

---

# МАТРИЦЫ. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ.

---

# Основные определения

■ **Определение.** Матрицей размера  $m \times n$ , где  $m$ - число строк,  $n$ - число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Элементы матрицы обозначаются  $a_{ij}$ , где  $i$ - номер строки, а  $j$ - номер столбца.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- 
- Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента
  - Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк ( $m=n$ ), то матрица называется **квадратной**
-

- 
- **Определение.** Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется **единичной матрицей**

---

- **Определение.** Если  $a_{mn} = a_{nm}$ , то матрица называется **симметрической**
- **Определение.** Квадратная матрица вида называется **диагональной** матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# Основные действия над матрицами

- **Сложение и вычитание** матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера.

- 
- **Определение. Суммой (разностью)** матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$C = A + B = B + A.$$

---

- **Операция умножения (деления)**  
матрицы любого размера на произвольное  
число сводится к умножению (делению)  
каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha (A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

# Операция умножения матриц

- Определение: Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

$$\begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccccccc}
 \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1l} \\
 \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{2l} \\
 \dots & \dots \\
 \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{jl} \\
 \dots & \dots \\
 \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{ml}
 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc}
 \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1i} & \dots & \beta_{1n} \\
 \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2i} & \dots & \beta_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \beta_{l1} & \beta_{l2} & \dots & \beta_{li} & \dots & \beta_{ln}
 \end{array} \right\| =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccccc}
 \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1i} & \dots & \gamma_{1n} \\
 \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2i} & \dots & \gamma_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \gamma_{j1} & \gamma_{j2} & \dots & \gamma_{ji} & \dots & \gamma_{jn} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \dots & \gamma_{mi} & \dots & \gamma_{mn}
 \end{array} \right\| \gamma_{ji} = \sum_{k=1}^l \alpha_{jk} \beta_{ki}
 \end{array}$$

# Свойства операции умножения матриц

- 1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е.  $AB \neq BA$  даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение  $AB=BA$  выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными**.
- Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.
- Заметим:  $A \cdot E = E \cdot A = A$
- Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:
- $A \cdot O = O$ ;  $O \cdot A = O$ , где  $O$  – **нулевая** матрица.

- 2) Операция перемножения матриц **ассоциативна**, т.е. если определены произведения  $AB$  и  $(AB)C$ , то определены  $BC$  и  $A(BC)$ , и выполняется равенство:  
 $(AB)C = A(BC)$ .
- 3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения  $A(B+C)$  и  $(A+B)C$ , то соответственно:  
 $A(B + C) = AB + AC$   
 $(A + B)C = AC + BC$ .

- 
- 4) Если произведение  $AB$  определено, то для любого числа  $\alpha$  верно соотношение:  
$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$
  - 5) Если определено произведение  $AB$ , то определено произведение  $B^T A^T$  и выполняется равенство:  
$$(AB)^T = B^T A^T,$$
 где индексом  $T$  обозначается **транспонированная** матрица.
  - 6) Заметим также, что для любых квадратных матриц  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .  
*(Понятие  $\det$  (определитель, детерминант) будет рассмотрено ниже).*
-

# Операция транспонирования

■ **Транспонированием** матрицы называется операция, в результате которой образуется новая матрица, где строками служат столбцы исходной, записанные с сохранением порядка их следования

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & * & * \\ * & * & 2 & * & * \\ * & * & 3 & * & * \\ * & * & \dots & * & * \\ * & * & k & * & * \\ * & * & \dots & * & * \\ * & * & n-1 & * & * \\ * & * & n & * & * \end{pmatrix}$$

транспонирование

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n-1 & n \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

- Для элементов транспонированной матрицы  $\|A\|_T$  при верно равенство:

$$\alpha_{ij}^T = \alpha_{ji} \quad \forall i = [1, m], \quad \forall j = [1, n]$$

- Операция транспонирования не изменяет симметрическую матрицу, но переводит строку размера  $1 \times m$  в столбец размера  $m \times 1$  и наоборот.

# Элементарные преобразования матрицы

**Определение. Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие преобразования:**

- 1) умножение строки на число, отличное от нуля;
- 2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;
- 3) перестановка строк;
- 4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);
- 5) транспонирование.

- 
- Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.
  - С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк ( столбцов ).
-

# Обратная матрица

- **Определение.** Если существуют квадратные матрицы  $X$  и  $A$  одного порядка, удовлетворяющие условию:  
 $XA = AX = E$ ,  
где  $E$  - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица  $A$ , то матрица  $X$  называется **обратной** к матрице  $A$  и обозначается  $A^{-1}$ .

---

# НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ (1 способ)

---

- К матрице  $A_{ij}$  «дописывают» справа единичную матрицу. С помощью элементарных преобразований приводят матрицу  $A_{ij}$  к единичному виду, тогда матрица, которая получится справа – обратная

$$\left\{ \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \dots & & & \dots \\ & & \dots & & \dots & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\}$$

# ПРИМЕНЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

обратная матрица позволяет найти решения следующих матричных уравнений:

$$AX=C \quad XB=C \quad AXB=C$$

Решение:

$$X=A^{-1}C \quad X=CB^{-1} \quad X=A^{-1}CB^{-1}$$

---

## Замечание:

- В качестве всех или некоторых элементов матрицы возможно использование не только чисел, но и других математических объектов, для которых подходящим образом определены операции сравнения, сложения и умножения на число, например, векторов, функций или тех же матриц.
-