



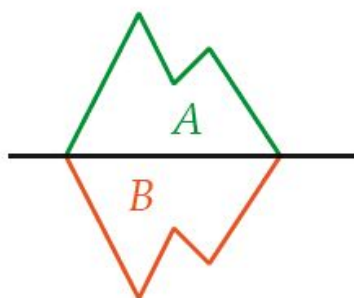
# Ģeometriskie pārveidojumi

Autore: **Mag. paed.,  
matemātikas skolotāja  
Irina Maslobojeva**

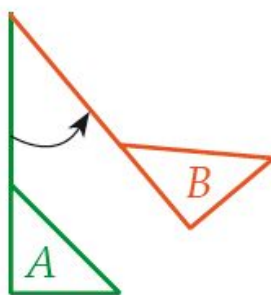
# Ģeometriskie pārveidojumi



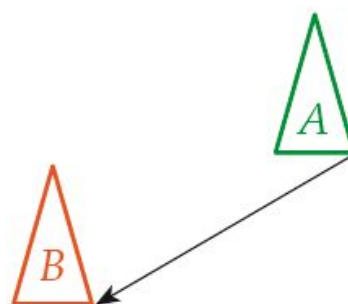
# Ģeometrisko pārveidojumu veidi



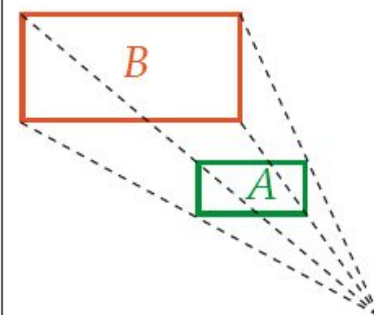
Figūra *A* attēlojas pret taisni, izveidojot figūru *B*



Figūra *A* tiek pagriezta par noteiktu leņķi, iegūstot figūru *B*



Figūra *A* tiek pārvietota noteiktā virzienā par noteiktu atstālumam, iegūstot figūru *B*



Figūra *A* tiek pārvietota noteiktā virzienā un palielināta vai samazināta noteiktu skaitu reižu, iegūstot figūru *B*

# Kas ir ģeometriskie pārveidojumi?

Ģeometriskie pārveidojumi ir funkcijas, kas pēc noteikta likuma katram plaknes punktam piekārto tieši vienu noteiktu plaknes punktu.

Ģeometrisko pārveidojumu funkcijas definīcijas un vērtību kopa ir visa plakne — plakne attēlojas sevī.





# ***Paralēlā pārnese***

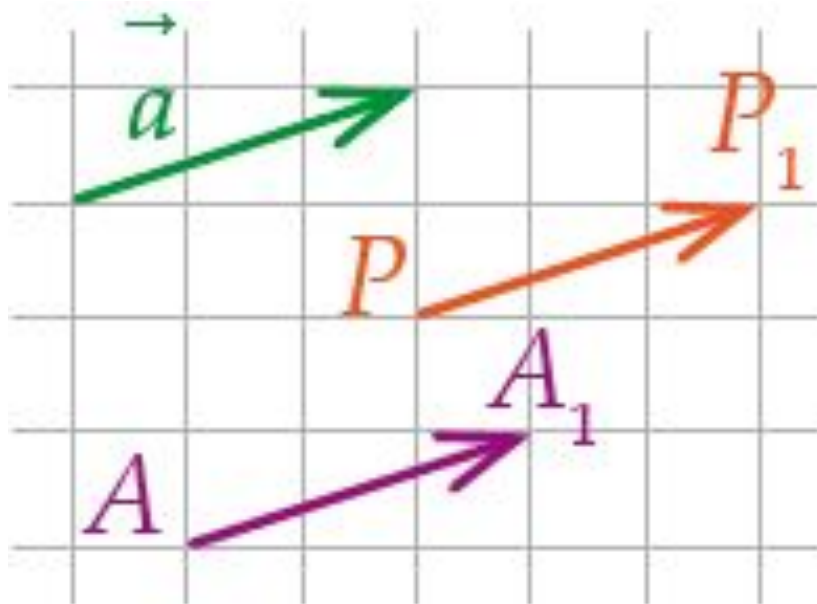
# Paralēlās pārnese jēdziens

Paralēlā pārnese par vektoru  $\vec{a}$  ir pārveidojums, kurā katrs punkts  $P$  attēlojas par tādu punktu  $P_1$ , ka  $\overrightarrow{PP_1} = \vec{a}$ . Lai paralēlā pārnese būtu definēta, jābūt uzdotam pārvietojuma vektoram  $\vec{a}$ .

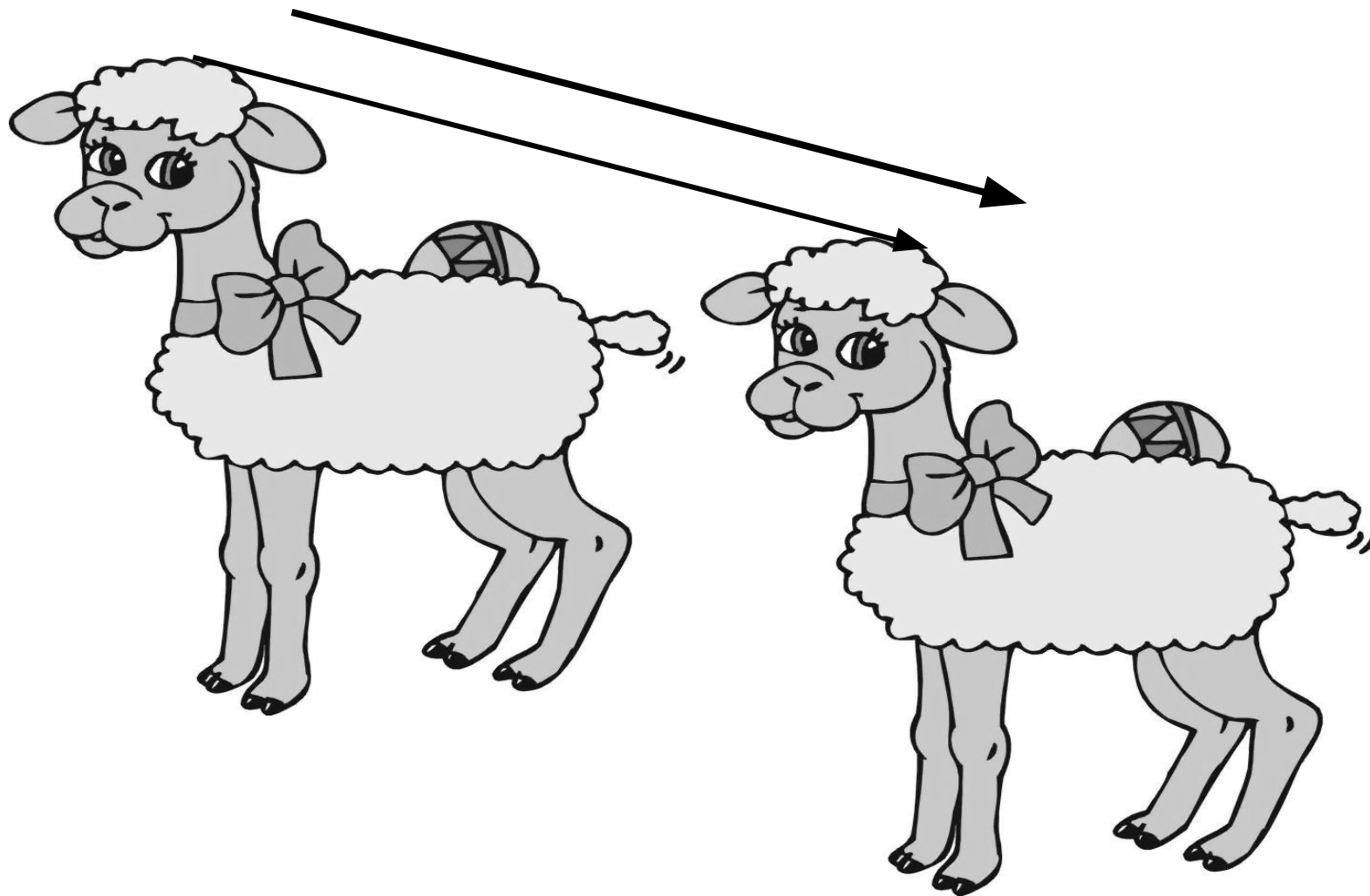
Lai konstruētu punkta  $P$  attēlu paralēlajā pārnēsē par vektoru  $\vec{a}$ , no šī punkta, kā sākumpunkta, jāatliek vektors  $\vec{a}$ , un atliktā vektora galapunkts  $P_1$  ir punkta  $P$  attēls paralēlajā pārnēsē par vektoru  $\vec{a}$ .

# Paralēlā pārnese (I. piemērs)

Paralēlajā pārnēsē par vektoru  $\vec{a}$ , punkta  $A$  attēls ir  $A_1$ , punkta  $P$  attēls ir  $P_1$ , jo  $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$  un  $\overrightarrow{PP_1} = \vec{a}$ .

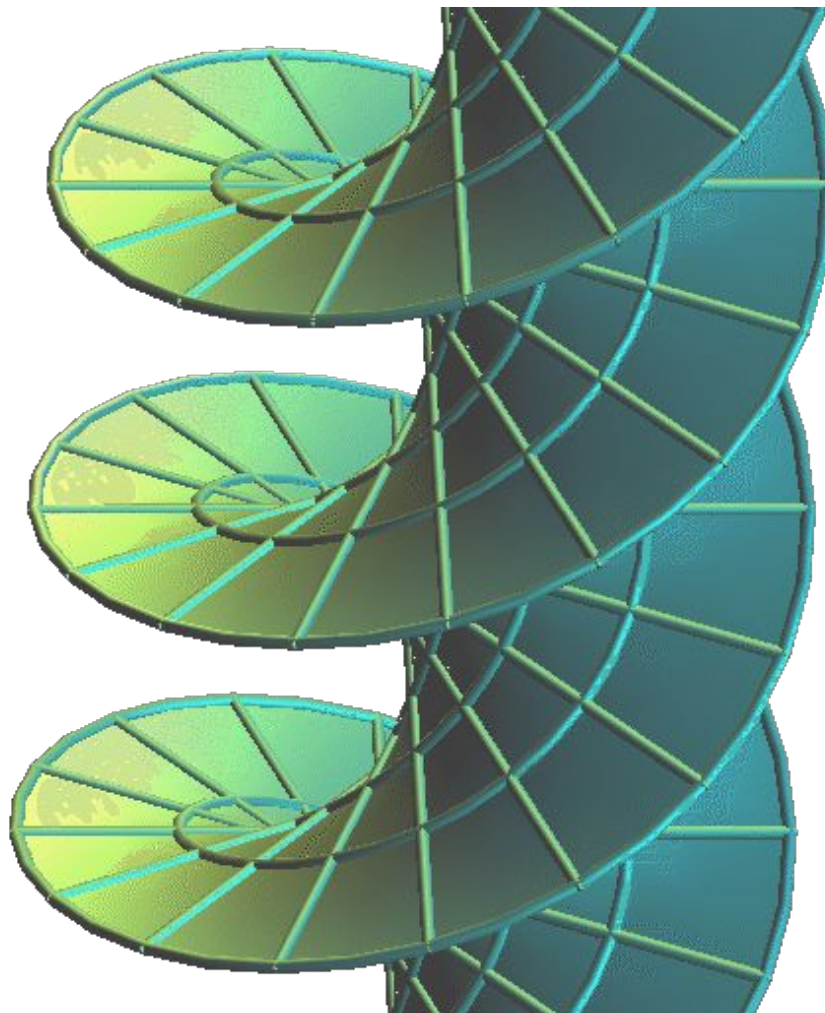


# Paralēlā pārnese (2. piemērs)



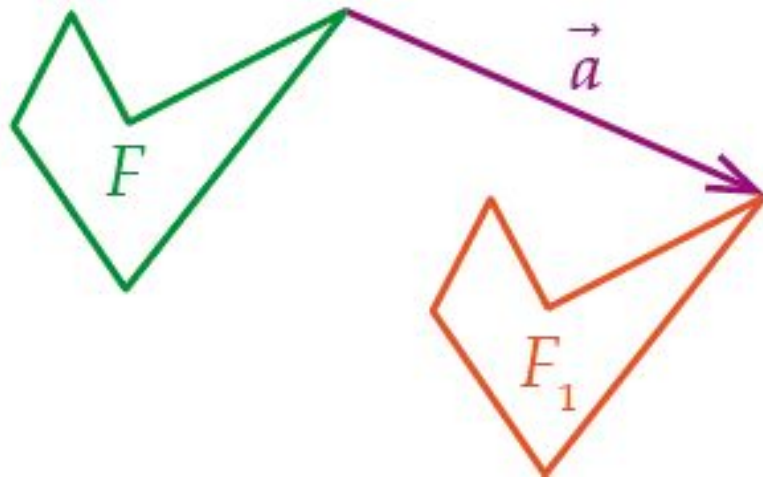


# Paralēlā pārnese (3. piemērs)



# Paralēlās pārnese 1. īpašība

1. Visiem figūras  $F$  punktiem izmantojot paralēlo pārnese, iegūst figūrai  $F$  vienādu figūru  $F_1$ .

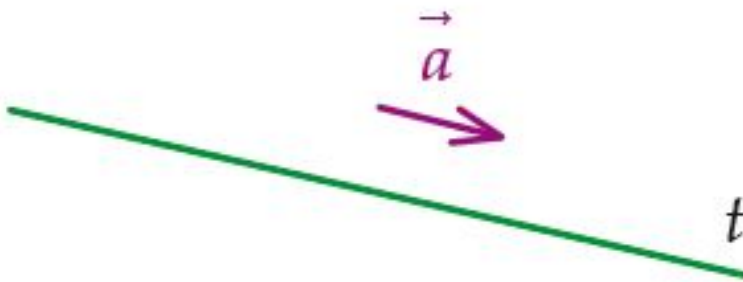


2.5. att.

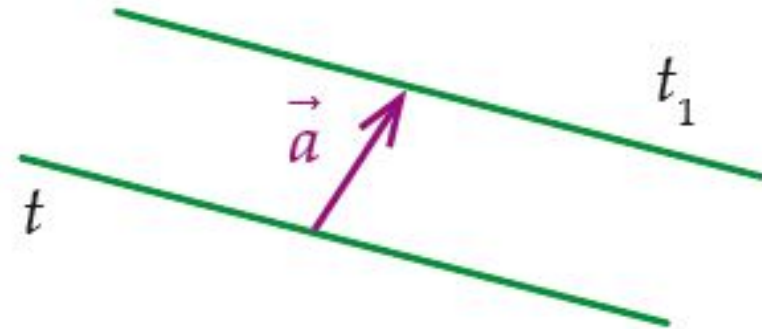
$$F = F_1$$

# Paralēlās pārnese 2. īpašība

2. Paralēlajā pārnēsē taisne attēlojas sevī vai par sev paralēlu taisni.



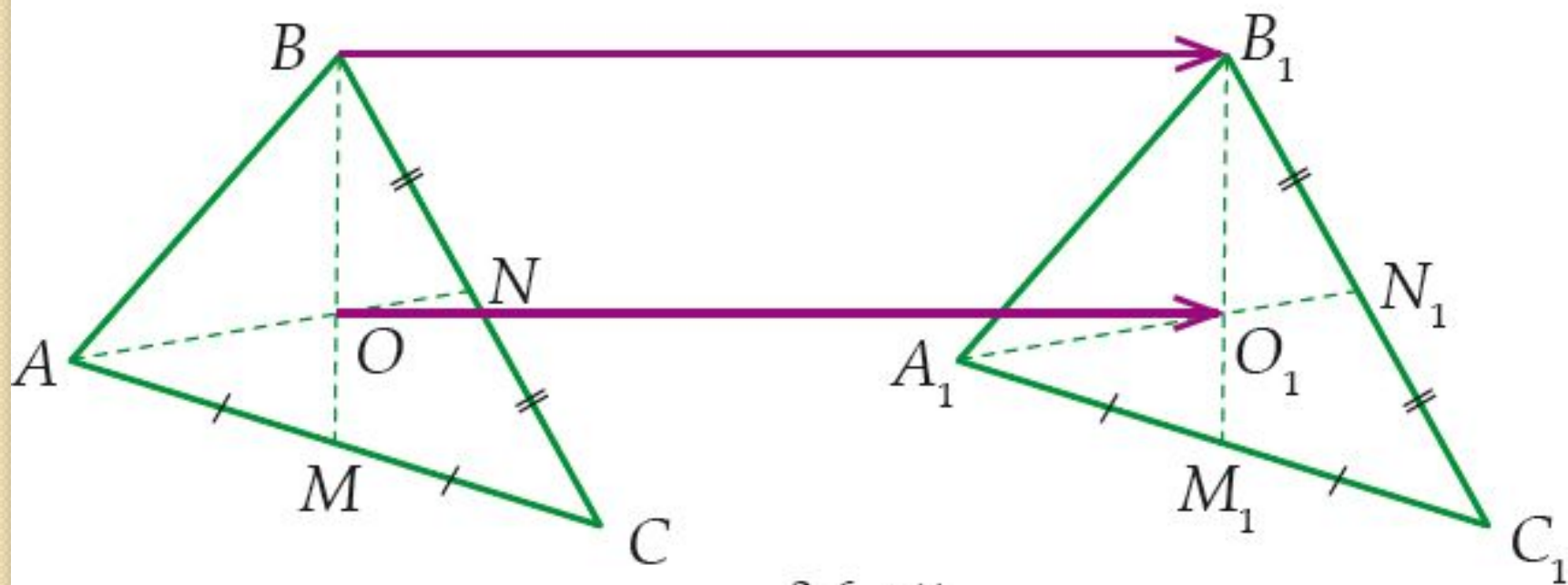
Ja paralēlās pārnese vektors  $\vec{a}$  atrodas uz taisnes  $t$  vai ir tai paralēls, tad taisne attēlojas sevī.



Katru plaknes punktu pārvietojot par vektoru  $\vec{a}$ , iegūst dotajai taisnei  $t$  paralēlu taisni  $t_1$ .

# Paralēlās pārnese 3. īpašība

3. Ja paralēlajā pārnēsē figūra  $F \rightarrow F_1$ , un punkts  $P \rightarrow P_1$ , kur  $P \in F$  un  $P_1 \in F_1$ , tad punktu  $P$  un  $P_1$  ģeometriskā jēga figūrās  $F$  un  $F_1$  ir vienāda.



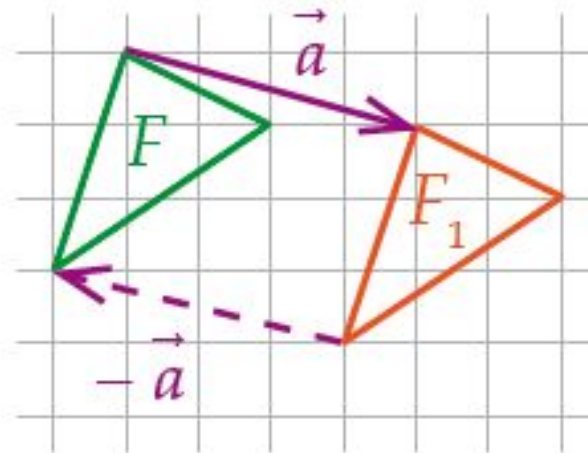
2.6. att.

Paralēlajā pārnēsē par vektoru  $\overrightarrow{BB_1}$   $\Delta ABC$  mediānu krustpunkts  $O$  attēlojas par  $\Delta A_1B_1C_1$  mediānu krustpunktu  $O_1$ .



# Paralēlās pārnese 4. īpašība

4. Ja paralēlajā pārnēsē par vektoru  $\vec{a}$  figūra  $F \rightarrow F_1$ , tad figūra  $F_1 \rightarrow F$ , paralēlajā pārnēsē par vektoru  $-\vec{a}$ .



2.7. att.

Tā kā paralēlā pārnese ir plaknē definēta funkcija, kas pašu plakni attēlo sevī, tad katram punktam  $\mathbf{P}_1$  eksistē tikai viens vienīgs punkts  $\mathbf{P}$ , kura attēls ir punkts  $\mathbf{P}_1$  (lai  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}_1$ ).



# ***Aksiālā simetrija***

# Aksiālās simetrijas jēdziens

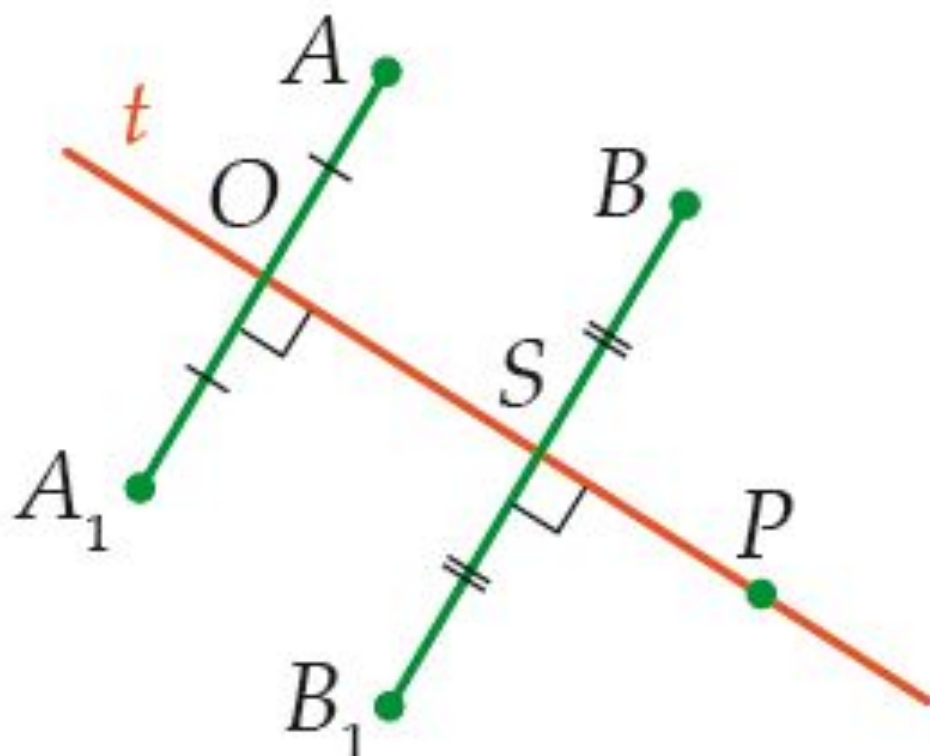
Aksiālā simetrija pret asi  $t$  ir pārveidojums, kurā

- katrs punkts  $P$ , kas atrodas uz taisnes  $t$ , attēlojas sevī,
- katrs punkts  $A$ , kas nepieder taisnei  $t$ , attēlojas par tādu punktu  $A_1$ , ka taisne  $t$  ir  $AA_1$  vidusperpendikuls.

Taisni  $t$  sauc par **aksiālās simetrijas asi**.

Lai aksiālā simetrija būtu definēta, jābūt uzdotai simetrijas asij  $t$ .

# Aksiālā simetrija (I. piemērs)

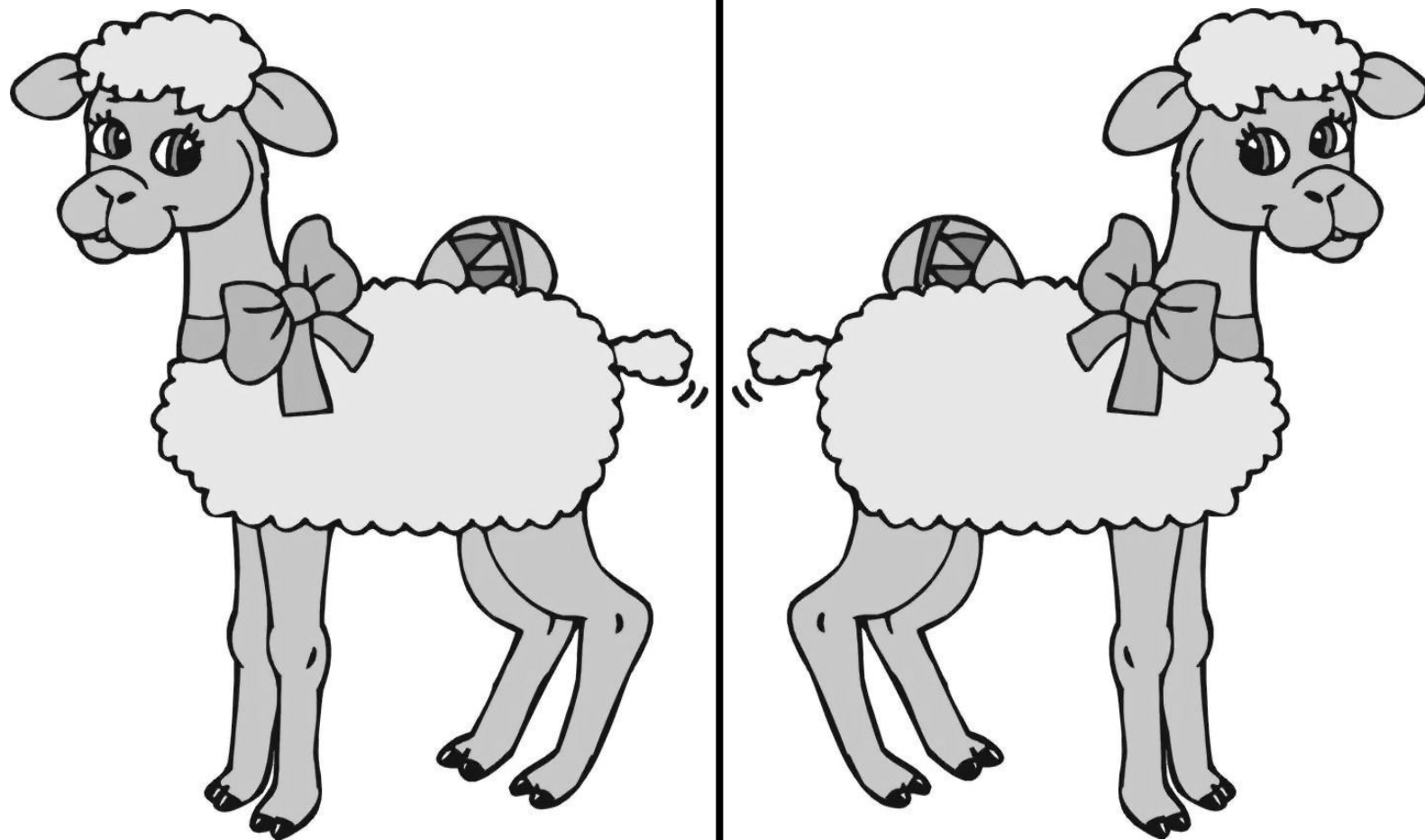


**Aksiālajā simetrijā pret asi  $t$ :**

- $A \rightarrow A_1$ , jo  $AA_1 \in t$  un  $AO = OA_1$ ,
- $B \rightarrow B_1$ , jo  $BB_1 \in t$  un  $BS = SB_1$ ,
- $P \rightarrow P$ , jo  $P \in t$ .



# Aksiālā simetrija (2. piemērs)



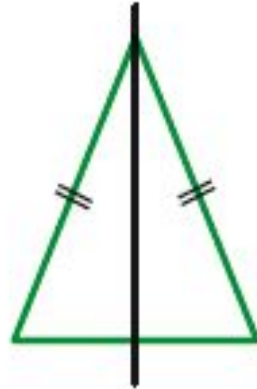
# Aksiālā simetrija (3. piemērs)



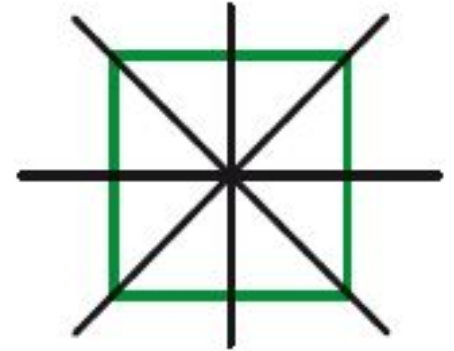
# Kur mēs sastopamies ar aksiālo simetriju?



**Riņķim**  
simetrijas  
asis iet  
caur riņķa  
centru.



**Vienādsānu  
trijstūrim**  
simetrijas ass  
satur pret  
pamatu  
novilkto  
augstumu.

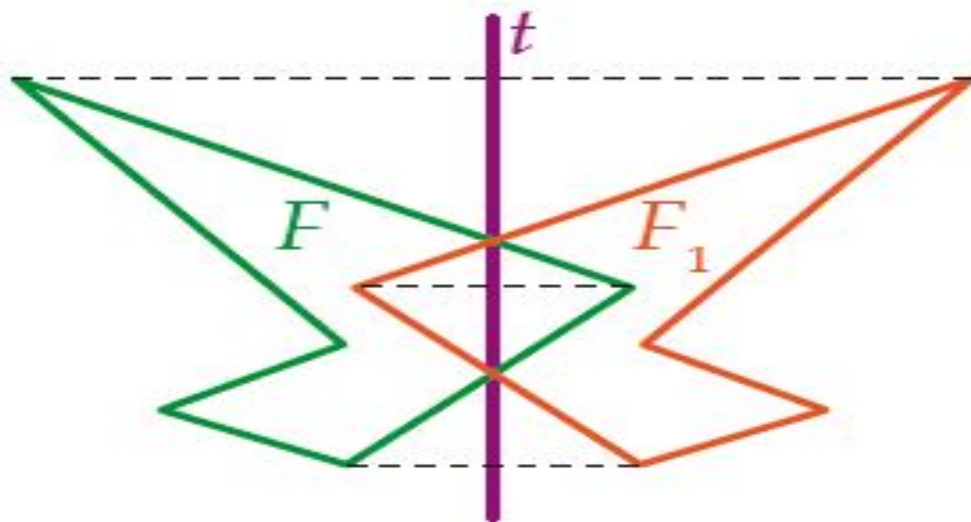


**Kvadrātam**  
simetrijas ass  
satur  
diagonāli vai iet  
caur kvadrāta  
malu  
viduspunktiem.



# Aksiālās simetrijas I. īpašība

1. Visiem figūras  $F$  punktiem pielietojot aksiālo simetriju attiecībā pret taisni  $t$ , iegūst figūrai  $F$  vienādu figūru  $F_1$ .



2.10. att.

$$F = F_1$$

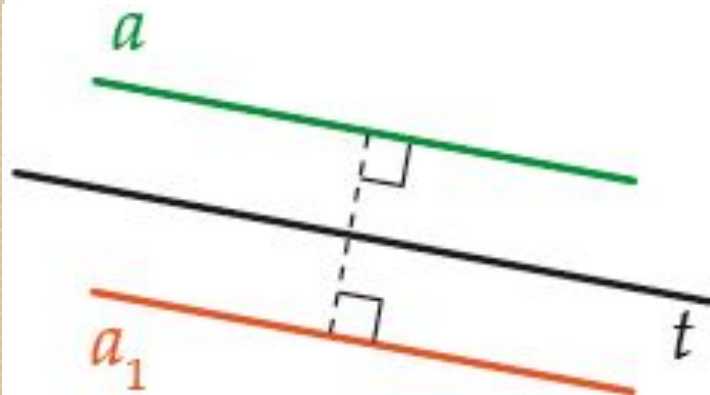
**Aksiālajā simetrijā** tiek iegūts figūras spoguļattēls, simetrijas asij  $t$  “izpildot spoguļa lomus” - figūras daļas abās simetrijas ass pusēs apmainās vietām, bet punkti uz simetrijas ass savu pozīciju saglabā.



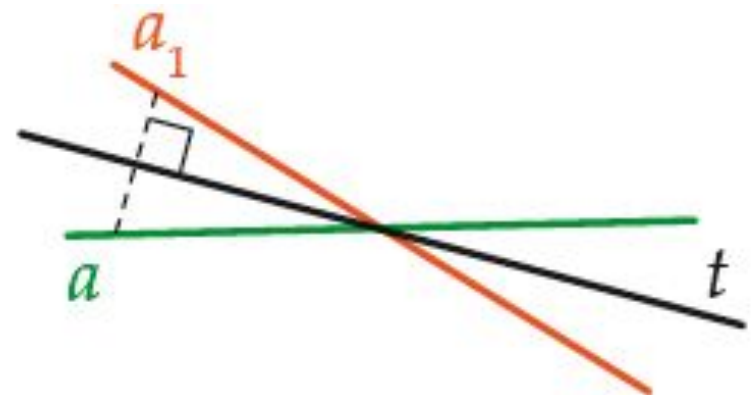
# Aksiālās simetrijas 2. īpašība

## 2. Aksiālajā simetrijā taisne $a$ attēlojas par taisni $a_1$ .

Ja taisne  $a$  ir paralēla simetrijas asij  $t$ , tad tā attēlojas par tai paralēlu taisni  $a_1$  ( $a \rightarrow a_1$ ,  $a \parallel a_1 \parallel t$ ). Ja taisne  $a$  krusto simetrijas asi  $t$ , tad arī tās attēls  $a_1$  krusto asi  $t$  un krustpunkts atrodas uz simetrijas ass.



Taisnes  $a$ ,  $a_1$  un  $t$  ir savstarpēji paralēlas, kā arī taisnes  $a$  un  $a_1$  atrodas vienādos attālumos no simetrijas ass  $t$ .



Ja taisne  $a$  nav paralēla taisnei  $t$ , tad arī taisne  $a_1$  nav paralēla taisnei  $t$ , bez tam  $t$  ir taisņu  $a$  un  $a_1$  veidoto leņķu bisektrise. Pamato šo faktu patstāvīgi.

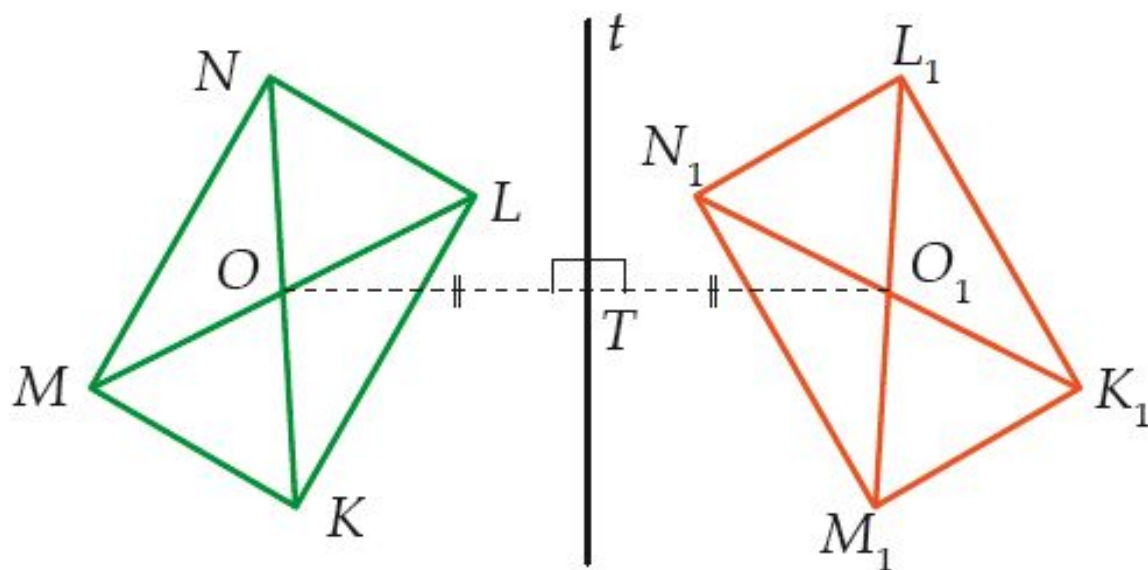
# Aksiālās simetrijas 3. īpašība

3. Ja aksiālajā simetrijā figūra  $F \rightarrow F_1$ , tad arī  $F_1 \rightarrow F$  pret to pašu simetrijas asi.

***Tā kā simetrijā pret asi pusplaknes attēlojas viena par otru, tad acīmredzami, ka, konstruējot figūras attēlu simetrijā pret šo pašu asi, iegūs sākotnējo figūru.***

# Aksiālās simetrijas 4. īpašība

4. Ja aksiālajā simetrijā figūra  $F \rightarrow F_1$  un punkts  $P \rightarrow P_1$ , kur  $P \in F$  un  $P_1 \in F_1$ , tad punktu  $P$  un  $P_1$  ģeometriskā jēga figurās  $F$  un  $F_1$  ir vienāda.



**Taisnstūra  $MNLK$  diagonāļu krustpunkts  $O$  simetrijā pret taisni  $t$  attēlojas par taisnstūra  $M_1N_1L_1K_1$  diagonāļu krustpunktu  $O_1$  (skat. 2.11. att.).**



***Pagrieziens***



# Pagrieziena jēdziens

Pagrieziens par  $\alpha$  grādu lielu leņķi ap centru  $O$  noteiktā virzienā ir pārveidojums, kurā katrs punkts  $P$  attēlojas par tādu punktu  $P_1$ , ka  $\sphericalangle POP_1 = \alpha$  un  $PO = PO_1$ , bet pagrieziena centrs  $O$  attēlojas sevī.

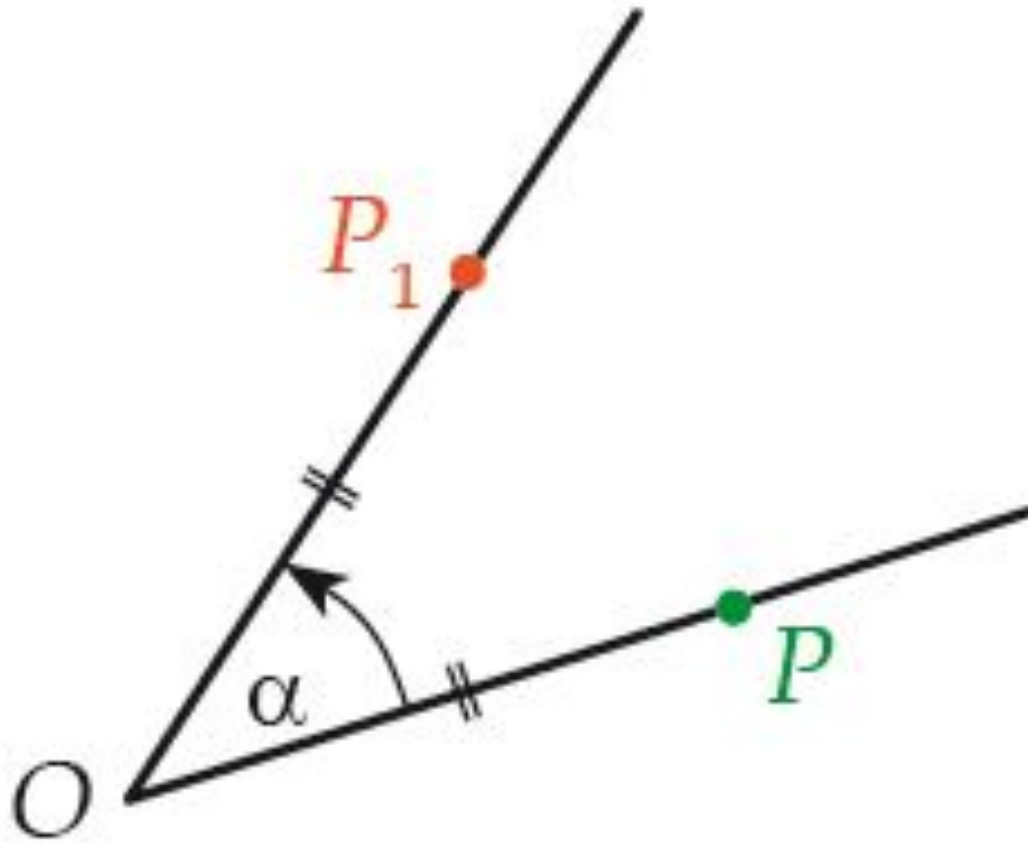
Lai pagrieziens būtu definēts, jābūt uzdotam

- 1) pagrieziena leņķim,
- 2) pagrieziena centram,
- 3) pagrieziena virzienam.

Īsāk pagriezienu ap centru  $O$  par leņķi  $\alpha$  var pierakstīt arī:

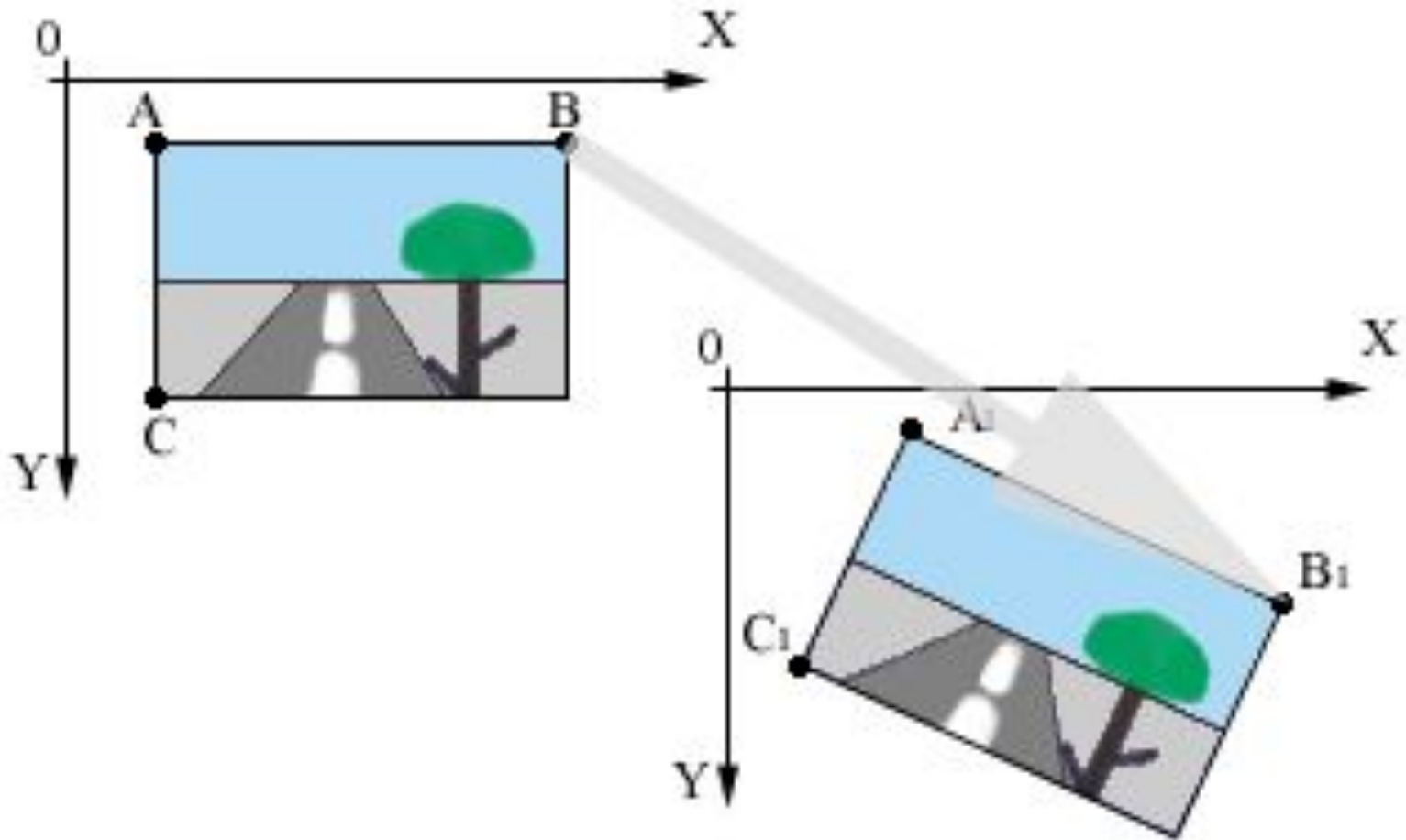
pagrieziens  $(O; \alpha)$ .

# Pagrieziens (I. piemērs)



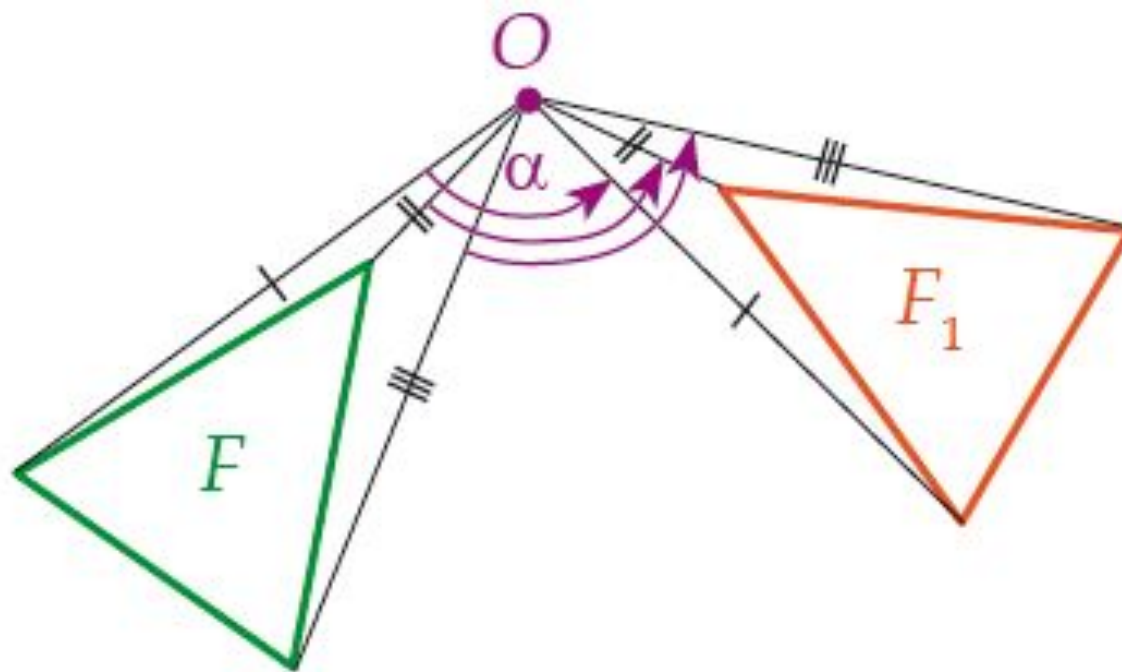
Pagriezienā ( $O; a$ ) punkta  $P$  attēls ir  $P_1$ , jo  $\angle POP_1 = a$  un  $PO = P_1O$ .

# Pagrieziens (2. piemērs)



# Pagrieziena I. īpašība

1. Visiem figūras  $F$  punktiem pielietojot pagriezienu  $(O; \alpha)$ , iegūst figūrai  $F$  vienādu figūru  $F_1$ .

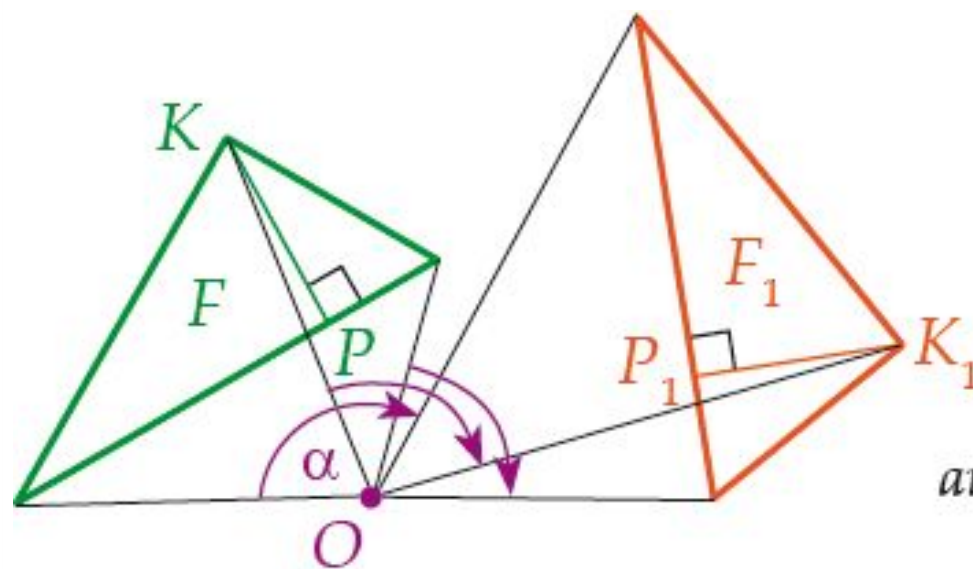


2.16. att.  
 $F = F_1$



# Pagrieziena 2. īpašība

2. Ja pagriezienā  $(O; \alpha)$  figūra  $F \rightarrow F_1$  un punkts  $P \rightarrow P_1$ , kur  $P \in F$  un  $P_1 \in F_1$ , tad punktu  $P$  un  $P_1$  ģeometriskā jēga figūrās  $F$  un  $F_1$  ir vienāda.



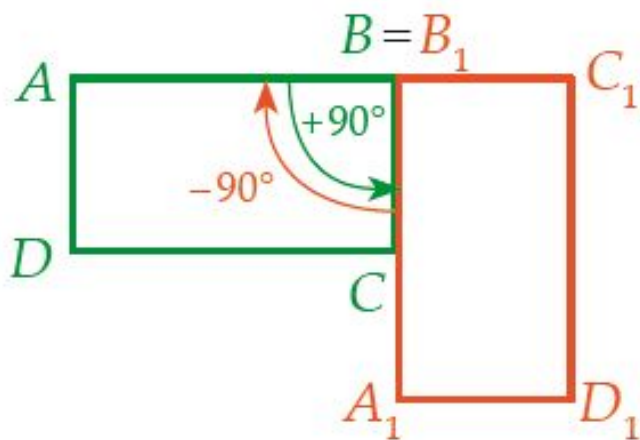
2.17. att.

Figūra  $F \rightarrow F_1$

augstums  $KP \rightarrow$  augstumu  $K_1P_1$

# Pagrieziena 3. īpašība

3. Ja pagriezienā  $(O; \alpha)$   $F \rightarrow F_1$ , tad  $F_1 \rightarrow F$  pagriezienā  $(O; -\alpha)$ .



2.18. att.

Apskatīsim taisnstūra  $ABCD$  pagriezienu par  $90^\circ$  leņķi ( $B; +90^\circ$ ) (skat. 2.18. att.). Pēc pagrieziena definīcijas  $B \rightarrow B_1$  ( $B_1 = B$ ). Tā kā pagrieziena leņķis sakrīt ar taisnstūra virsotnes leņķa lielumu, tad  $BA \rightarrow B_1A_1$ , kur  $B_1A_1$  pārklājas ar  $BC$ .

Tagad apskatīsim taisnstūra  $A_1B_1C_1D_1$  pagriezienu par  $-90^\circ$  leņķi ( $B_1; -90^\circ$ ). Skaidrs, ka šajā pagriezienā  $B_1 \rightarrow B$  un  $B_1A_1 \rightarrow BA$ .

# Pagrieziena 4. īpašība

4. Taisne  $t$  pagriezienā  $(O; \alpha)$  attēlojas par taisni  $t_1$ .

Ja taisne  $t$  pagriezienā  $(O; \alpha)$  attēlojas par taisni  $t_1$ , tad leņķis starp taisnēm  $t$  un  $t_1$  ir vienāds ar  $\alpha$ .

# Pagrieziens par $\pm 180^\circ$ un $\pm 360^\circ$

Ja pagrieziens leņķis ir  $360^\circ$  vai  $-360^\circ$ , tad figūra  $F$  attēlojas sevī ( $F \rightarrow F$ ), neatkarīgi no pagrieziens centra izvēles.

Ja pagrieziens leņķis ir  $180^\circ$  vai  $-180^\circ$ , tad figūra  $F$  attēlojas par tai centrāli simetrisku figūru.

Pagrieziens par  $\pm 180^\circ$  ir centrālā simetrija.





# ***Homotētika***

# Homotētijas jēdziens

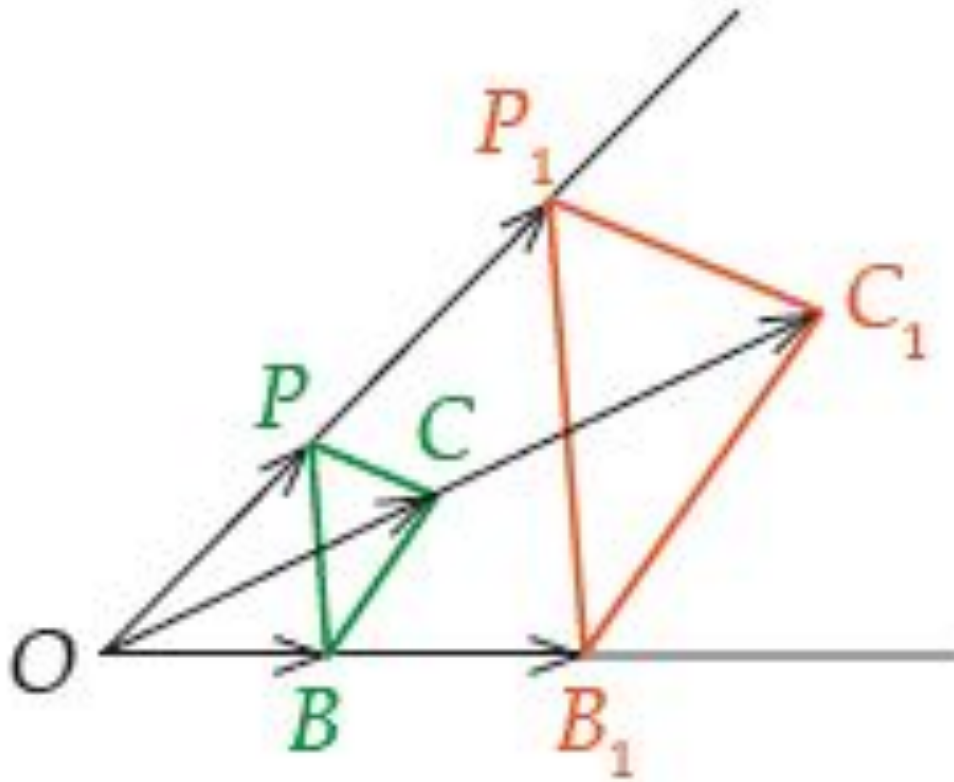
Homotētija ar centru  $O$  un koeficientu  $k$  ir pārveidojums, kurā katrs punkts  $P$  attēlojas par tādu punktu  $P_1$ , ka  $\overrightarrow{OP_1} = k \cdot \overrightarrow{OP}$ , kur  $k \neq 0$ .

Lai homotētija būtu definēta, jābūt uzdotam homotētijas koeficientam  $k$  un homotētijas centram  $O$ .

Homotētiju var pierakstīt arī:

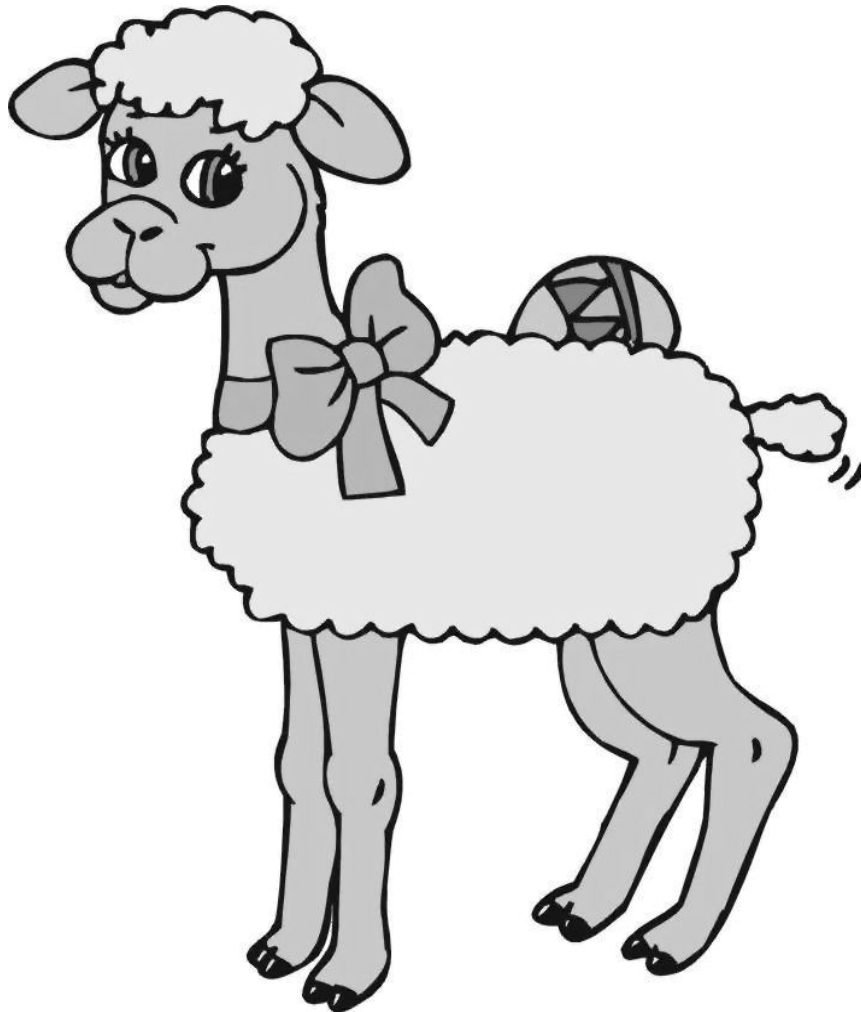
homotētija  $(O; k)$ .

# Homotētija (I. piemērs)



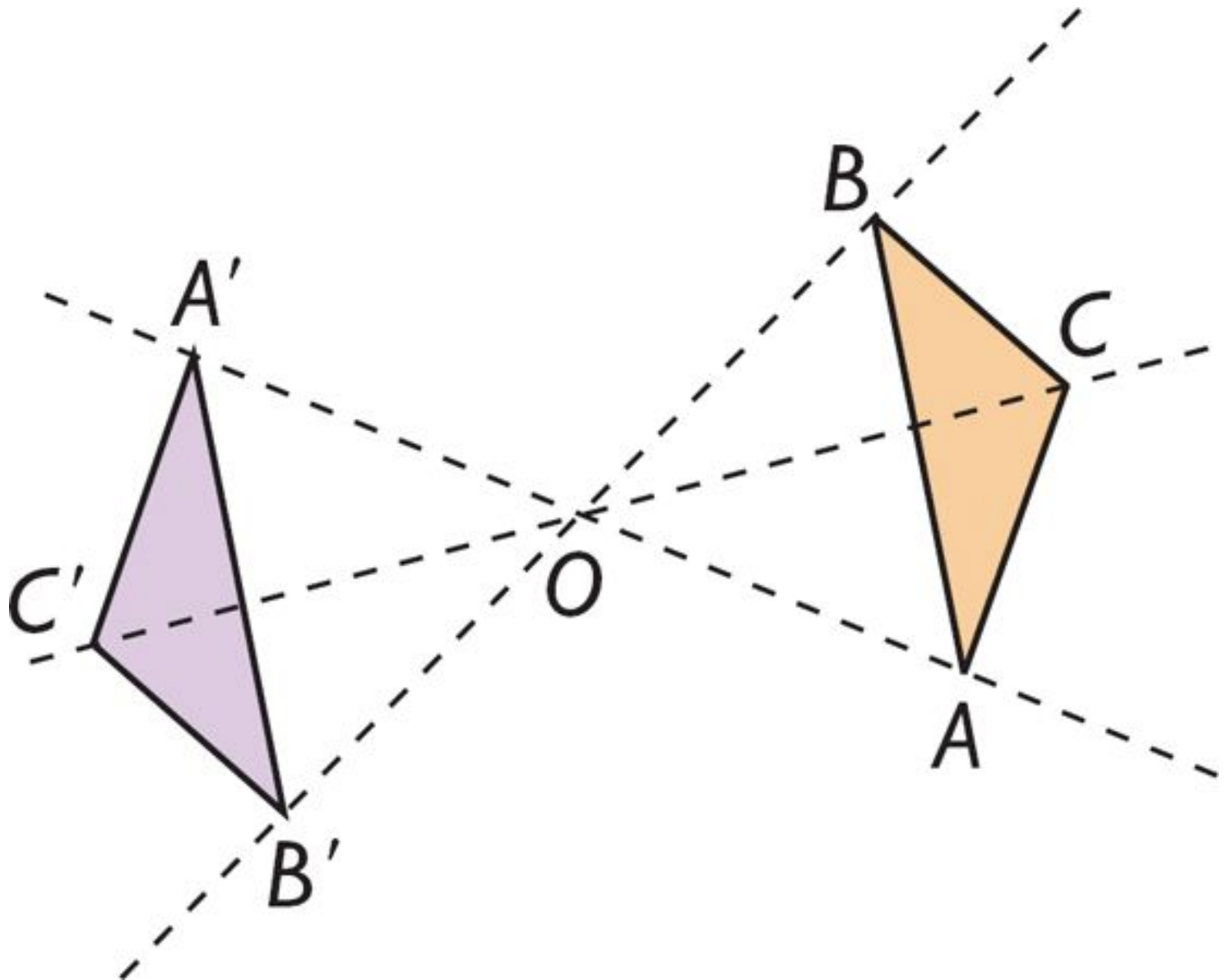
Homotētijā ( $O; k$ )  
punkta  $P$  attēls ir  $P_1$ , jo  
 $\overrightarrow{OP} = k \cdot \overrightarrow{OP}_1$ .  
Attiecīgi  
 $B \rightarrow B_1$ , jo  $\overrightarrow{OB}_1 = k \cdot \overrightarrow{OB}$   
un  
 $C \rightarrow C_1$ , jo  $\overrightarrow{OC}_1 = k \cdot \overrightarrow{OC}$

# Homotētija (2. piemērs)





# Homotētija (3. piemērs)



# No ka ir atkarīga homotētija?

**Homotētijā**, atkarībā no koeficienta  **$k$  vērtības**, veicot attēla konstrukciju, svarīgi ņemt vērā, ka iespējami dažādi punkta  **$P$**  attēla  **$P_1$** , novietojumi.

Lai konstruētu punkta  $P$  attēlu  $P_1$  homotētijā  $(O; k)$ , rīkojas šādi:

- ja punkts  $P$  sakrīt ar homotētijas centru  $O$ , tad punkts  $P$  attēlojas sevī;
- ja punkts  $P$  nesakrīt ar homotētijas centru  $O$  (skat. 2.25. — 2.26. att.), tad konstruē staru  $OP$  un,

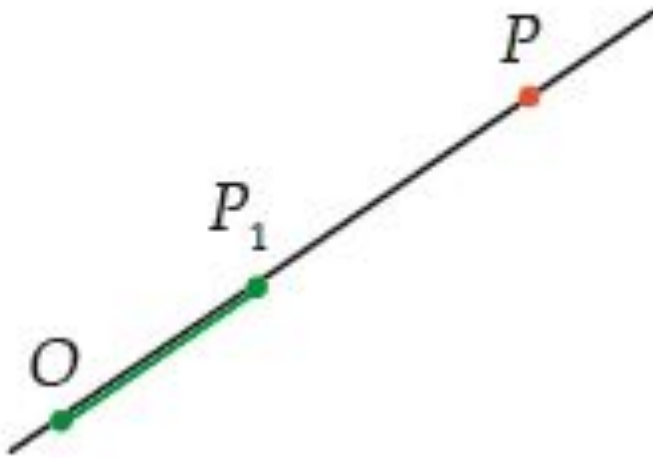
ja  $k > 0$ , tad

uz stara  $OP$  atliek  
nogriezni  $OP_1 = k \cdot OP$

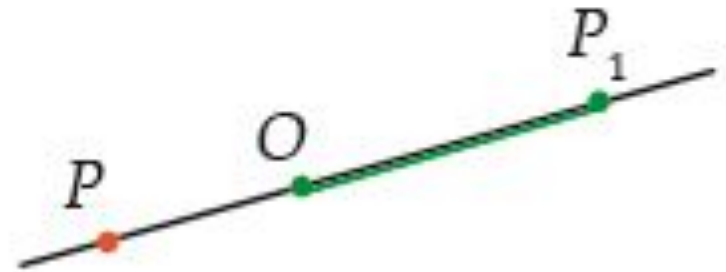
ja  $k < 0$ , tad

uz staram  $OP$  pretēja  
stara atliek  $OP_1 = |k| \cdot OP$

# Attēlojums atkarībā no $k$ vērtības



$OP_1 = k \cdot OP$ , ja  $k > 0$  (pie tam šinī situācijā  $k < 1$ , (paskaidro, kāpēc tas tā ir)).



$OP_1 = k \cdot OP$ , ja  $k < 0$  (pie tam šinī situācijā  $|k| > 1$ , (paskaidro, kāpēc tas tā ir)).

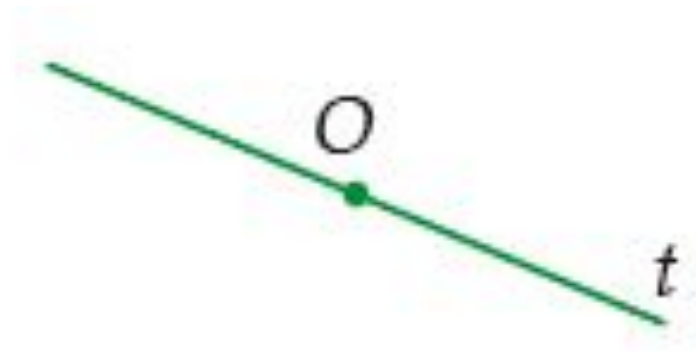
# Homotētijas I. īpašība

1. Visiem figūras  $F$  punktiem pielietojot homotētiju  $(O; k)$ , iegūst figūrai  $F$  līdzīgu figūru  $F_1$ . Proti,  $F \sim F_1$  ar līdzības koeficientu  $|k|$ .

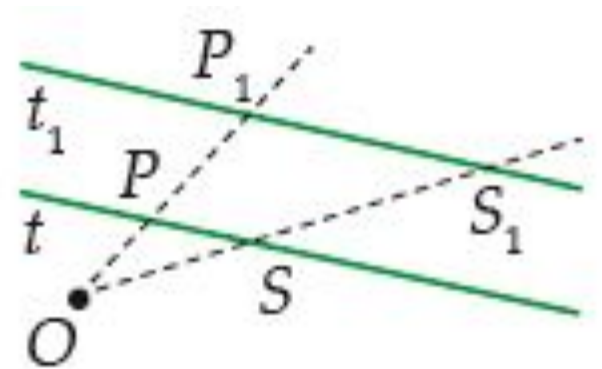


# Homotētijas 2. īpašība

2. Homotētijā taisne attēlojas sevī vai par sev paralēlu taisni.



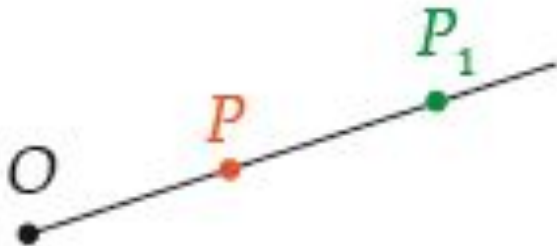
Ja **homotētijas centrs** atrodas uz taisnes  $t$ , tad taisnes **stars attēlojas par tam pretēju staru**, un taisne attēlojas sevī.



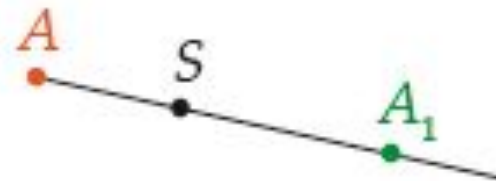
Tā kā trijstūri  $\triangle OPS$  ir līdzīgi  $\triangle OP_1S_1$ , tad  $t \parallel t_1$ .

# Homotētijas 3. īpašība

3. Ja homotētijā  $(O; k)$  punkts  $P \rightarrow P_1$ , tad homotētijā  $(O; \frac{1}{k})$  punkts  $P_1 \rightarrow P$ .



2.24. att.



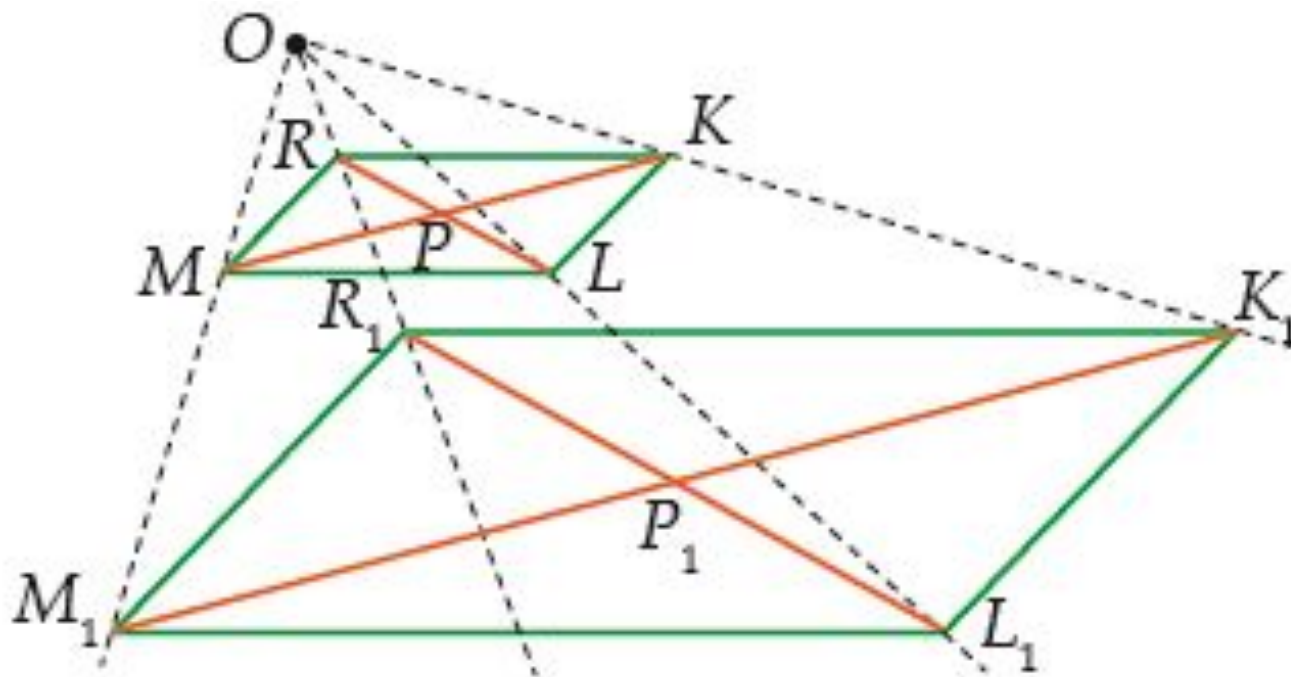
2.25. att.

Acīmredzot, ja homotētijā  $(O; k)$ , kur  $k > 0$ , punkts  $P \rightarrow P_1$ , tad  $\overrightarrow{OP_1} = k \cdot \overrightarrow{OP}$ , no kurienes  $\overrightarrow{OP} = 1/k \cdot \overrightarrow{OP_1}$  un tāpēc  $P_1 \rightarrow P$  homotētijā  $(O; 1/k)$  (skat. 2.24. att.).

Ja homotētijā  $(S; k)$ , kur  $k < 0$ , punkts  $A \rightarrow A_1$ , tad  $\overrightarrow{SA_1} = |k| \cdot \overrightarrow{SA}$ , no kurienes  $\overrightarrow{SA} = 1/|k| \cdot \overrightarrow{SA_1}$  un tāpēc  $A_1 \rightarrow A$  homotētijā  $(O; 1/k)$  (skat. 2.25. att.).

# Homotētijas 4. īpašība

4. Ja homotētijā  $(O; k)$  figūra  $F \rightarrow F_1$  un punkts  $P \rightarrow P_1$ , kur  $P \in F$  un  $P_1 \in F_1$ , tad punktu  $P$  un  $P_1$  ģeometriskā jēga figūrās  $F$  un  $F_1$  ir vienāda.



2.26. att.

***PALDIES PAR UZMANĪBU!***