Основы теории управления

Характеристики САУ

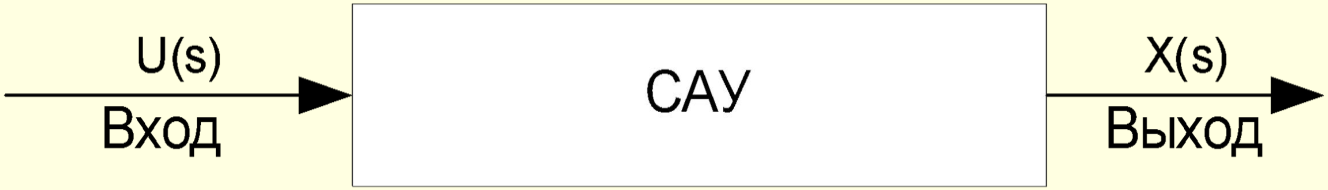
Характеристики САУ

1. Передаточная функция

2. Временные характеристики

3. Частотные хъарактеристики

Передаточная функция



- **<u>Передаточная функция</u>** – отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях:

$$W(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$$

Передаточная функция

В общем виде ПФ имеет вид:

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{(m-1)} + \ldots b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{(n-1)} + \ldots a_n} = \frac{K(s)}{D(s)}$$

где K(s), D(s) – степенные полиномы.

В установившемся режиме d/dt = 0, то есть *s* = 0, и, коэффициент передачи САУ в установившемся режиме

$$K = \lim_{s \to 0} W(s) \qquad K = b_m/a_n.$$

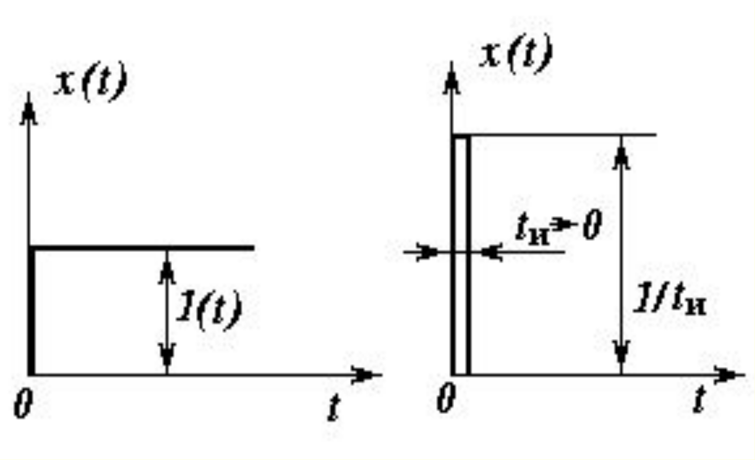
Передаточная функция

- Знаменатель передаточной функции *D(s)* называют ***характеристическим полиномом (уравнением)***. Его **корни**, то есть значения *s*, при которых знаменатель *D(s)* обращается в нуль, а *W(s)* стремится к бесконечности, называются ***полюсами передаточной функции***.

- Числитель *K(s)* называют ***операторным коэффициентом передачи***. Его **корни**, при которых *K(s) = 0* и *W(s) = 0*, называются ***нулями передаточной функции***.

Временные характеристики

Зависимость выходной величины элемента или системы от времени при переходе из одного установившегося состояния в другое при поступлении на вход типового воздействия называется временной динамической характеристикой.



Единичная ступенчатая 1(t) функция и δ- функция Дирака

Временные характеристики

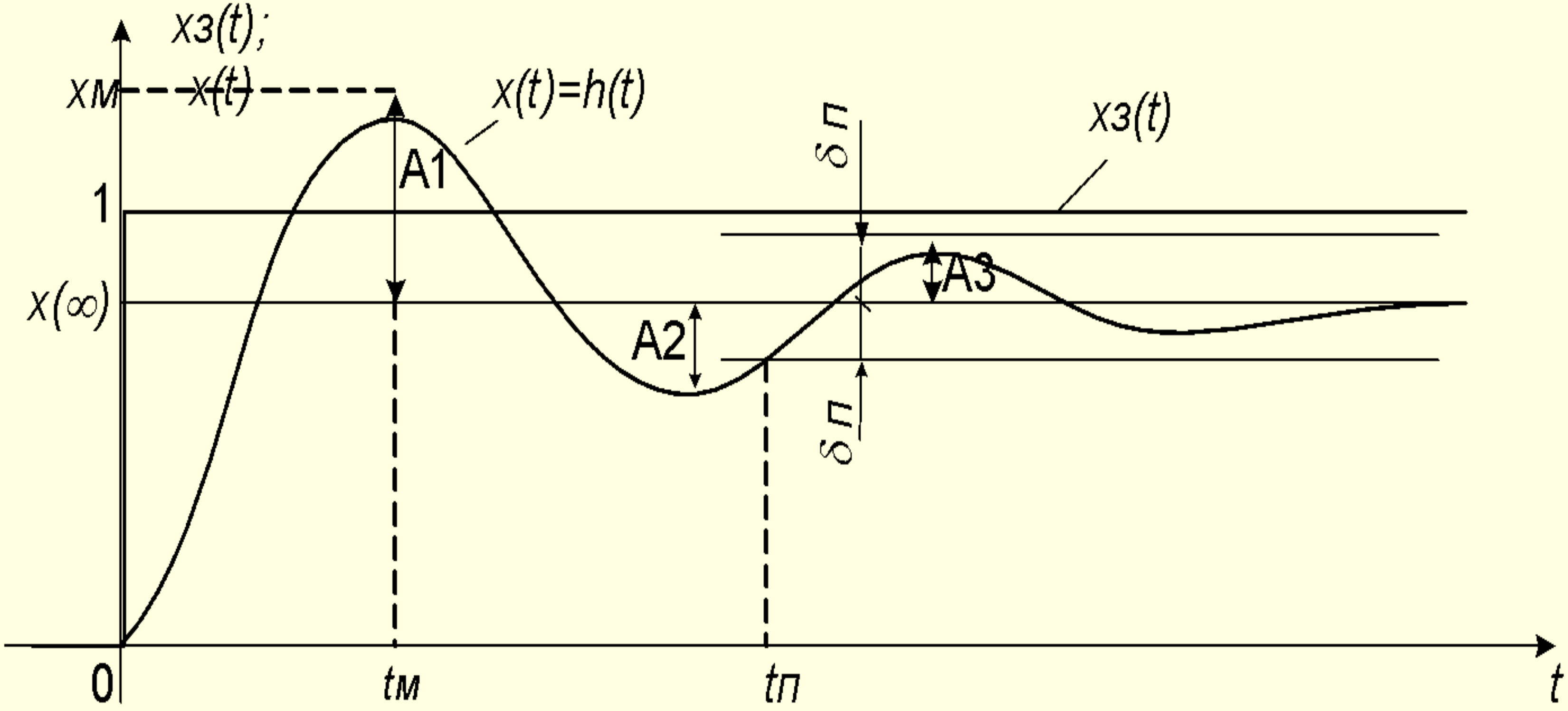
<u>Переходной характеристикой h(t)</u> называется реакция объекта на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях, т.е. при x(0) = 0 и y(0) = 0.

<u>Импульсной характеристикой w(t)</u> называется реакция объекта на δ-функцию при нулевых начальных условиях.

По переходной характеристике можно найти важнейшие **<u>показатели качества</u>** системы - перерегулирование σ , время переходного процесса $t_п$, колебательность N, степень затухания ψ .

Показатели качества – это свойства, характеризующие работу системы, выраженные в количественной форме.

Показатели качества



Показатели качества

Перерегулирование σ - величина, равная отношению первого максимального отклонения $x_м$ управляемой величины x(t) от ее установившегося значения x(∞) к этому установившемуся значению:

$$\sigma = \frac{x_м - x(\infty)}{x(\infty)} \cdot 100 = \frac{A_1}{x(\infty)} \cdot 100,\ \%.$$

Качество управления считается удовлетворительным, если
σ <= 30…40%.

Показатели качества

Время переходного процесса (время регулирования) tп – интервал времени от момента приложения ступенчатого воздействия до момента, после которого отклонения управляемой величины x(t) от ее нового установившегося значения x(∞) становятся меньше некоторого заданного числа δп, т. е. до момента, после которого выполняется условие

$$| x(t) - x(\infty) | \le \delta п.$$

Величину *δп* обычно принимают равной 5% от установившегося значения *x(∞)* [*δп* = 0,05 *x(∞)*]

Показатели качества

Колебательность N – число переходов управляемой величины x(t) через ее установившееся значение x(∞) за время переходного процесса $t_п$.

Степень затухания

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - \frac{A_3}{A_1}.$$

Интенсивность затухания колебаний в системе считается удовлетворительной, если ψ = 0,75…0,95.

Связь переходной и передаточной функции

Т.к. U(t) = 1(t), то, учитывая, что $L\{1(t)\}=1/s$, получаем следующее выражение для изображения переходной характеристики:

$$L(h(t)) = \frac{W(s)}{s}$$

→, переходная характеристика звена равна:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}$$

Пример 1

Исходное дифф. уравнение: $T \cdot \dot{y} + y = K \cdot x$,
где x(t) – вход, y(t) – выход.
Используем преобразование Лапласа, обозначим

$$L\{x(t)\} \div X(s),\ L\{y(t)\} \div Y(s)$$

Преобразуем исходное дифф. уравнение с учетом введенных обозначений:

$$T \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = K \cdot X(s)$$

$$Y(s) \cdot [T \cdot s + 1] = K \cdot X(s)$$

Найдем передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{T \cdot s + 1}$$

Пример 2

Используем известное соотношение:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}$$

Используем обратное преобразование по Лапласу:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K}{s \cdot (T \cdot s + 1)}\right\} = K \cdot \left(1 - e^{-t/T}\right)$$

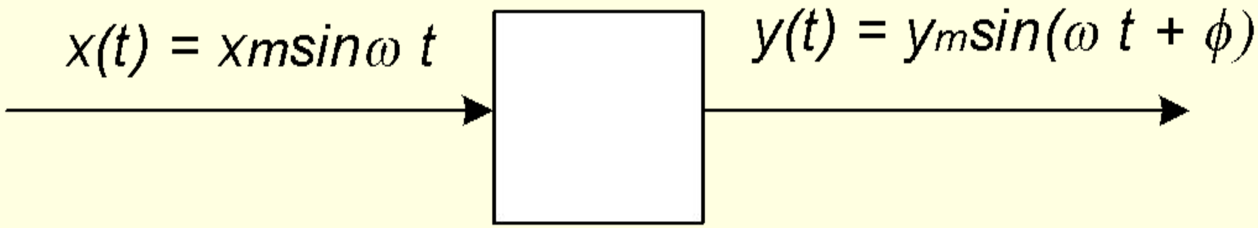
Частотные характеристики

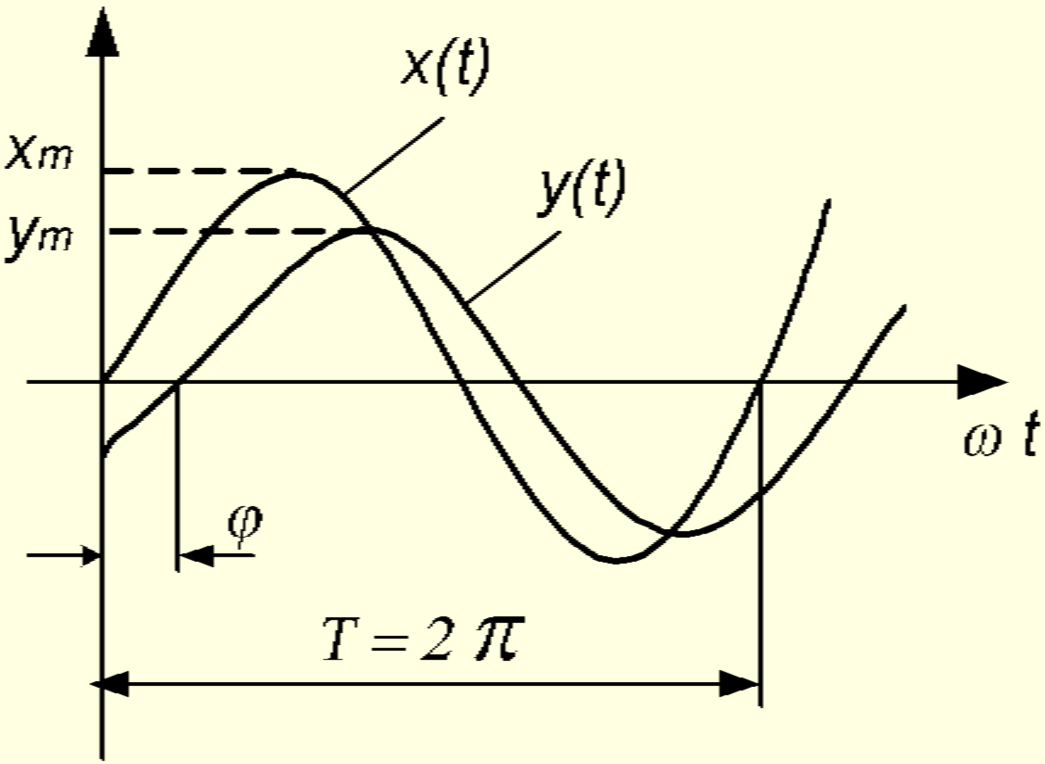
<u>Частотные характеристики (ЧХ)</u> характеризуют реакцию системы на гармоническое (синусоидальное) входное воздействие в установившемся режиме.

<u>Классификация ЧХ:</u>

- Амплитудно-частотная $A(\omega)$
- Фазочастотная $\varphi(\omega)$
- Вещественная частотная $P(\omega)$
- Мнимая частотная $Q(\omega)$
- Логарифмическая амплитудно-частотная $L(\omega)$
- Логарифмическая фазочастотная $\varphi(\omega)$

Частотные характеристики





Частотные характеристики

Для получения частотных характеристик используется так называемая ***<u>частотная передаточная функция (ЧПФ)</u>***, получаемая из передаточной функции путем замены **s = jω**:

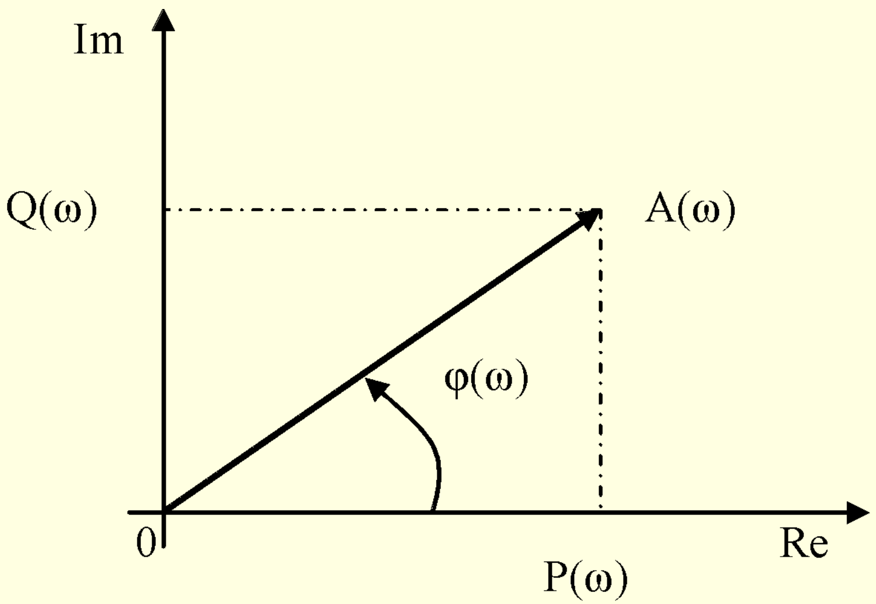
$$W(j\omega) = W(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i (j\omega)^i}{1 + \sum_{i=1}^{n} b_i (j\omega)^i}$$

где a_i, b_i - коэффициенты полинома, а m, n - степень полинома числителя и знаменателя ПФ.

Частотные характеристики

Выражение ЧПФ можно представить в виде вектора на комплексной плоскости.

Проекции вектора на действительную и мнимую оси называют соответственно ***действительной*** и ***мнимой частотными характеристиками*** и обозначают *P(ω), Q(ω)*.



Частотные функции

Запишем ЧПФ в ***<u>алгебраической</u>*** форме:

$$W(j\omega) = P(\omega) + j\,Q(\omega)$$

Представим ЧПФв ***<u>тригонометрической</u>*** и ***<u>показательной</u>*** формах:

$$W(j\omega) = A(\omega)\cos\phi(\omega) + j\,A(\omega)\sin\phi(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)},$$

где $A(\omega)$ – модуль функции; $\phi(\omega)$ – аргумент функции.

Частотные функции

АЧХ показывает, как САУ пропускает сигналы различной частоты. Очевидно, что уравнение АЧХ будет соответствовать *A(ω)*:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)},$$

где *P(ω)* и *Q(ω)* – **вещественная и мнимая части частотной ПФ**.

Для их нахождения необходимо избавиться от мнимости в знаменателе, умножением на сопряженную знаменателю комплексную величину.

Частотные функции

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) – зависимость *фазового сдвига* между входным и выходным сигналами от частоты.

ФЧХ показывает, какое отставание или опережение выходного сигнала по фазе создает САУ при различных частотах.

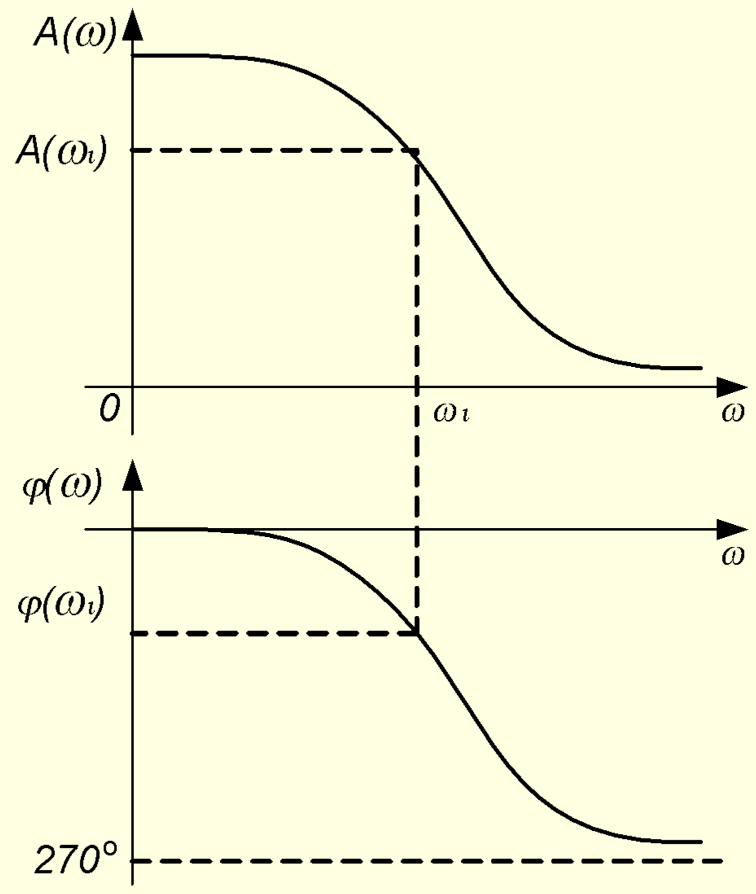
ФЧХ соответствует уравнению аргумента *ϕ(ω)*:

$$\phi(\omega) = \arg W(j\omega) = arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}.$$

Частотные функции

Частота, после которой значение АЧХ уменьшается ниже 0 дБ (коэффициент усиления меньше 1, сигнал ослабляется), называется частотой среза системы ω_c.

Частота, после которой значение АЧХ падает ниже -3 дБ (коэффициент усиления меньше, чем 0.708), называется полосой пропускания системы ω_b.



Частотные функции

Физический смысл АЧХ и ФЧХ:

1) АЧХ показывает, как изменяется протекание сигнала различной частоты, при этом оценка пропускания делается по соотношению амплитуд входных и выходных величин;

2) ФЧХ показывает фазовый сдвиг, вносимый системой на различных частотах.

Частотные функции

Амплитудную и фазовую характеристики можно объединить в одну общую – ***амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ).***

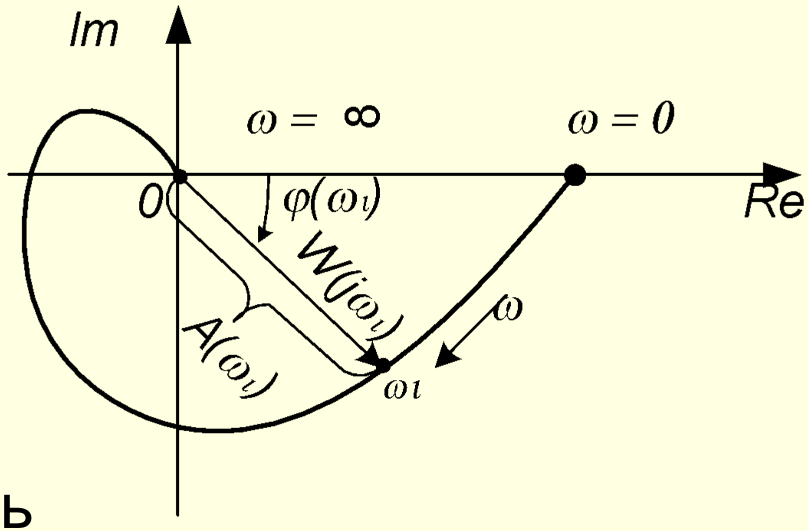
АФЧХ представляет собой функцию комплексного переменного *jω,* которую можно представить в показательной форме как

$$W(j\omega)=A(\omega)e^{j\phi(\omega)} ,$$

где $A(\omega)$ – модуль функции; $\phi(\omega)$ – аргумент функции.

Частотные функции

АФЧХ представляет собой график ЧПФ, построенный на комплексной плоскости.



Каждому фиксированному значению частоты ω_i соответствует комплексное число, которое можно изобразить вектором, имеющим длину $A(\omega_i)$ и угол поворота $\phi(\omega_i)$.

$0 \le \omega \le \infty$

Частотные функции

При практических расчетах САУ удобно использовать частотные характеристики, построенные в логарифмической системе координат – ***логарифмические характеристики.***

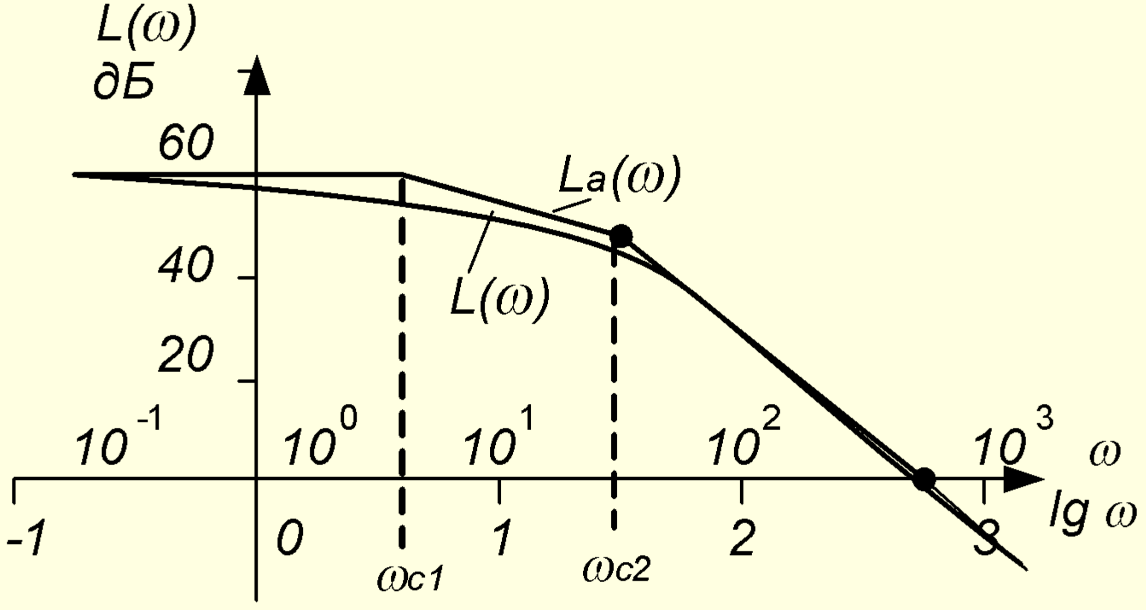
<u>Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)</u> – это АЧХ звена, построенная в логарифмических шкалах ($lg\ \omega$ по оси абсцисс и $20lgA(\omega)$ по оси ординат).

<u>Логарифмическая фазочастотная характеристика (ЛФЧХ)</u> имеет логарифмический масштаб только по оси частот.

Частотные функции

За единицу длины по оси частот логарифмических характеристик принимают декаду.

Декада *– интервал частот, заключенный между произвольным значением частоты ω_i и его десятикратным значением $10\omega_i$.*



Частотные функции

Уравнение ЛАЧХ имеет следующий вид:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega),$$

ординаты которой измеряют в логарифмических единицах – *децибеллах* (дБ).

Пример 2

Рассмотрим ПФ апериодического звена 1-го порядка с единичными коэффициентами, имеющего передаточную функцию вида $W(s) = \dfrac{1}{s+1}$. Выведем и построим различные частотные характеристики для данного звена.

Перейдем от записи в операционной форме к частотному представлению:

$$W(j\omega) = W(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega + 1}$$

Пример 2

Получим выражения для ВЧХ и МЧХ. Избавимся от комплексного числа в знаменателе при помощи умножения числителя и знаменателя дроби на комплексно-сопряженное знаменателю:

$$W(j\omega) = \frac{-j\omega + 1}{(j\omega + 1)(-j\omega + 1)} = \frac{1 - j\omega}{1 + \omega^2} = \frac{1}{1 + \omega^2} + j\frac{-\omega}{1 + \omega^2}.$$

Таким образом, ВЧХ имеет вид $P(\omega) = \dfrac{1}{1 + \omega^2}$.

Соответственно, МЧХ $Q(\omega) = \dfrac{-\omega}{1 + \omega^2}$.

Пример 2

Получим выражения для АЧХ и ФЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega}{1+\omega^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\omega}{1+\omega^2} : \frac{1}{1+\omega^2}\right) = -\operatorname{arctg}(\omega).$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика звена

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\right) =$$

$$= 20\lg(1) - 20\lg(\sqrt{1+\omega^2}) = -20\lg(\sqrt{1+\omega^2}).$$