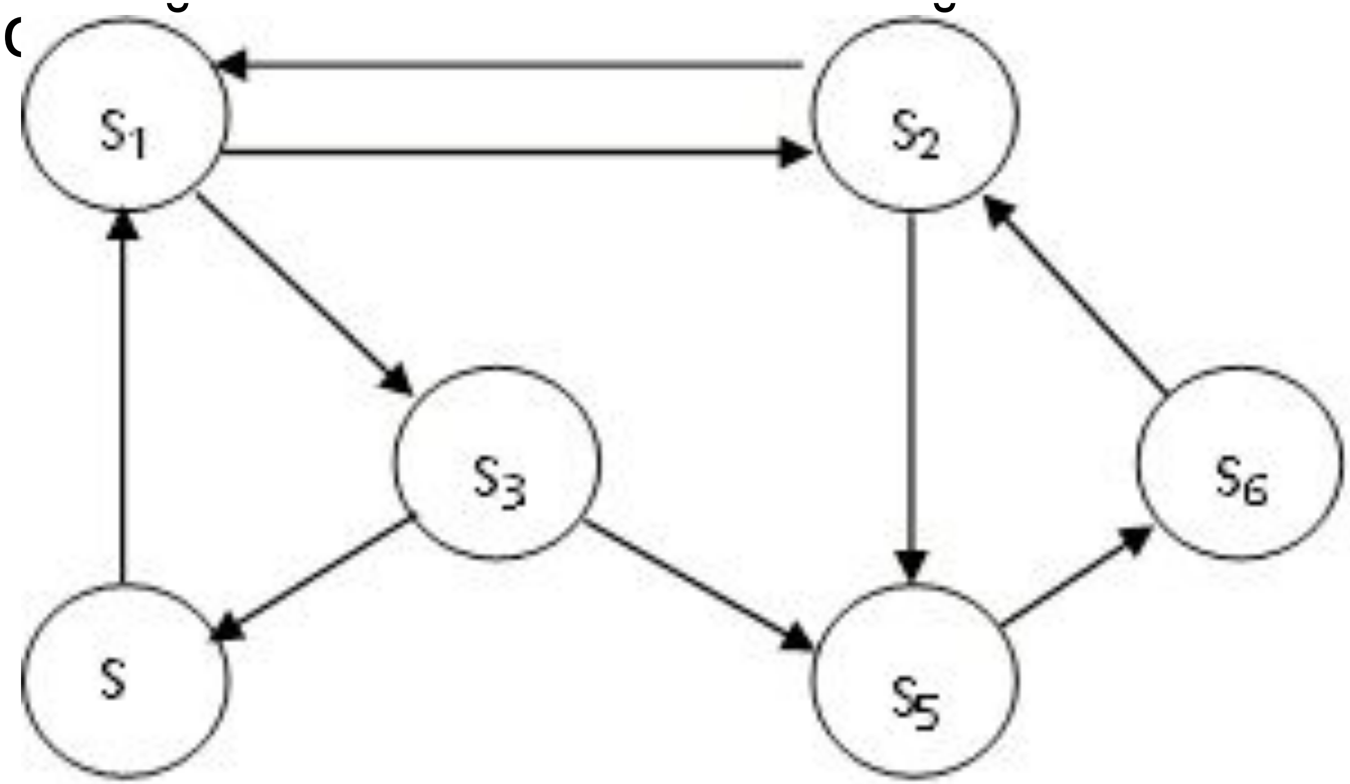
Периодическая цепь Маркова

Периодической цепью называется такая цепь, последовательность смены состояний которой меняются периодически. В случае периодической цепи все состояний имеют один и тот же период.



Эргодическая марковская система

Эргодической называется неразложимая и нециклическая марковская система. Для такой системы имеется возможность определить стационарные вероятности (т.е. вероятности событий при времени, стремящимся к бесконечности (или числе шагов моделирования, стремящимся к бесконечности. Вероятности этих состояний не зависят от вероятнс



предельных вероятностей марковской цепи

Если цепь является неразложимой и непериодической, то для нее существует предельное распределение вероятностей при $n \to \infty$, где n – число шагов моделирования. Т.е.

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$$

где j – номер состояния цепи Маркова.

π_j – вероятность того, что система находится в j-м состоянии

π_j на зависит от начального состояния, с которого начинается имитационное моделирование (финальные вероятности).

Пример моделирования цепи Маркова (1)

π =(1,0,0,0) – начальное состояние;

1 шаг: P’=(0.8, 0.2, 0, 0); ε= 0.1633 (СКО);

2 шаг: P’=(0.64, 0.26, 0.1, 0); ε= 0.1143;

3 шаг: P’=(0.542, 0.258, 0.13, 0.07); ε= 0.0717;

4 шаг: P’=(0.4726, 0.2654, 0.129, 0.133); ε= 0.0543;

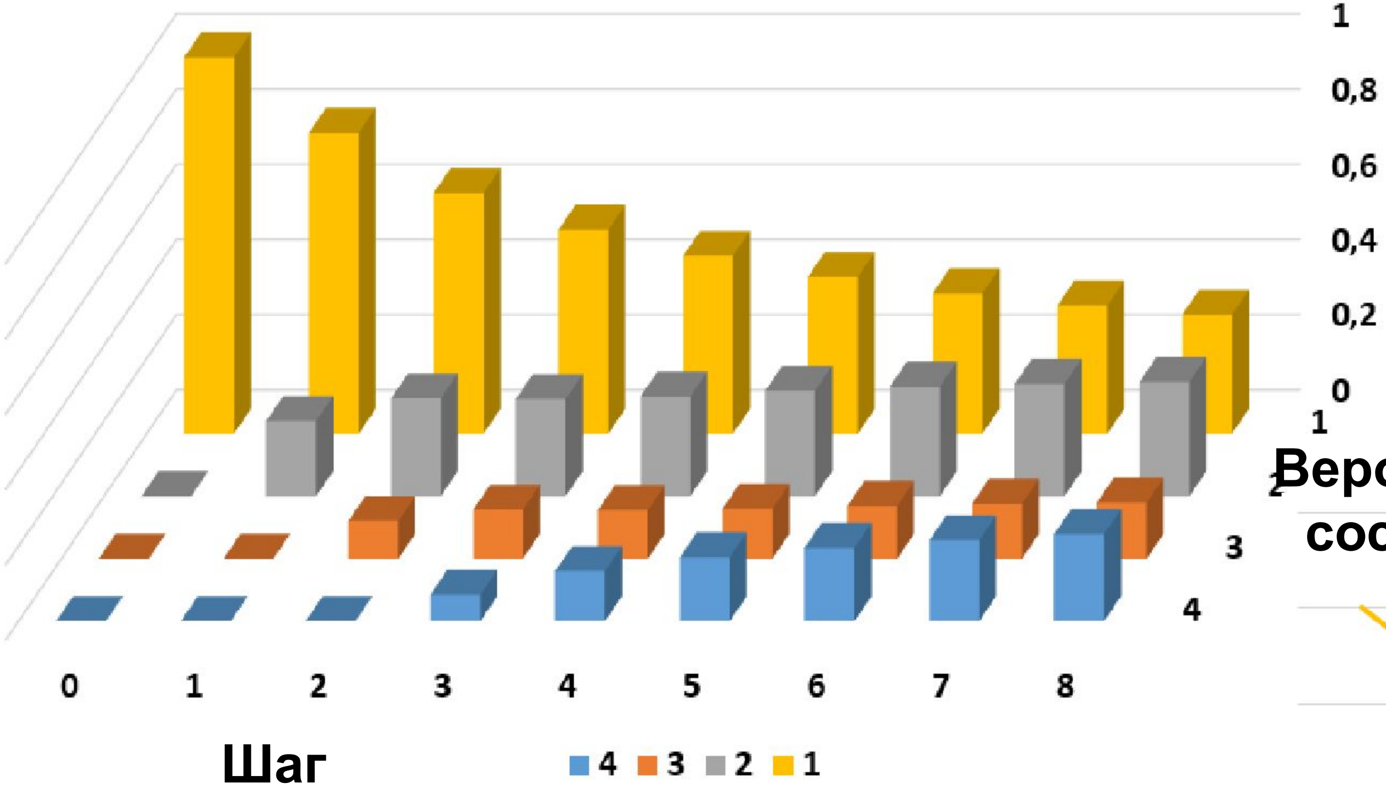
5 шаг: P’=(0.4168, 0.2804, 0.1327, 0.1701); ε= 0.0397;

6 шаг: P’=(0.3732, 0.2916, 0.1402, 0.195); ε= 0.03;

7 шаг: P’=(0.3407, 0.2984, 0.1458, 0.2151); ε= 0.0227;

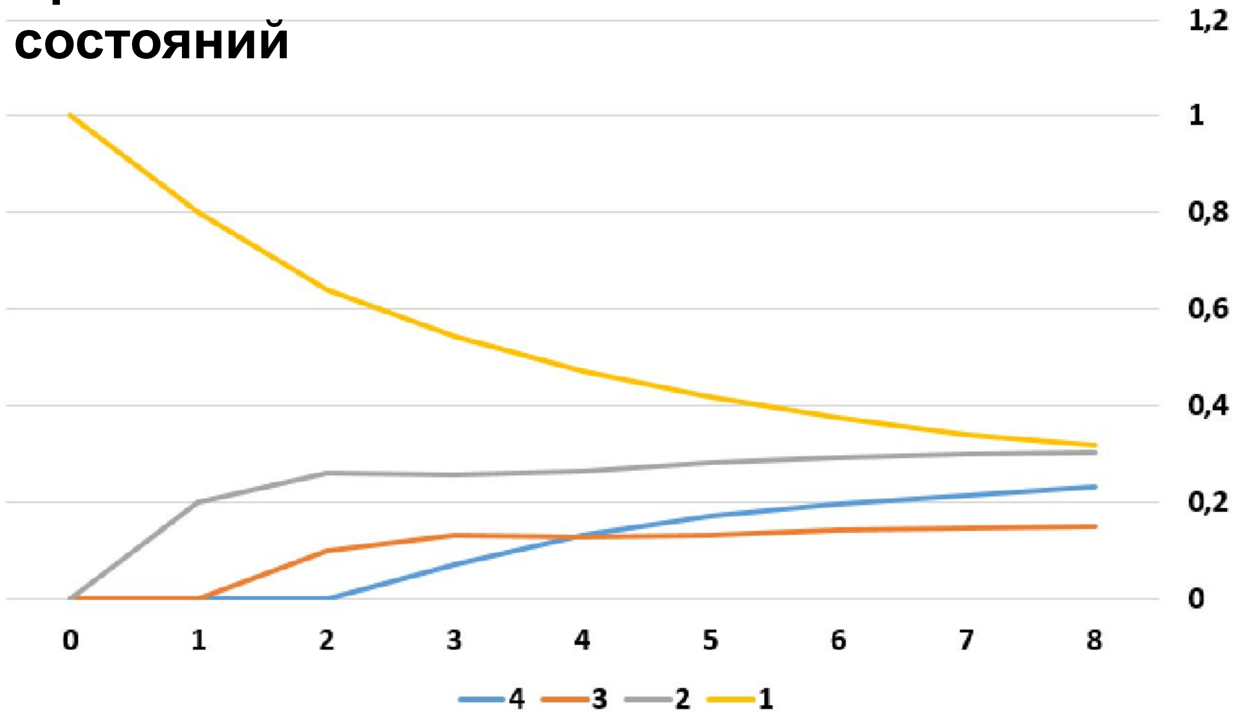
8 шаг: P’=(0.3163, 0.3034, 0.1492, 0.2311); ε= 0.0172;

Маркова (2)



Шаг моделирования

Вероятности состояний



Пример моделирования цепи Маркова (2)

π=(0.25, 0.25, 0.25, 0.25);

1 шаг: P’=(0.275, 0.275, 0.125, 0.325); ε= 0.087;

2 шаг: P’=(0.2575, 0.3225, 0.1375, 0.2825); ε= 0.039;

3 шаг: P’=(0.542, 0.258, 0.13, 0.07); ε= 0.072;

4 шаг: P’=(0.2473, 0.3257, 0.1613, 0.2657); ε= 0.018;

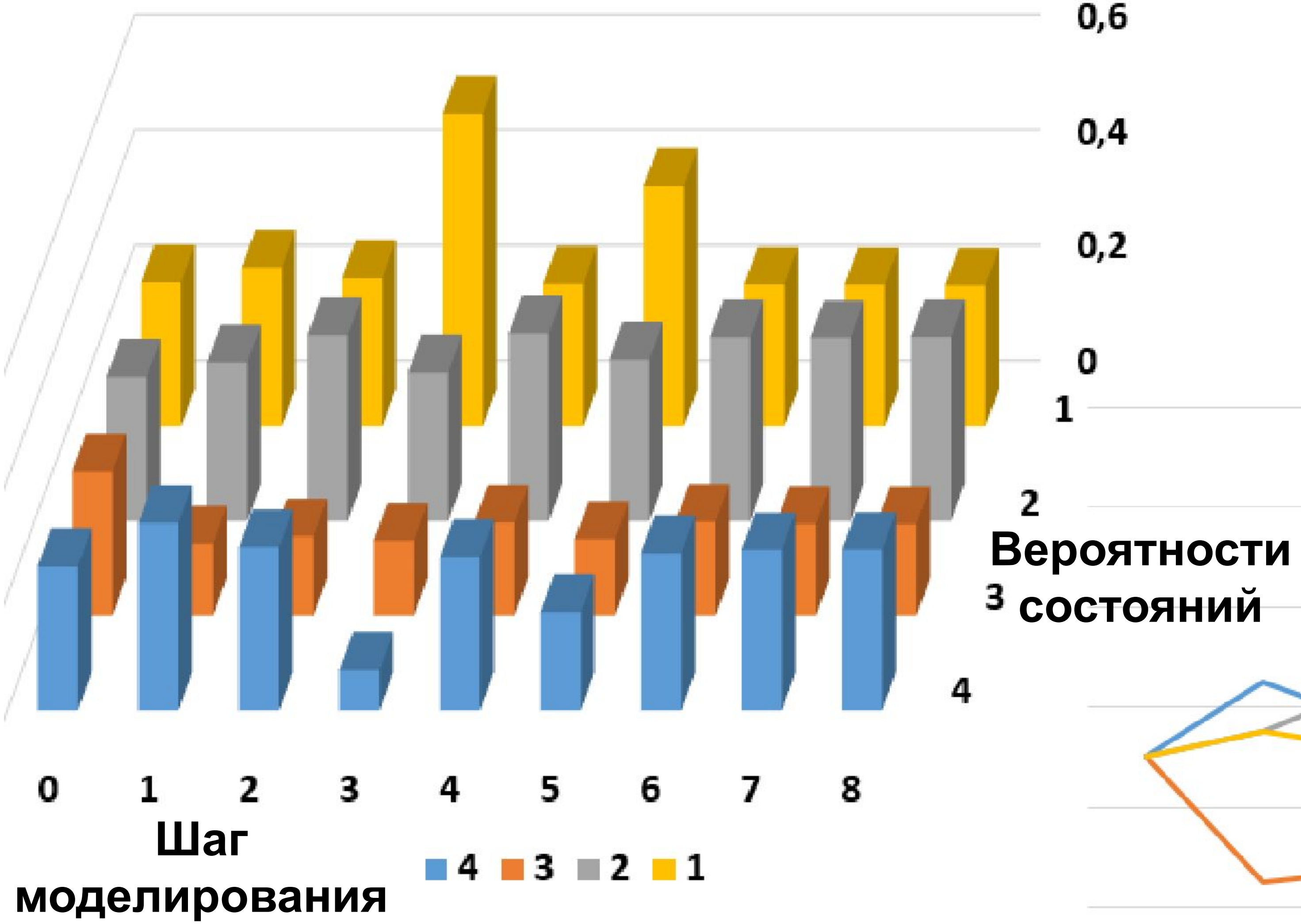
5 шаг: P’=(0.4168, 0.2804, 0.1327, 0.1701); ε= 0.0397;

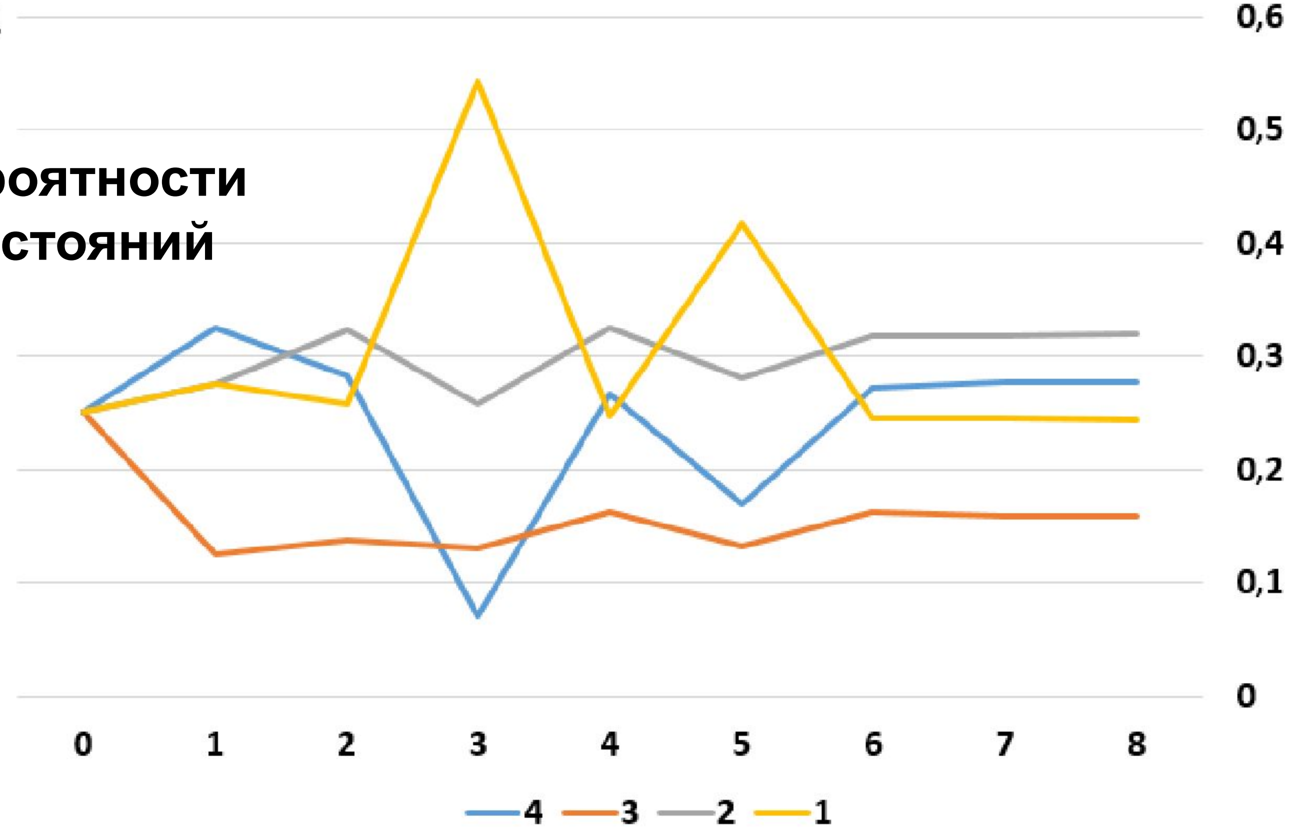
6 шаг: P’=(0.2462, 0.3186, 0.1629, 0.2723); ε= 0.0057;

7 шаг: P’=(0.2458, 0.3175, 0.1593, 0.2774); ε= 0.0037;

8 шаг: P’=(0.2444, 0.3189, 0.1587, 0.2780); ε= 0.0012;

Пример моделирования цепи Маркова (4)





Аналитическое моделирование цепи Маркова

Для нахождения вероятностей пребывания марковской цепи в определенных состояниях при n→∞ *(финальные вероятности) решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \pi_1 = P_{11}\pi_1 + P_{21}\pi_2 + \cdots + Pn_1\pi_n \\ \pi_2 = P_{12}\pi_1 + P_{22}\pi_2 + \cdots + P_{1n}\pi_n \\ \cdots \\ \pi_n = P_{1n}\pi_1 + P_{2n}\pi_2 + \cdots + Pnn\pi_n \end{cases} \qquad (1)$$

В матричном виде уравнение (1) будет иметь вид:

$$\pi = P^T * \pi. \qquad (2)$$

Иначе (2) можно записать в виде:

$$(P^T - E) * \pi = 0, \qquad (3),$$

где E – единичная матрица.

Добавим к уравнениям (3) условие нормировки:

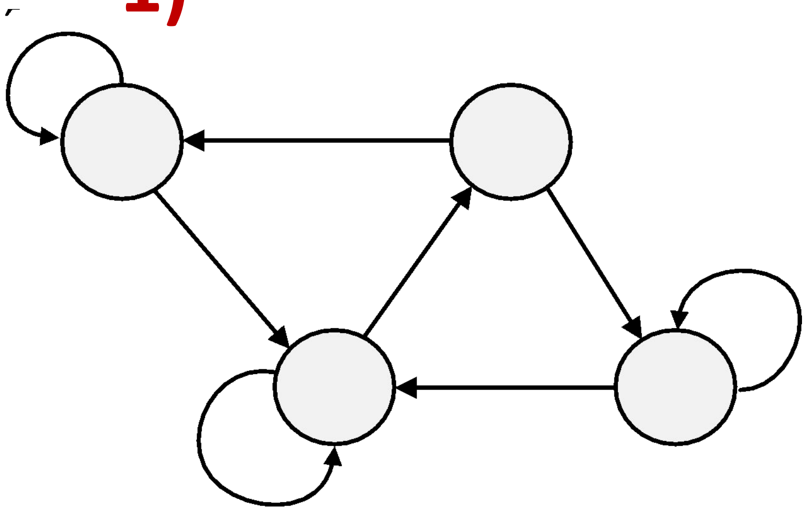
$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_n = 1$$

т.е. заменим одну из строк матрицы на строку с нормировкой.

Решение системы линейных уравнений (3) дает предельные вероятности пребывания системы в определенных состояниях.

Пример аналитического моделирования цепи Маркова (1)

1)



2)

$P=$

	1	2	3	4
1	0,8	0,2		
2		0,5	0,5	
3	0,3			0,7
4		0,4		0,6

3)

$P^T=$

	1	2	3	4
1	0,8		0,3	
2	0,2	0,5		0,4
3		0,5		
4			0,7	0,6

4)

$(P^T - E)=$

	1	2	3	4
1	0,8-1		0,3	
2	0,2	0,5-1		0,4
3		0,5	-1	
4			0,7	0,6-1

$=$

	1	2	3	4
1	-0,2		0,3	
2	0,2	-0,5		0,4
3		0,5	-1	
4			0,7	-0,4

Пример аналитического моделирования цепи Маркова (2)

5) Заменим четвертую строку матрицы P^T на единичную строку

P=

	1	2	3	4
1	-0,2		0,3	
2	0,2	-0,5		0,4
3		0,5	-1	
4	1	1	1	1

6) Решим линейную систему уравнений (P^T -

	1	2	3	4
1	-0,2		0,3	
2	0,2	-0,5		0,4
3		0,5	-1	
4	1	1	1	1

=

0
0
0
1

Решение:

π=(0.24,0.32,0.16,0.28)

Пример аналитического моделирования цепи Маркова (2)

5) Заменим четвертую строку матрицы P^T на единичную строку

P=

	1	2	3	4
1	-0,2		0,3	
2	0,2	-0,5		0,4
3		0,5	-1	
4	1	1	1	1

6) Решим линейную систему уравнений (P^T -

	1	2	3	4
1	-0,2		0,3	
2	0,2	-0,5		0,4
3		0,5	-1	
4	1	1	1	1

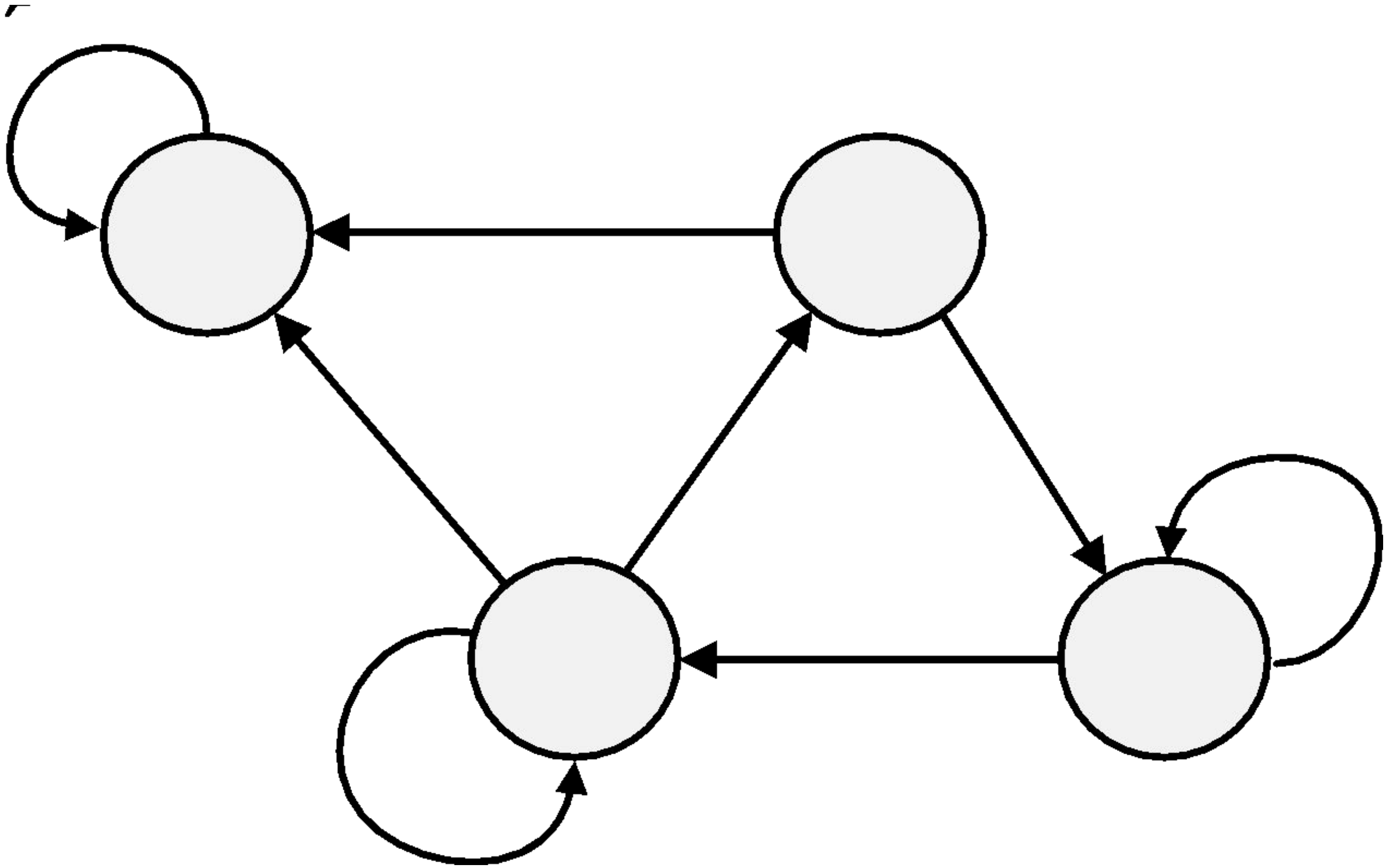
=

0
0
0
1

Решение:

π=(0.24,0.32,0.16,0.28)

Маркова



$\pi^{(0)}$=(0.25,0.25,0.25,0.25)

Матрица переходных вероятностей (P)

	1	2	3	4
1	1			
2	0,6	0,2	0,2	
3	0,7			0,3
4		0,8		0,2

Пример моделирования приводимой цепи Маркова

π =(0.25,0.25,0.25,0.25) – начальное состояние;

1 шаг: P’=(0.575 0.25 0.05 0.125); ε= 0.232 (СКО);

2 шаг: P’=(0.76 0.15 0.05 0.04); ε= 0.131;

3 шаг: P’=(0.885 0.062 0.03 0.023); ε= 0.09;

4 шаг: P’=(0.9432 0.0308 0.0124 0.0136); ε= 0.04;

5 шаг: P’=(0.97036 0.01704 0.00616 0.00644); ε= 0.0184;

6 шаг: P’=(0.985 0.0086 0.0034 0.0031); ε= 0.01;

7 шаг: P’=(0.992 0.00422 0.0017 0.00165); ε= 0.005

Методика моделирования *по* схеме дискретных марковских процессов

Сформулируем методику моделирования по схеме дискретных марковских процессов (марковских цепей):

1. Зафиксировать исследуемое свойство системы. Определение свойства зависит от цели исследования. Например, если исследуется объект с целью получения характеристик надежности, то в качестве свойства следует выбрать исправность. Если исследуется загрузка системы, то – занятость. И
2. Определить конечное число возможных состояний системы и убедиться в правомерности моделирования по схеме дискретных марковских процессов.
3. Составить и разметить граф состояний.
4. Определить начальное состояние.
5. По рекуррентной зависимости или аналитическим способом определить искомые вероятности.

Литература

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — Учеб. пособие для втузов. — 2-е
изд., стер. — М.: Высш. шк., 2000. — 383 с:
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. /Пер. И.И. Глушко; ред. В.И. Нейман. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.