

# Треугольники

Выполнила ученик 7 «А» класса  
Скапенков Данил

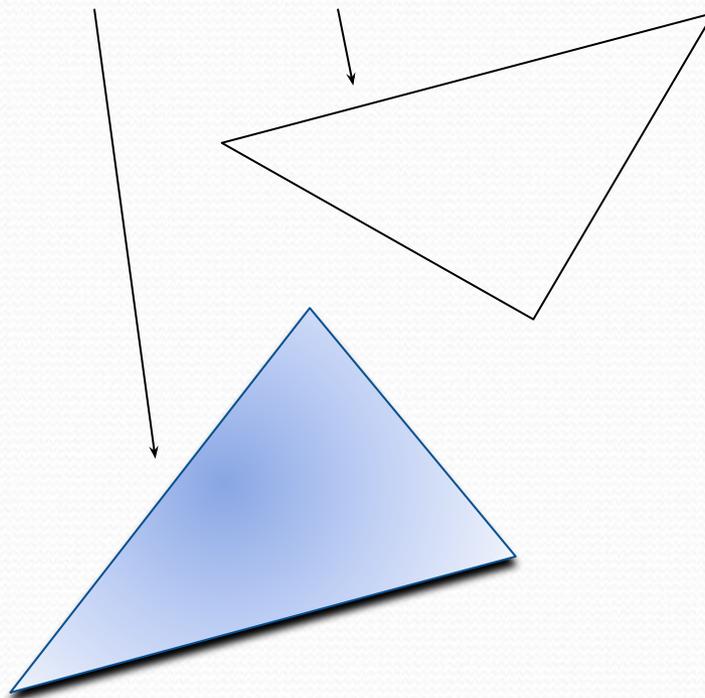
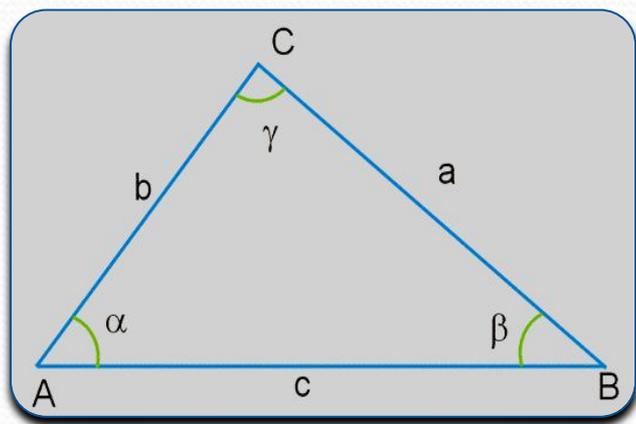
Цель работы: обобщить и систематизировать знания по теме «Треугольники».

Задачи:

- Рассмотреть виды треугольников.
- Доказать основные признаки и свойства треугольников.
- Показать использование знаний по теме при решении задач.

# ТРЕУГОЛЬНИК

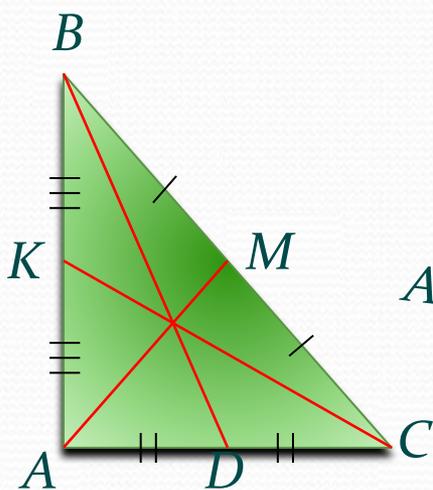
- ❖ простейший многоугольник, имеющий 3 вершины (угла) и 3 стороны;
- ❖ часть плоскости, ограниченная тремя точками, и тремя отрезками, попарно соединяющими эти точки;
- ❖ замкнутая ломаная линия с тремя звеньями.



# Элементы треугольника



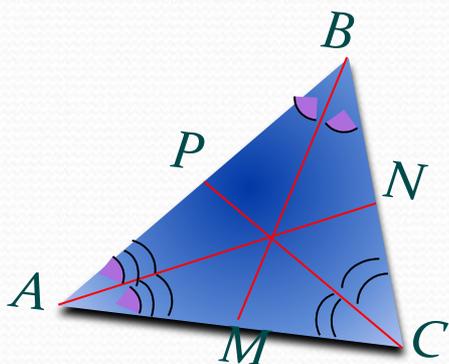
Медиана



$$\begin{aligned} BM &= MC \\ AD &= DC \\ AK &= KB \end{aligned}$$



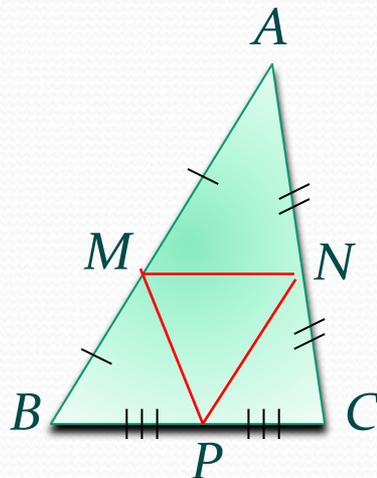
Биссектриса



$$\begin{aligned} \angle ABM &= \angle MBC \\ \angle BCP &= \angle PCA \\ \angle CAN &= \angle NAB \end{aligned}$$



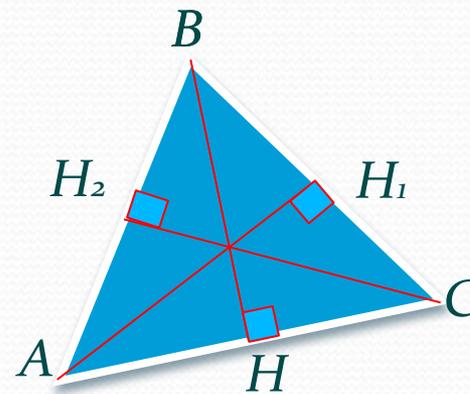
Средняя линия



$$\begin{aligned} BM &= MA \\ AN &= NC \\ MN &\parallel BC \\ BC &= 2 \cdot MN \end{aligned}$$



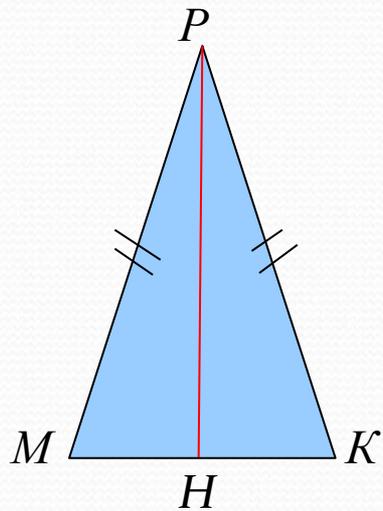
Высота



$$\begin{aligned} BH &\perp AC \\ AH_1 &\perp BC \\ CH_2 &\perp AB \end{aligned}$$

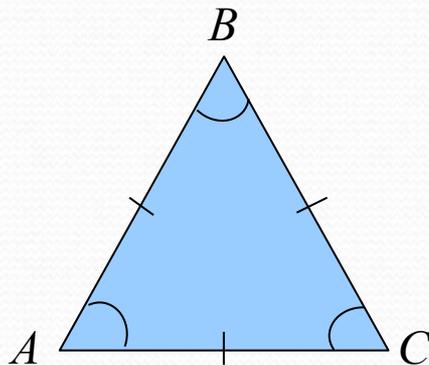
# Виды треугольников по сторонам

Равнобедренный



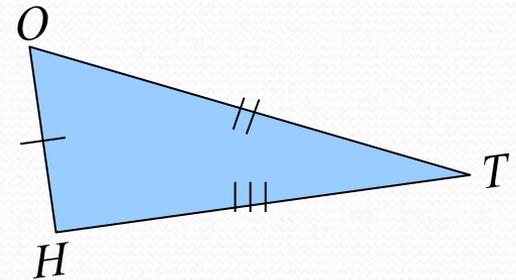
- 1) Углы при основании равны;
- 2) Медиана является биссектрисой и высотой.

Равносторонний



- 1) Все углы равны  $60^\circ$ .

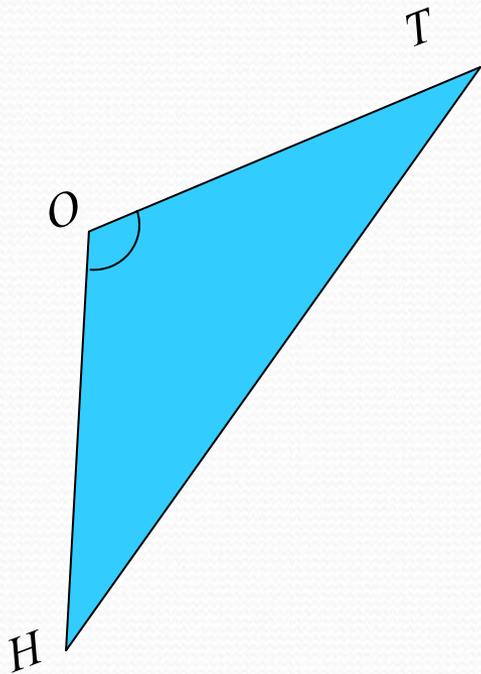
Разносторонний



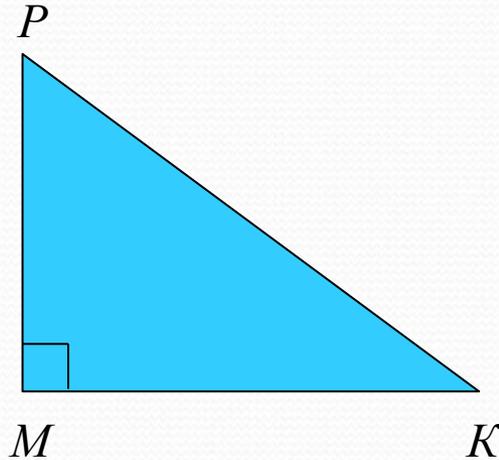
# Виды треугольников по

углам

Тупоугольный

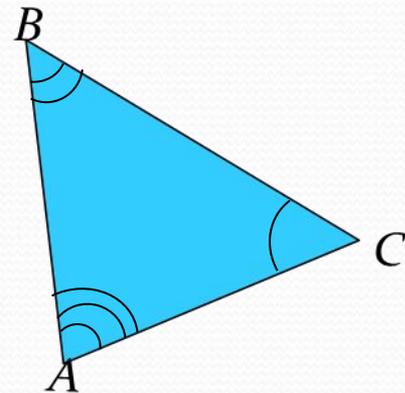


Прямоугольный



$\angle PMK = 90^\circ$ -прямой

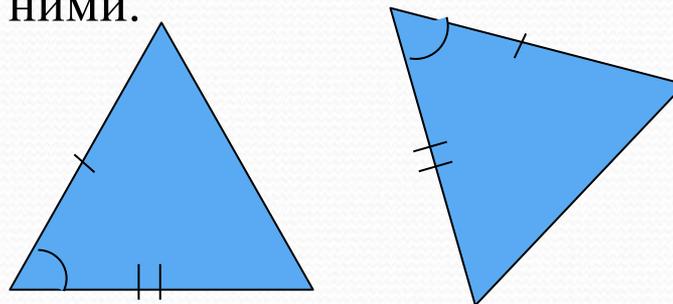
Остроугольный



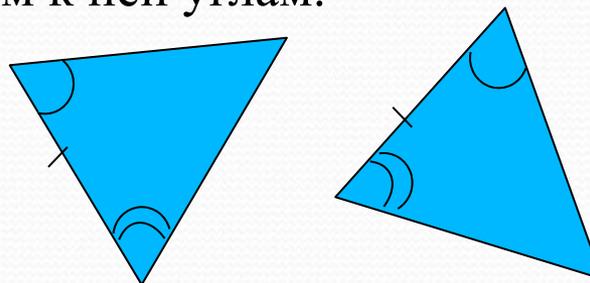
# Равенство треугольников

Признаки равенства треугольников:

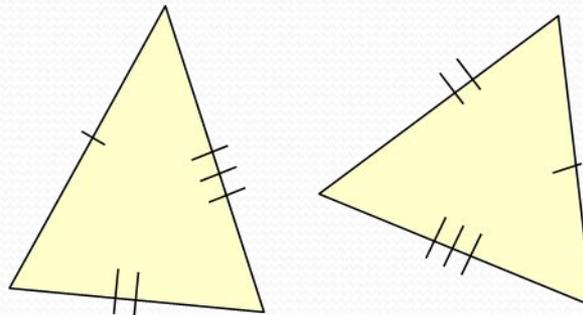
1. По двум сторонам и углу между ними.



2. По стороне и двум прилежащим к ней углам.

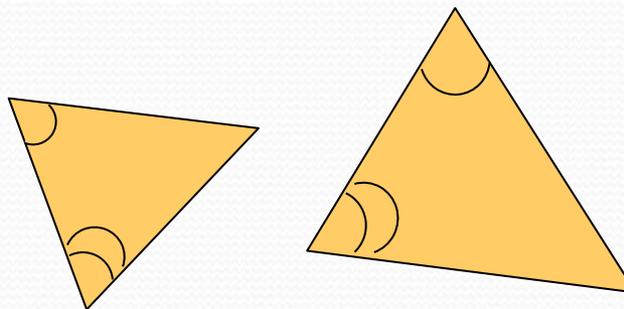


3. По трём сторонам.

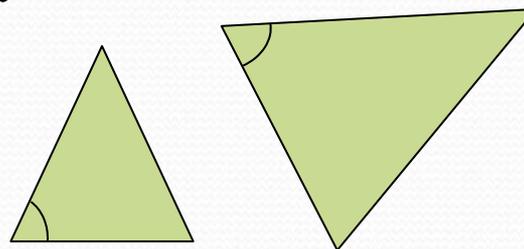


Признаки подобия треугольников:

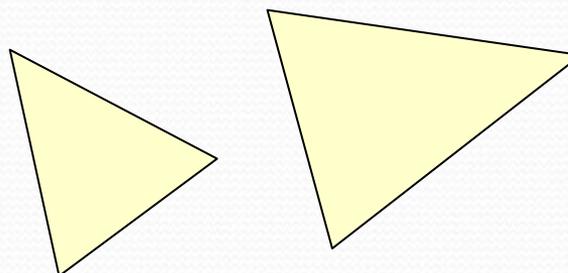
1. По двум углам.



2. По двум сторонам и углу между ними.

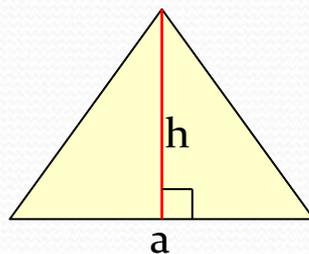


3. По трём сторонам.

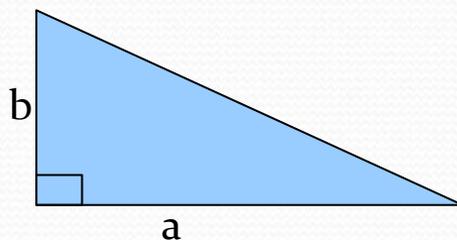


# Площадь треугольника

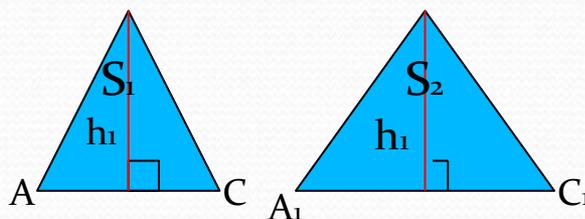
$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot a.$$



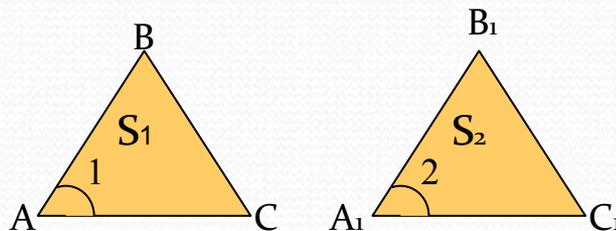
$$S (\text{п/у}\triangle) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b.$$

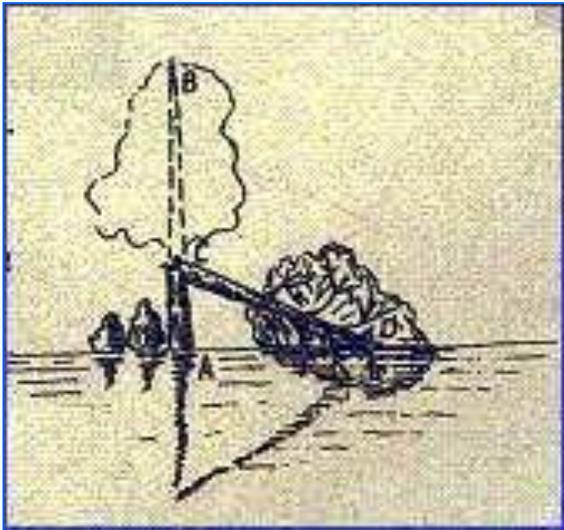


$$h_1 = h_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$



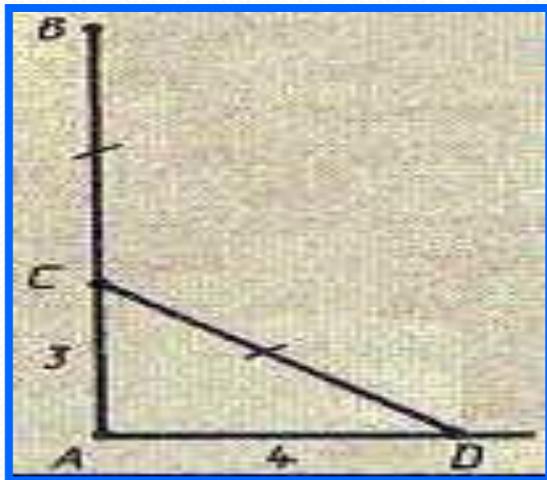
$$\frac{\angle 1}{\angle 2} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1}$$





Вот задача индийского математика 12в. Бхаскары

На берегу реки рос тополь одинокий. Вдруг ветра порыв его ствол надломал. Бедный тополь упал. И угол прямой с течением реки его ствол составлял. Запомни теперь, что в том месте река в четыре лишь фута была широка. Верхушка склонилась у края реки. Осталось три фута всего от ствола, прошу тебя, скоро теперь мне скажи: у тополя как велика высота?



Решение:

По теореме Пифагора находим CD:

$$CD^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow CD = 5.$$

Высота тополя равна: CB+CA. Т.к.

$$CD = CB \Rightarrow$$

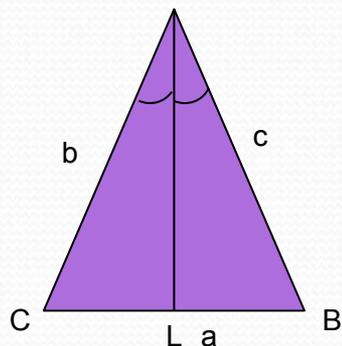
$$AB = AC + CD = 3 + 5 = 8.$$

Ответ: высота тополя 8 футов.

# Биссектриса треугольника до

## створшини

**Теорема 1:** Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные соответствующим боковым сторонам.



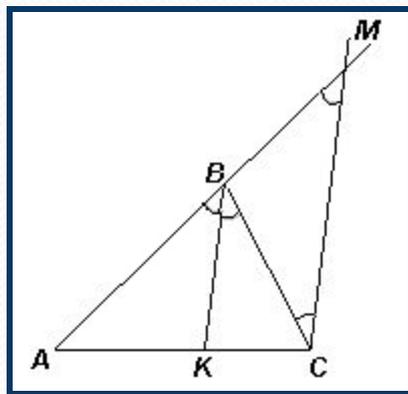
**Следствие:** Пусть AL-биссектриса  $\angle A$  в  $\triangle ABC$ . Тогда отрезки CL и LB находятся по формулам:

$$CL = \frac{ab}{b+c}$$

$$BL = \frac{ac}{b+c}$$

Дано:  $BK$ - биссектриса,  $CM \parallel BK$

Доказательство: Так как  $BK$  – биссектриса  $\angle ABC$ , то  $\angle ABK = \angle KBC$ . Далее,  $\angle ABK = \angle BMC$ , как соответственные углы при параллельных прямых, и  $\angle KBC = \angle BCM$ , как накрест лежащие углы при параллельных прямых. Отсюда  $\angle BMC = \angle BCM$ , и поэтому треугольник  $BMC$  – равнобедренный, откуда  $BC = BM$ . По теореме о параллельных прямых, пересекающих стороны угла, имеем  $AK/KC = AB/BM = AB/BC$ , что и требовалось доказать.



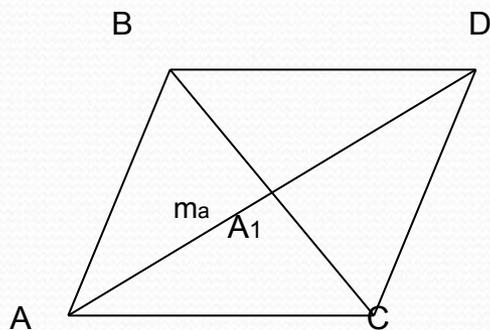
# СВОЙСТВА МЕДИАН

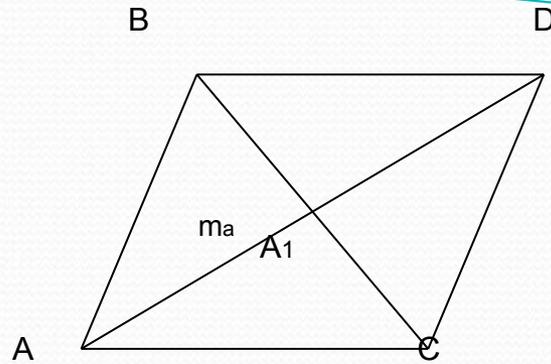
**Теорема:** Если  $a$ ,  $b$ ,  $c$  - стороны  $\triangle ABC$  (рис.34),  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$  - его медианы, проведенные к соответствующим сторонам, то справедливы формулы:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

$$m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4},$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$





Доказательство:

На продолжении медианы  $AA_1$  треугольника  $ABC$  отложим отрезок  $A_1D$  равный отрезку  $AA_1$ . Тогда по теореме о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, имеем:

$$AD^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$$

$$\text{или } 4m^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$

$$\text{откуда } m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

Следствие 1: Если  $a$ ,  $b$ ,  $c$ - стороны  $\triangle ABC$ ,  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$ - его медианы, проведенные к соответствующим сторонам, то справедлива формула:

$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$$

Следствие 2: Если  $a$ ,  $b$ ,  $c$ - стороны  $\triangle ABC$ ,  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$ - его медианы, проведенные к соответствующим сторонам, то справедливы формулы, выражающие стороны треугольника через его медианы:

$$a^2 = \frac{4}{9} \cdot (2m_b^2 + 2m_c^2 + m_a^2),$$

$$b^2 = \frac{4}{9} \cdot (2m_a^2 + 2m_c^2 + m_b^2),$$

$$c^2 = \frac{4}{9} \cdot (2m_a^2 + 2m_b^2 + m_c^2).$$

Следствие 3: В треугольнике  $ABC$   $\angle C = 90^\circ$  тогда и только тогда, когда

$$m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2.$$

# Задача

Дано: в прямоугольном треугольнике медианы катетов  $\xi \overline{52}$  и  $\xi \overline{73}$ .

Найти:  $S_{\triangle ABC}$ .

Решение:

Каждая из медиан катетов образует с прямым углом прямоугольный треугольник. Обозначим длину половины каждого катета как  $a$  и  $b$ . Тогда, по теореме Пифагора получим:

$$a^2 + 4b^2 = (73)^2$$

$b^2 + 4a^2 = (52)^2$ , откуда  $a^2 = 73 - 4b^2$ , подставим выражение во второе уравнение  $b^2 + 4 \cdot (73 - 4b^2) = 52$

$$\begin{cases} b^2 + 292 - 16b^2 = 52 \\ 15b^2 = 240, b^2 = 16, b = 4 \end{cases}$$

Соответственно,  $a^2 = 73 - 4 \cdot 16 = 9$ ,  $a = 3$ .

Таким образом, катеты прямоугольного треугольника равны  $(2a$  и  $2b)$  8 и 6 см.

Откуда площадь прямоугольного треугольника равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ см}^2.$$

Ответ: Площадь прямоугольного треугольника равна  $24 \text{ см}^2$ .

