Глава 2
КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН
2-1. Общие понятия и определения

Конвективным теплообменом или **теплоотдачей** называется процесс переноса теплоты между поверхностью твёрдого тела и жидкой средой. При этом перенос теплоты осуществляется одновременным действием теплопроводности и конвекции.

По природе возникновения различают два вида конвекции – **свободная** и **вынужденная**.

Свободной называется конвекция, происходящая вследствие разности плотностей нагретых и холодных частей жидкости в гравитационном поле.

Вынужденной называется конвекция, возникающая под действием посторонних возбудителей, например насоса, вентилятора и др.

Закон Ньютона-Рихмана: тепловой поток Q пропорционален поверхности F и разности температур стенки и жидкости $(t_\text{с} - t_\text{ж})$.

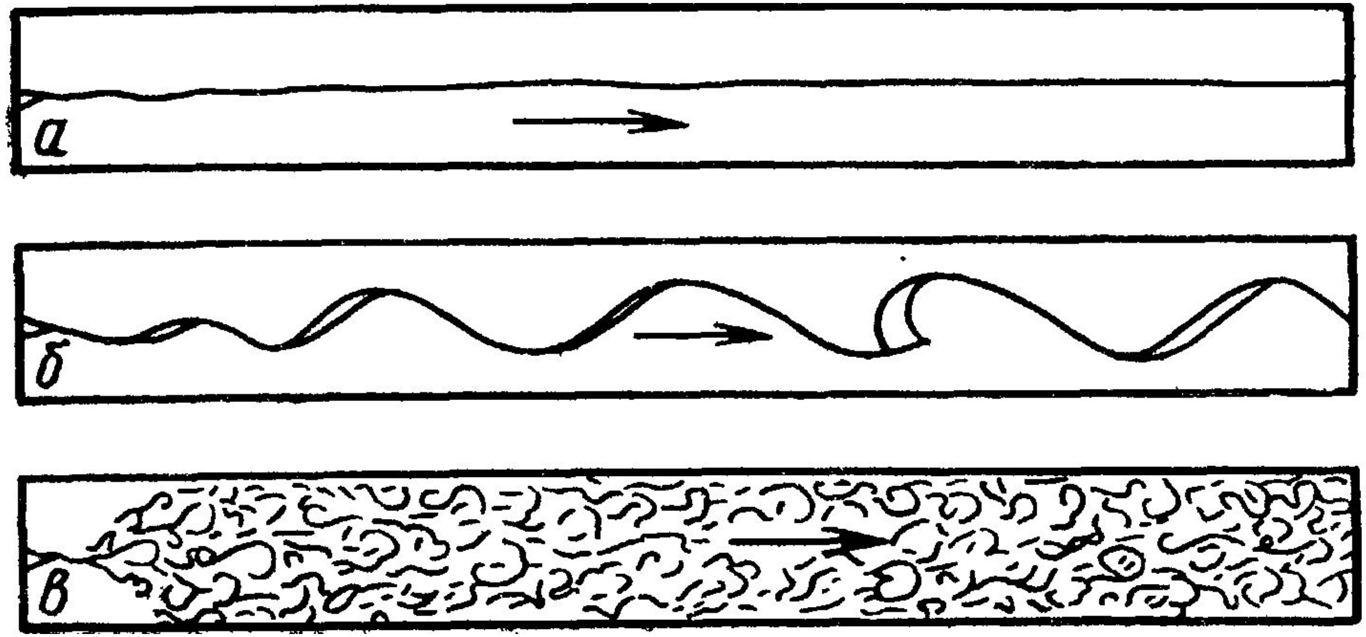
$$Q = \alpha(t_\text{с} - t_\text{ж})F$$

Коэффициент теплоотдачи α численно равен количеству теплоты отдаваемому в единицу времени единицей поверхности при разности температур между поверхностью и жидкостью, равной одному градусу.

$$\alpha = \frac{Q}{(t_\text{с} - t_\text{ж})F}$$

Различают **средний** по поверхности коэффициент теплоотдачи и **местный** (**локальный**) коэффициент теплоотдачи, соответствующий единичному элементу поверхности.

Существуют два основных режима течения жидкости: **ламинарный** и **турбулентный**.



Режим течения жидкости определяется **числом Рейнольдса**.

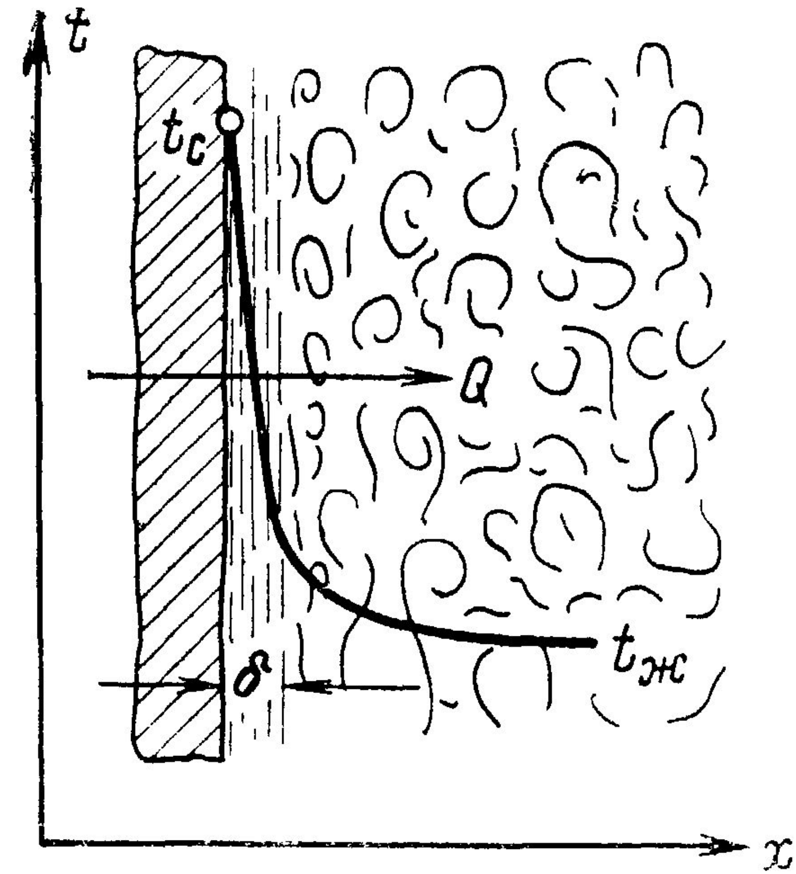
$$\mathrm{Re} = \frac{wl}{\nu}$$

Переход от ламинарного режима течения жидкости к турбулентному происходит при критическом значении числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$.

$$\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 2300$$

При турбулентном движении в тонком слое у поверхности из-за наличия вязкого трения течение жидкости затормаживается и скорость падает до нуля. Этот слой называется **вязким подслоем**.

$$q = -\lambda \operatorname{grad} t$$



Коэффициент температуропроводности

$$a = \frac{\lambda}{c\rho}$$

$$s = \mu \frac{dw}{dn}$$

Динамическая вязкость

$$\mu = \nu\rho$$

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p=const}$$

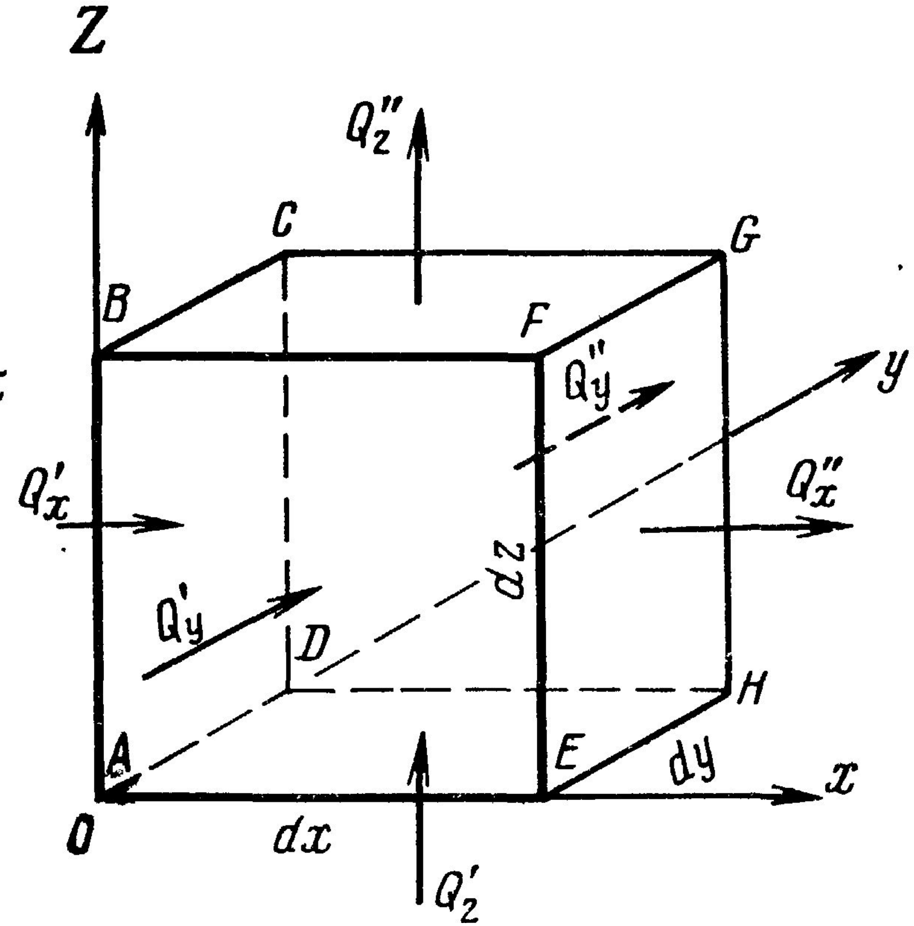
$$\alpha = f(w, t_с, t_ж, \lambda, c_p, \rho, \mu, a, \Phi, l_1, l_2, ...)$$

2-2. Дифференциальные уравнения теплообмена

1. Уравнение теплопроводности

Дифференциальное уравнение теплопроводности выводится на основе закона сохранения энергии.

$\lambda = const \qquad c_p = const \qquad \rho = const$



$$Q_x' = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dy\, dz\, d\tau$$

$$Q_x'' = -\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(t + \frac{\partial t}{\partial x} dx\right) dy\, dz\, d\tau$$

$$dQ_x = Q_x' - Q_x'' = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx\, dy\, dz\, d\tau$$

$$dQ_y = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dx\, dy\, dz\, d\tau$$

$$dQ_z = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dx\, dy\, dz\, d\tau$$

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz\, d\tau$$

Вследствие притока теплоты температура элемента объёма изменится на величину

$$\frac{Dt}{d\tau}d\tau \qquad \frac{Dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}$$

$$dQ = c_p \rho \frac{Dt}{d\tau} dx\, dy\, dz\, d\tau$$ – изменение энтальпии

$$c_p \rho \frac{Dt}{d\tau} dx\, dy\, dz\, d\tau = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) dx\, dy\, dz\, d\tau$$

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) = a \Delta t$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ – оператор Лапласа

Уравнение теплопроводности в движущихся жидкостях

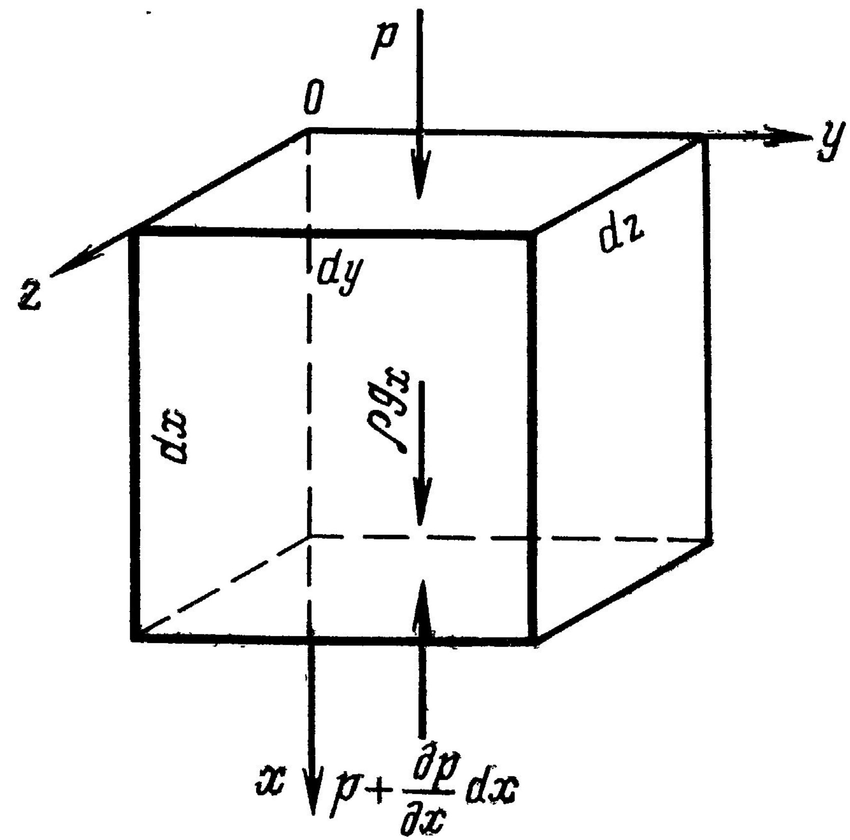
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$$

В применении к твёрдым телам уравнение теплопроводности принимает следующий вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$$

2. Уравнение движения

В движущейся жидкости температурное поле зависит от распределения скоростей, которое описывается дифференциальным уравнением движения, вывод которого основан на втором законе Ньютона.



а) проекция силы тяжести

$$g_x \rho dv = g_x \rho \, dx \, dy \, dz$$

б) равнодействующая сил давления

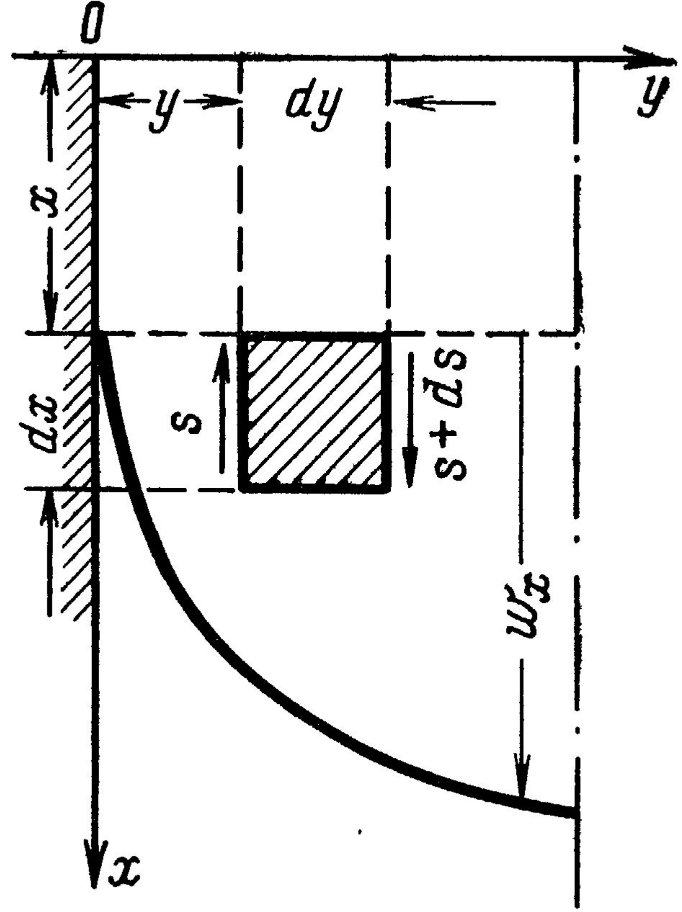
$$p \, dy \, dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy \, dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz$$

в) сила трения

$$\left(s+\frac{ds}{dy}dy\right)dx\,dz-s\,dx\,dz=\frac{ds}{dy}dx\,dy\,dz$$

$$s=\mu\frac{dw_x}{dy}\qquad \mu=\mathrm{const}$$

$$\frac{ds}{dy}dv=\mu\frac{d^2w_x}{dy^2}dv$$



В трёхмерном случае получаем

$$\mu\left(\frac{\partial^2 w_x}{dx^2}+\frac{\partial^2 w_x}{dy^2}+\frac{\partial^2 w_x}{dz^2}\right)dv=\mu\Delta w_x dv$$

Проекция равнодействующей всех сил на ось *x*

$$\left[\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right)\right]dv$$

Согласно второму закону Ньютона эта равнодействующая равна произведению массы элемента на его ускорение:

$$\rho \frac{Dw_x}{d\tau} dv = \rho \left(\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) dv$$

Приравнивая последние два равенства получаем

$$\rho \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + \rho \left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) =$$

$$= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right).$$

Таким же образом могут быть получены уравнения и для проекций равнодействующих сил на оси y и z:

$$\rho \frac{\partial w_y}{\partial \tau} + \rho \left(w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) = \\ = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right);$$

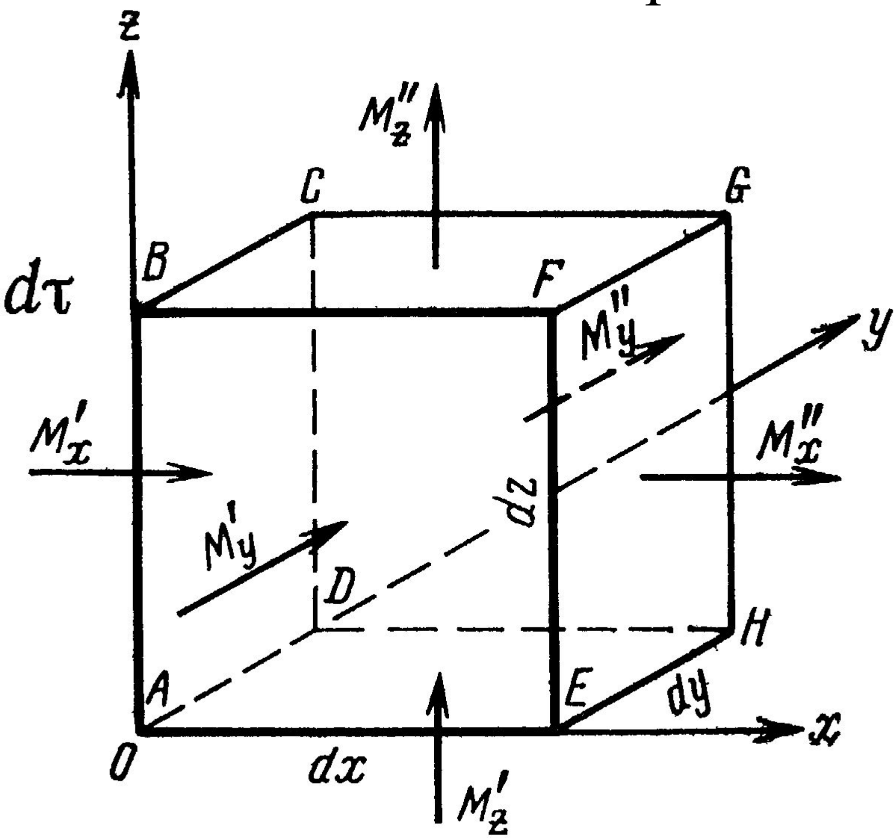
$$\rho \frac{\partial w_z}{\partial \tau} + \rho \left(w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) = \\ = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right).$$

Полученные уравнения и есть дифференциальное уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости − **уравнение Навье-Стокса**.

Это уравнение справедливо как для ламинарного, так и для турбулентного движения.

3. Уравнение сплошности

Уравнение сплошности выводится на основании закона сохранения массы.



$$M_x' = \rho w_x \, dy \, dz \, d\tau$$

$$M_x'' = \left[\rho w_x + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx\right] dy \, dz \, d\tau$$

$$dM_x = M_x'' - M_x'' =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) dx \, dy \, dz \, d\tau$$

$$dM_y = \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) \, dx \, dy \, dz \, d\tau$$

$$dM_z = \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z) \, dx \, dy \, dz \, d\tau$$

Полный избыток массы вытекающей жидкости равен

$$dM = \left[\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} \right] dv d\tau$$

Этот избыток обусловлен уменьшением плотности жидкости в выбранном объёме и равен изменению массы данного объёма во времени.

$$\left[\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} \right] dv d\tau = -\frac{\partial \rho}{\partial \tau} dv d\tau$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0$$

Это дифференциальное *уравнение сплошнисти* или *непрерывности*.

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$ – уравнение сплошнисти для несжимаемой жидкости

4. Краевые условия

Математическое описание всех частных особенностей процессов теплообмена называются ***условиями однозначности*** или ***краевыми условиями***.

Условия однозначности состоят из:

геометрических условий, характеризующих форму и размеры системы, в которой протекает процесс;

физических условий, характеризующих физические свойства среды и тела;

граничных условий, характеризующих особенности протекания процесса на границах тела;

временных условий, характеризующих особенности протекания процесса во времени.

Поток теплоты, передаваемый от жидкости к стенке, проходит через слой жидкости, прилегающий к поверхности, путём теплопроводности и определяется законом Фурье:

$$dQ = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n \to 0} dF$$

С другой стороны для этого же элемента поверхности закон Ньютона-Рихмана записывается в виде

$$dQ = \alpha \left(t_{\text{с}} - t_{\text{ж}} \right) dF$$

$$\alpha = -\frac{\lambda}{t_{\text{с}} - t_{\text{ж}}} \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n \to 0}$$ – **уравнение теплоотдачи**

В случае теплоотдачи при движении жидкости в трубе могут быть заданы такие условия однозначности:

1. Труба гладкая, круглая; внутренний диаметр трубы d и длина l.

2. Рабочим телом, т. е. теплоносителем, является вода, которая несжимаема, ее физические свойства равны: $\lambda(t)$, $c_p(t)$, $\mu(t)$ и $\rho(t)$. Если же зависимостью физических свойств от температуры можно пренебречь, тогда они задаются просто в виде числовых значений λ, c_p, μ и ρ.

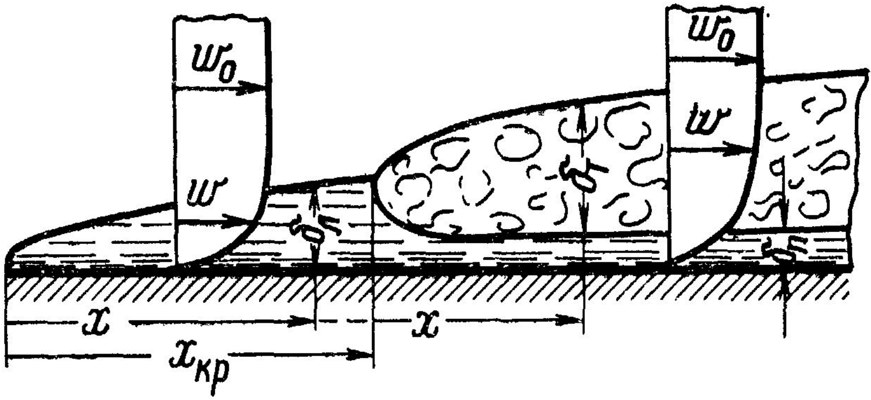
3. Температура жидкости на входе равна $t'_ж$, а на поверхности трубы $t_с$. Скорость на входе равна w, а у самой стенки $w = 0$. Если же температура и скорость на входе не постоянны, то должен быть задан закон их распределения по сечению.

4. Для стационарных процессов временные условия однозначности отпадают.

Итак, математическое описание процесса теплоотдачи состоит из: 1) уравнения теплопроводности; 2) уравнения движения; 3) уравнения сплошности; 4) уравнения теплоотдачи и 5) условий однозначности.

Глава 3
ТЕПЛООБМЕН В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ
3-1. Теплоотдача при обтекании плоской поверхности (пластины)
1. Гидродинамические условия развития процесса.

$$\delta_{л} = 5\,\frac{x}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} = 5\left(\frac{x\nu}{w_0}\right)^{1/2}$$



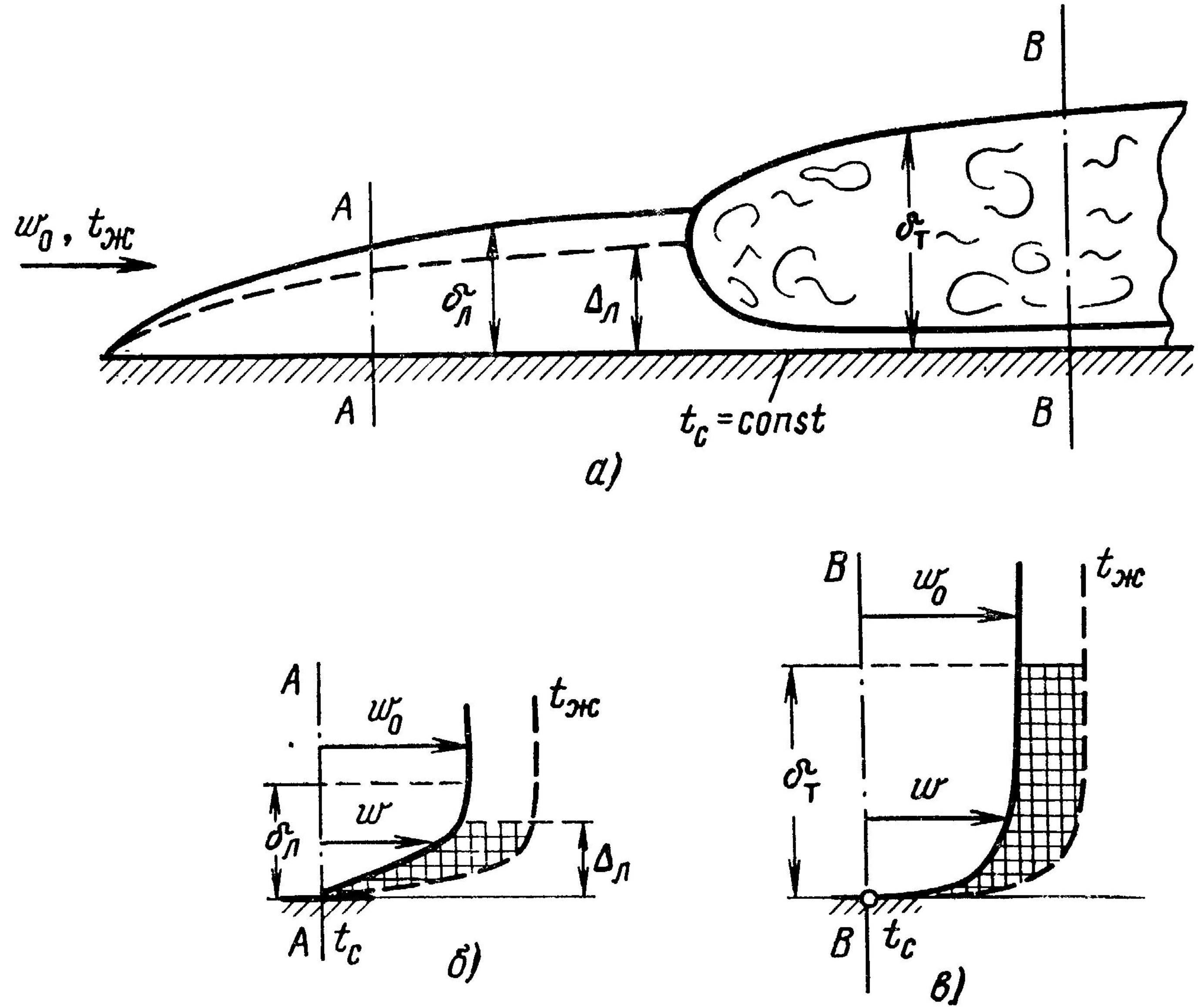
$$\delta_{т} = 0{,}37\,\frac{x}{\mathrm{Re}_x^{0,2}} = 0{,}37\left(\frac{x^4\nu}{w_0}\right)^{1/5}$$

$$\mathrm{Re}_x = w_0 x/\nu \qquad \mathrm{Re}_{x\,кр} = \frac{w_0 x_{кр}}{\nu} \qquad \mathrm{Re}_{x\,кр} = 5\cdot 10^5$$

2. Теплоотдача.

Плотность теплового потока между поверхностью и потоком теплоносителя

$$q = \alpha\,(t_с - t_ж)$$



При ламинарном режиме течения в пограничном слое местный коэффициент теплоотдачи определяется из соотношения

$$Nu_{x\,ж} = 0,33\,\mathrm{Re}_{x\,ж}^{0,5}\,\mathrm{Pr}_{ж}^{0,33}(\mathrm{Pr}_{ж}/\mathrm{Pr}_{с})^{0,25} \qquad Nu_{x\,ж} = \frac{\alpha x}{\lambda_{ж}} \qquad \mathrm{Re}_{x\,ж} = \frac{w_0 x}{\nu_{ж}}$$

Для получения среднего коэффициента теплоотдачи можно использовать соотношение

$$\overline{Nu}_{l\,ж} = 0,66\,\mathrm{Re}_{l\,ж}^{0,5}\,\mathrm{Pr}_{ж}^{0,33}(\mathrm{Pr}_{ж}/\mathrm{Pr}_{с})^{0,25} \qquad \overline{Nu}_{l\,ж} = \frac{\alpha l}{\lambda_{ж}} \qquad \mathrm{Re}_{l\,ж} = \frac{w_0 l}{\nu_{ж}}$$

При турбулентном режиме течения в пограничном слое местный коэффициент теплоотдачи определяется из соотношения

$$Nu_{x\,ж} = 0,03\,\mathrm{Re}_{x\,ж}^{0,8}\,\mathrm{Pr}_{ж}^{0,43}(\mathrm{Pr}_{ж}/\mathrm{Pr}_{с})^{0,25} \qquad \mathrm{Pr}_{ж} = \frac{\nu_{ж}}{a_{ж}} \qquad \mathrm{Pr}_{с} = \frac{\nu_{с}}{a_{с}}$$

Для получения среднего коэффициента теплоотдачи можно использовать соотношение

$$\overline{Nu}_{l\,ж} = 0,037\,\mathrm{Re}_{l\,ж}^{0,8}\,\mathrm{Pr}_{ж}^{0,43}(\mathrm{Pr}_{ж}/\mathrm{Pr}_{с})^{0,25}$$

$\mathrm{Pr}_{ж}/\mathrm{Pr}_{с} > 1$ − жидкость нагревается

$\mathrm{Pr}_{ж}/\mathrm{Pr}_{с} < 1$ − жидкость охлаждается

Расчётные формулы для газов можно упростить.

Для воздуха $\Pr = 0,71$, расчётные формулы для средней теплоотдачи принимают вид:

а) при ламинарном режиме течения в пограничном слое

$$\overline{Nu}_{l\text{ж}} = 0,57\,\mathrm{Re}_{l\text{ж}}^{0,5}$$

б) при турбулентном режиме течения в пограничном слое

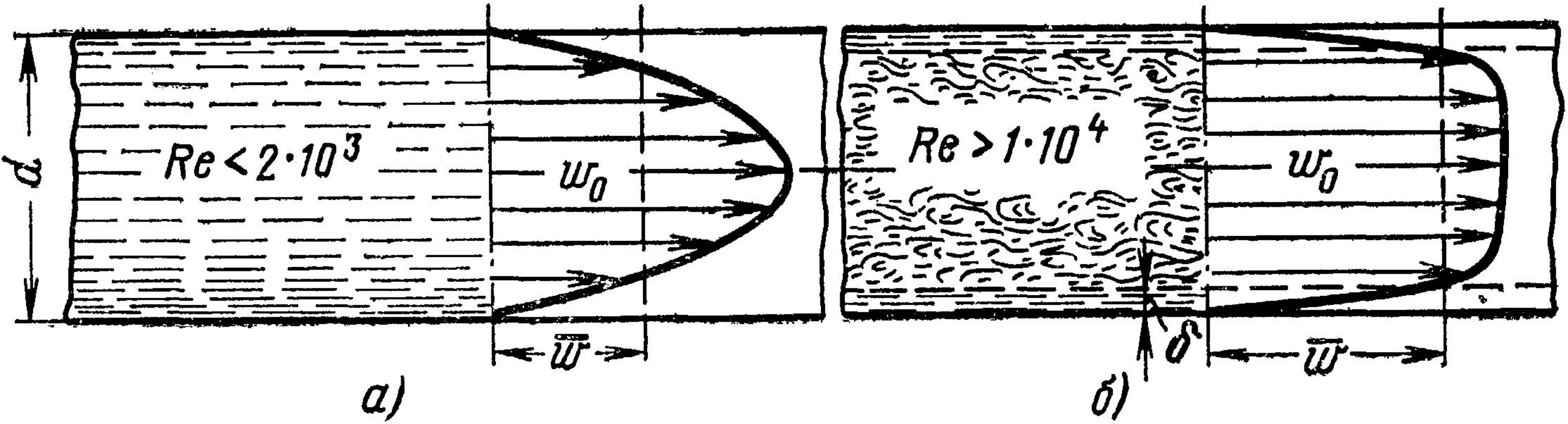
$$\overline{Nu}_{l\text{ж}} = 0,032\,\mathrm{Re}_{l\text{ж}}^{0,8}$$

Все приведённые выше формулы применимы для условия, когда температура пластины постоянна, т.е. не изменяется по длине.

$$t_{\text{с}} = const$$

3-2. Теплоотдача при течении жидкости в трубах

1. Гидродинамические условия развития процесса.



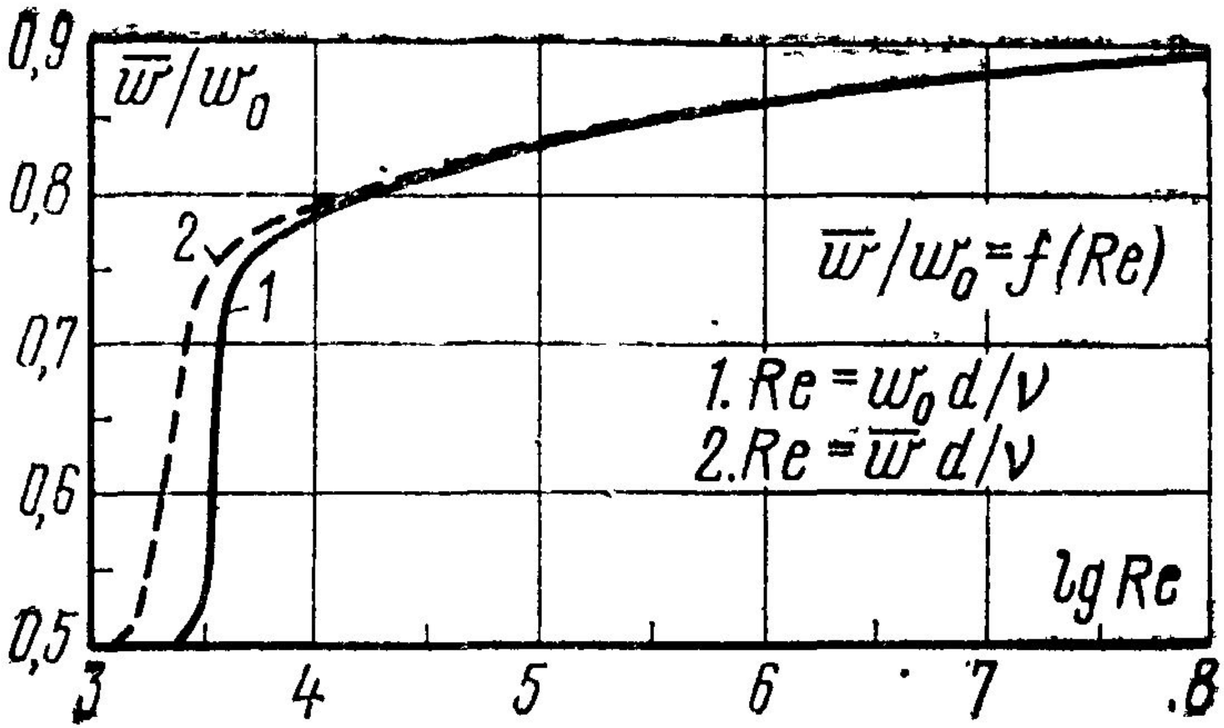
$$w = w_0(1 - y^2/r^2)$$

В практических расчётах обычно имеют дело со средним значением скорости:

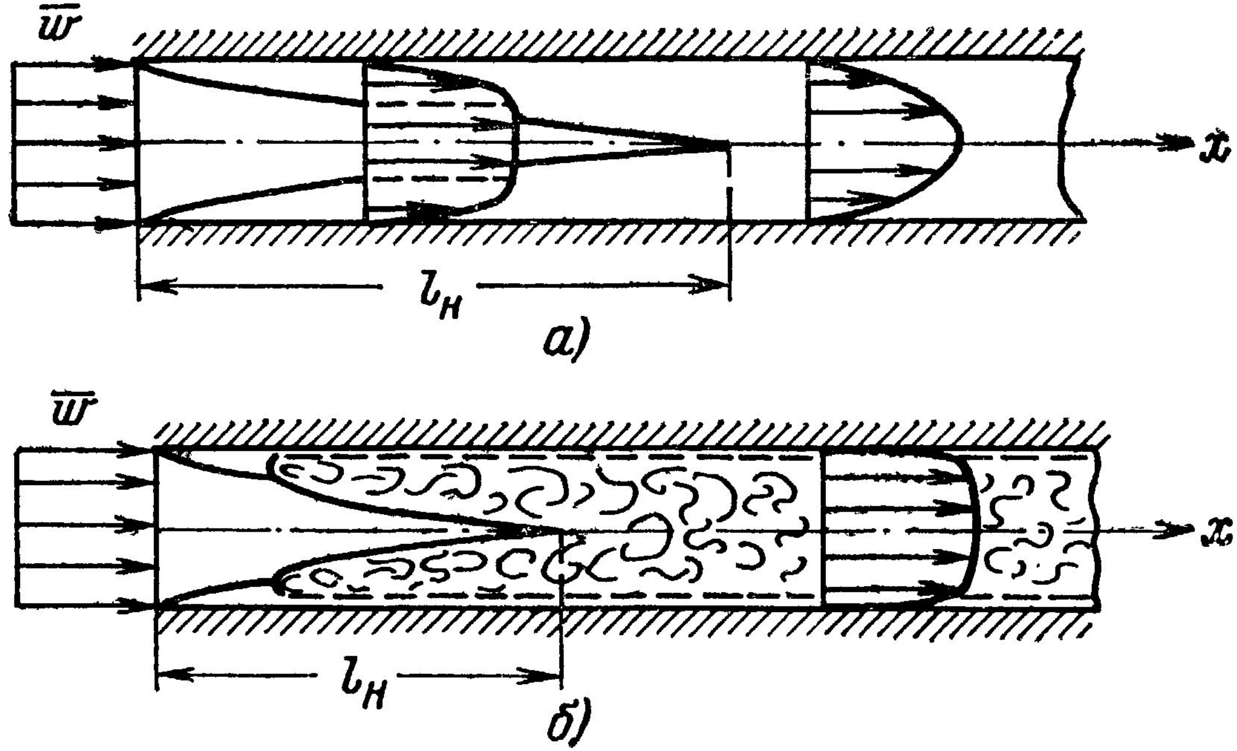
$$\bar{w} = \frac{1}{f}\int_f w\,df = \frac{V}{f}$$

$$\frac{\bar{w}}{w_0} = 0,5$$ − ламинарный режим течения

Турбулентный режим течения жидкости



Приведённые законы распределения скоростей по сечению трубы справедливы лишь для так называемого ***гидродинамически стабилизированного движения***.



Гидродинамическая стабилизация течения жидкости в трубе.

а — ламинарный режим течения; *б* — турбулентный режим течения.

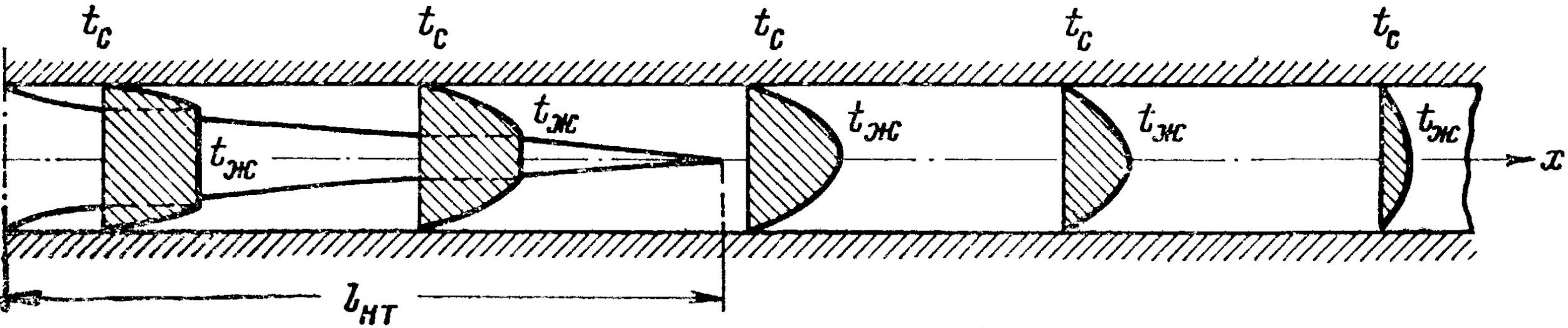
Длина гидродинамического начального участка стабилизации потока при ламинарном режиме

$$l_н = 0,05d\,\mathrm{Re}$$

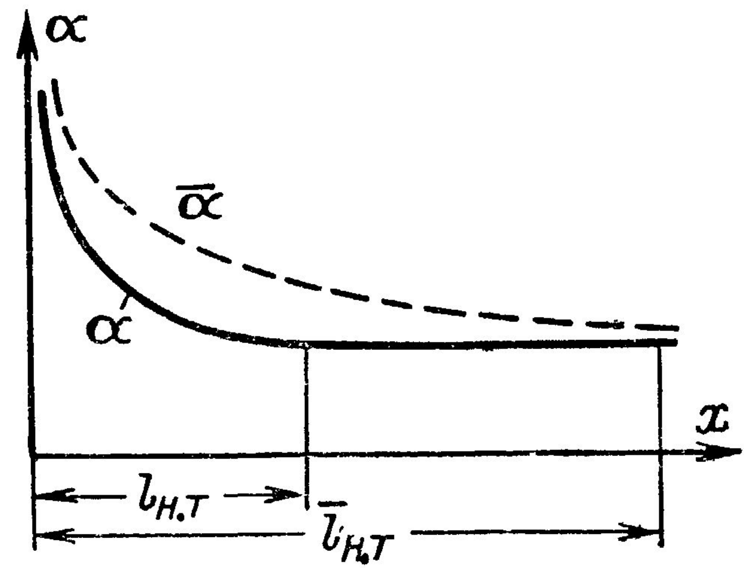
при турбулентном режиме

$$l_н = 15d$$

2. Теплоотдача при ламинарном режиме.



$$l_{\text{н.т}} \approx 0{,}05\, d\, \mathrm{Re}\, \mathrm{Pr}$$



$$\alpha_{\text{лок}} = -\lambda \frac{\left(\dfrac{\partial t}{\partial n}\right)_{n\to 0}}{\bar{t}_{\text{ж}x} - t_{\text{c}}} = \frac{q_x}{\bar{t}_{\text{ж}x} - t_{\text{c}}}$$

$$\bar{t}_{\text{ж}x} = \frac{\int\limits_f c_p \rho w t_{\text{ж}} df}{\int\limits_f c_p \rho w df}$$

– средняя температура потока в данном сечении

$c_p = const$ $\rho = const$

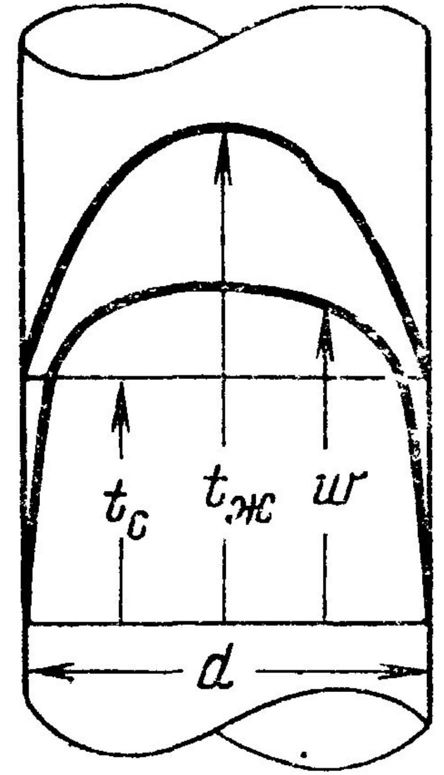
$$\bar{t}_{жx} = \frac{\int_f w\, t_ж\, df}{\int_f w\, df} = \frac{1}{V}\int_f w t_ж df$$

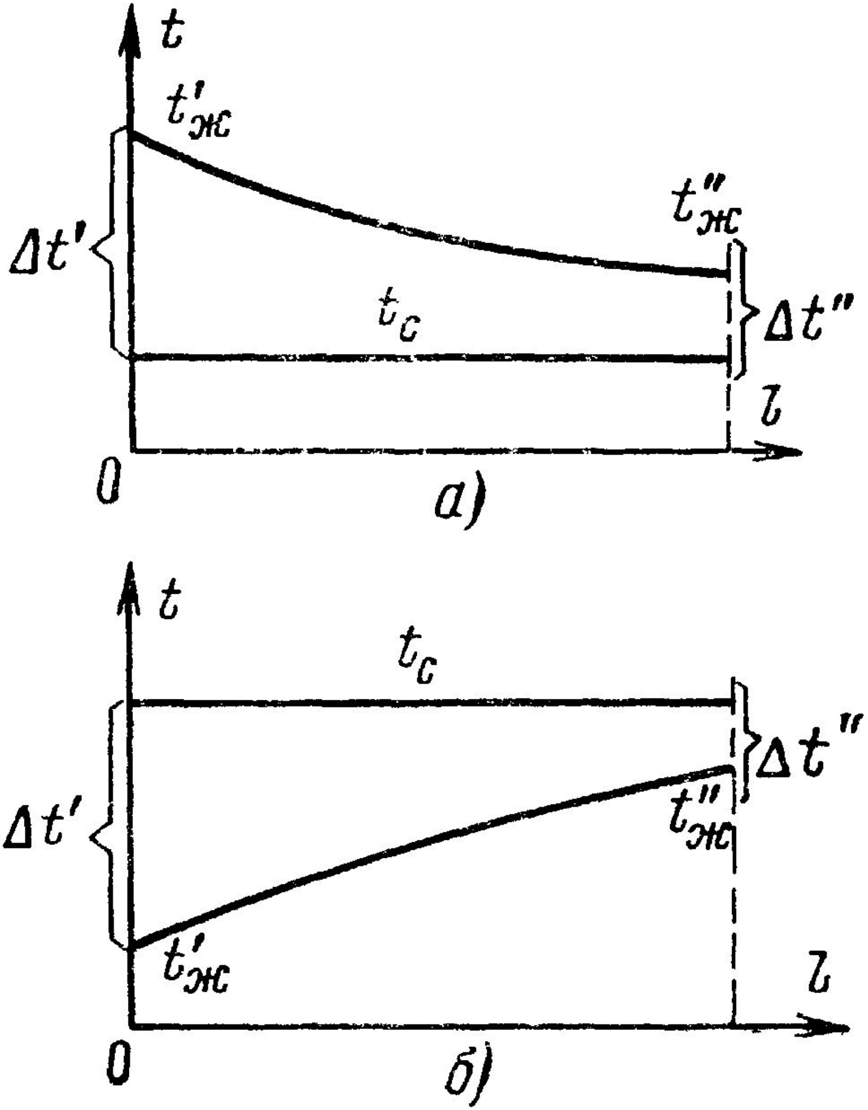
$w = const$ $\bar{t}_{жx} = \frac{1}{f}\int_f t\, df$

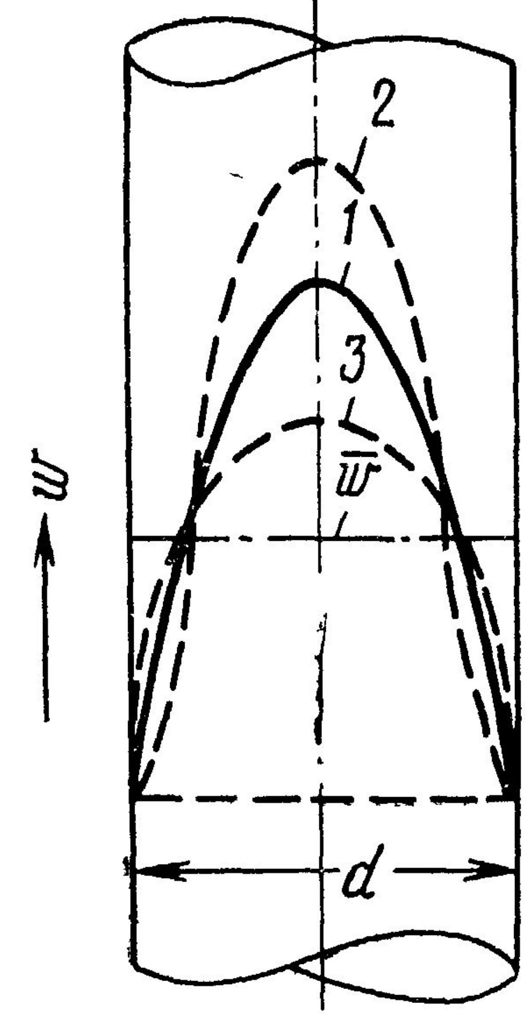
$$\bar{\alpha} = \frac{Q}{F(\bar{t}_ж - \bar{t}_с)} = \frac{\bar{q}}{\bar{t}_ж - \bar{t}_с}$$

$\bar{t}_с = const$ $\bar{t}_ж = \frac{1}{2}\left(t'_ж + t''_ж\right)$ $\bar{t}_ж = t_с \pm \Delta t_{лог}$

$$\Delta t_{лог} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{2,303 \lg \frac{\Delta t'}{\Delta t''}}$$ – среднелогарифмический температурный напор







1 – изотермическое течение;

2 – при охлаждении;

3 – при нагревании

Расчёт среднего коэффициента теплоотдачи при ламинарном режиме течения жидкости в трубах при

$$l/d > 10 \qquad \mathrm{Re}_{ж} > 10 \qquad 0{,}06 < \mathrm{Pr}_{ж}/\mathrm{Pr}_{c} < 10$$

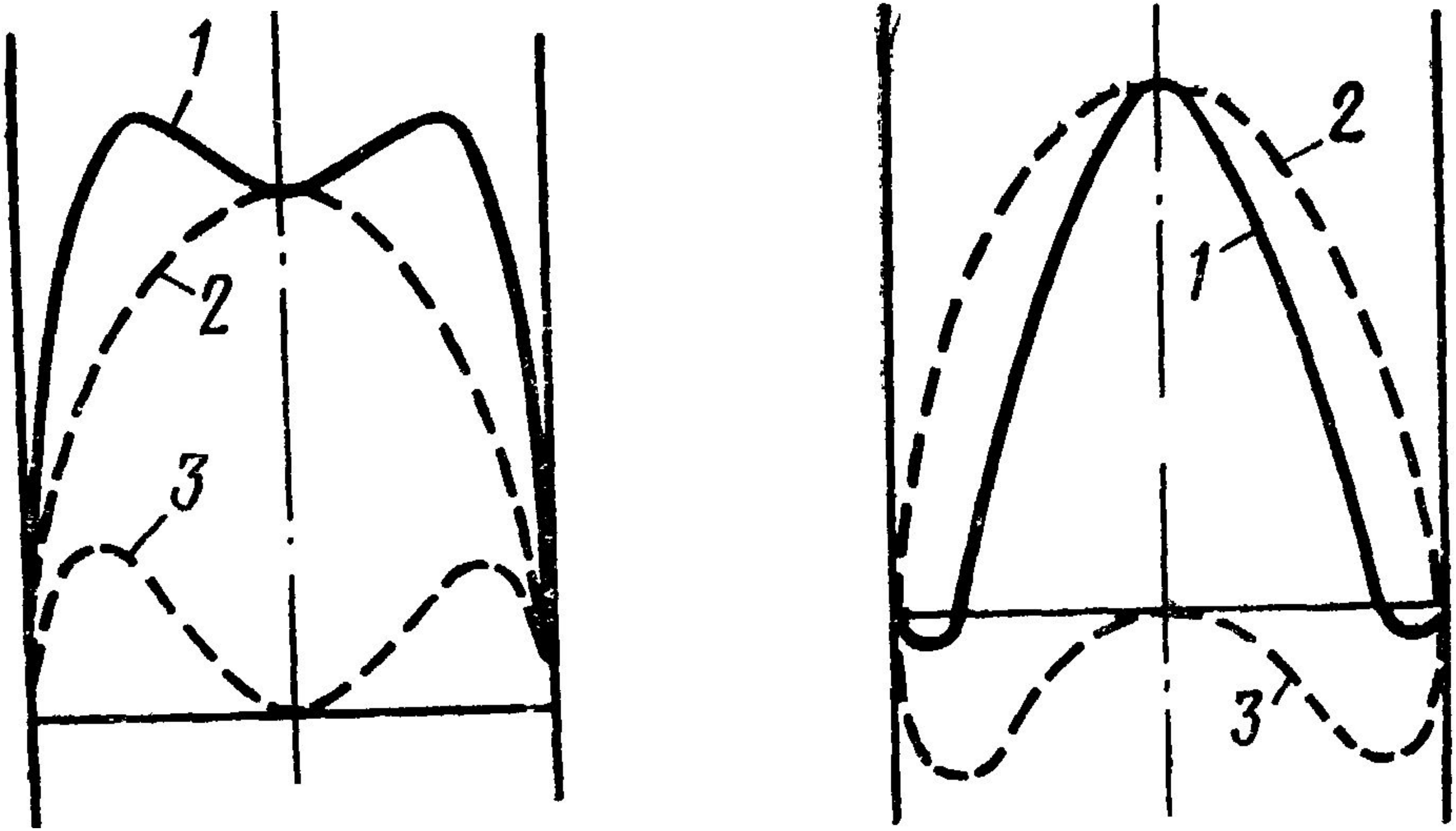
$$\overline{\mathrm{Nu}}_{dж} = 1{,}4\left(\mathrm{Re}_{dж}\frac{d}{l}\right)^{0{,}4}\mathrm{Pr}_{ж}^{0{,}33}(\mathrm{Pr}_{ж}/\mathrm{Pr}_{c})^{0{,}25} \qquad \overline{\mathrm{Nu}}_{dж} = \bar{\alpha}d/\lambda_{ж}$$

$$\mathrm{Re}_{dж} = wd/\nu_{ж} \qquad \mathrm{Pr}_{ж} = \nu_{ж}/a_{ж} \qquad \mathrm{Pr}_{c} = \nu_{c}/a_{c}$$

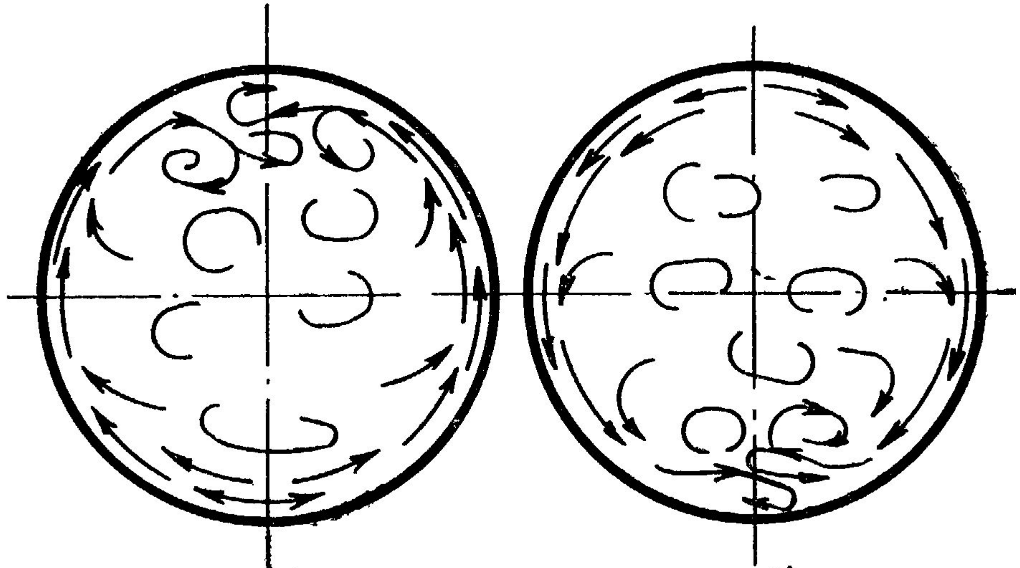
Это соотношение справедливо при $\mathrm{Re}_{dж}\frac{d}{l}\mathrm{Pr}_{ж}^{5/6} > 15$

При меньших значениях этой величины, т.е. для труб весьма большой длины $l/d > 0{,}067\,\mathrm{Re}_{dж}\,\mathrm{Pr}_{ж}^{5/6}$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{dж} \approx 4\,(\mathrm{Pr}_{ж}/\mathrm{Pr}_{c})^{0{,}25}$$



Распределение скоростей по сечению трубы при совпадении направлений вынужденного и свободного движений (слева) и взаимно противоположных направлениях вынужденного и свободного движений (справа): 1 − суммарное распределение; 2 − за счёт вынужденного движения; 3 − за счёт свободного движения.



а) б)

Поперечная циркуляция в горизонтальной трубе вследствие наличия свободного движения жидкости: *а* − при нагревании жидкости; *б* − при охлаждении жидкости.

3. Теплоотдача при турбулентном режиме.

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{d ж} = 0{,}021\, \mathrm{Re}_{d ж}^{0,80}\, \mathrm{Pr}_{ж}^{0,43}\, (\mathrm{Pr}_{ж}/\mathrm{Pr}_{с})^{0,25} \varepsilon_l$$

$d_{эк} = \dfrac{4f}{u}$ – эквивалентный диаметр канала

Значения зависимости $\varepsilon_l = f(l/d,\ \mathrm{Re}_{d ж})$ при турбулентном режиме

$\mathrm{Re}_{d ж}$	l/d								
	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$1 \cdot 10^4$	1,65	1,50	1,34	1,23	1,17	1,13	1,07	1,03	1
$2 \cdot 10^4$	1,51	1,40	1,27	1,18	1,13	1,10	1,05	1,02	1
$5 \cdot 10^4$	1,34	1,27	1,18	1,13	1,10	1,08	1,04	1,02	1
$1 \cdot 10^5$	1,28	1,22	1,15	1,10	1,08	1,06	1,03	1,02	1
$1 \cdot 10^6$	1,14	1,11	1,08	1,05	1,04	1,03	1,02	1,01	1

Для воздуха это соотношение упрощается

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{d ж} = 0{,}018\, \mathrm{Re}_{d ж}^{0,8}$$

Расчет теплоотдачи в изогнутых трубах производится по формулам для прямой трубы с последующим введением в качестве сомножителя поправочного коэффициента ε_R, который для змеевиковых труб определяется соотношением

$$\varepsilon_R = 1 + 1,77 \frac{d}{R}$$