МАТРИЦЫ. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ.

Основные определения

- **Определение.** **Матрицей** размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента

- **Определение.** Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m=n$), то матрица называется **квадратной**

- **Определение.** Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется **единичной матрицей**

- **Определение.** Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**
- **Определение.** Квадратная матрица вида называется **диагональной** матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Основные действия над матрицами

- **Сложение и вычитание** матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера.

- **<u>Определение.</u> Суммой (разностью)** матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

  $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

  $C = A + B = B + A.$

- Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

  $\alpha (A+B) = \alpha A \pm \alpha B$

  $A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Операция умножения матриц

- **Определение: Произведением** матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$A \cdot B = C;$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{jl} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{ml} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1i} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2i} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{l1} & \beta_{l2} & \cdots & \beta_{li} & \cdots & \beta_{\mathrm{ln}} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1i} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2i} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{j1} & \gamma_{j2} & \cdots & \boxed{\gamma_{ji}} & \cdots & \gamma_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mi} & \cdots & \gamma_{mn} \end{Vmatrix} \quad \gamma_{ji} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{jk} \beta_{ki}$$

Свойства операции умножения матриц

- 1)Умножение матриц **не коммутативно**,
  т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**
- Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.
- Заметим: $A \cdot E = E \cdot A = A$
- Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:
- $A \cdot O = O$; $O \cdot A = O$, где O – **нулевая** матрица.

- 2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$, и выполняется равенство:

  $(AB)C=A(BC)$.
- 3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $A(B+C)$ и $(A+B)C$, то соответственно:

  $A(B + C) = AB + AC$

  $(A + B)C = AC + BC$.

- 4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
- 5) Если определено произведение AB , то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

  $(AB)^T = B^T A^T$, где индексом T обозначается **транспонированная** матрица.
- 6) Заметим также, что для любых квадратных матриц $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

  (*Понятие det (определитель, детерминант) будет рассмотрено ниже*).

Операция транспонирования

- ***Транспонированием*** матрицы называется операция, в результате которой образуется новая матрица, где строками служат столбцы исходной, записанные с сохранением порядка их следования

$$\begin{Vmatrix} * & * & 1 & * & * \\ * & * & 2 & * & * \\ * & * & 3 & * & * \\ * & * & \dots & * & * \\ * & * & k & * & * \\ * & * & \dots & * & * \\ * & * & n-1 & * & * \\ * & * & n & * & * \end{Vmatrix} \quad \text{транспонирование} \quad \begin{Vmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n-1 & n \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{Vmatrix}$$

- Для элементов транспонированной матрицы A^{T} при верно равенство:

$$\alpha^{\mathrm{T}}_{i\,j} = \alpha_{j\,i} \qquad \forall i = [1, m], \forall j = [1, n]$$

- Операция транспонирования не изменяет симметрическую матрицу, но переводит строку размера 1x*m* в столбец размера *m*x1 и наоборот.

.

Элементарные преобразования матрицы

Определение. Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;

3) перестановка строк;

4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);

5) транспонирование.

- Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

- С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Обратная матрица

- **Определение.** Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

  $XA = AX = E$,

  где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1}.

НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ
(1 способ)

- К матрице A_{ij} «дописывают» справа единичную матрицу. С помощью элементарных преобразований приводят матрицу A_{ij} к единичному виду, тогда матица, которая получится справа – обратная

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \ldots & & & \ldots \\ & & \ldots & & \ldots & & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

ПРИМЕНЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

обратная матрица позволяет найти решения следующих матричных уравнений:

$AX=C$ $XB=C$ $AXB=C$

Решение:

$X=A^{-1}C$ $X=CB^{-1}$ $X=A^{-1}CB^{-1}$

Замечание:

- В качестве всех или некоторых элементов матрицы возможно использование не только чисел, но и других математических объектов, для которых подходящим образом определены операции сравнения, сложения и умножения на число, например, векторов, функций или тех же матриц.