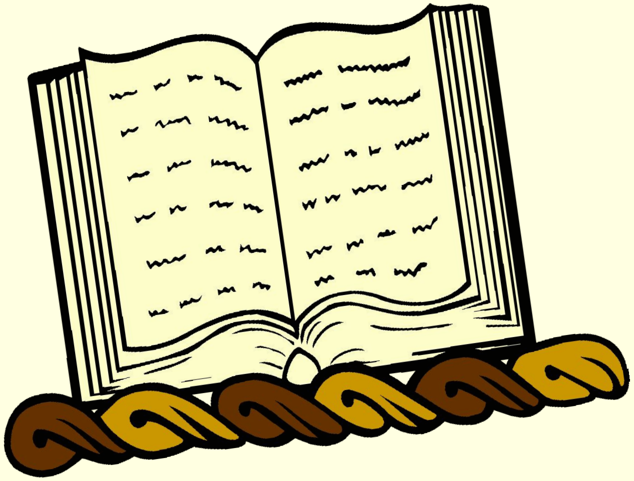
Общие методы решения уравнений



Цели урока:

- Рассмотреть общие методы решения уравнений.
- Научиться применять эти методы при решении уравнений.
- Формировать навыки применение наиболее рациональных способов решения уравнений.

Рассмотрим уравнения:

1) $x^2 - 2x = 0;$

2) $\sin^2 x + \sin x = 0;$

3) $7^{x^2+5x} = 49;$

4) $\log^2{}_2 x - 4\log_2 x + 3 = 0;$

5) $\sqrt{x} = \dfrac{1}{x}$

Общие методы решения уравнений:

- **Замена уравнения $h(f(x))=h(g(x))$ Уравнением $f(x)=g(x)$**
- **Метод разложения на множители**
- **Метод введения Новой переменной**
- **Фукционально-Графический метод**
- **Нетрадиционные методы**

Замена уравнения более простым уравнением

<u>Суть метода:</u> от уравнения вида

$$h(f(x))=h(g(x))$$

осуществить переход к уравнению вида

$$f(x)=g(x)$$

Метод применяется:

- При решении показательных уравнений:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad a \neq 1; a > 0$$

$$f(x)=g(x)$$

- При решении логарифмических уравнений:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \qquad a \neq 1; a > 0 \qquad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$f(x)=g(x)$$

- При решении иррациональных уравнений:

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\dot{g}(x)} \qquad f(x)=g(x)$$

Метод применяется:

Метод нельзя использовать:

<u>если функция монотонная</u>

$$f(x)^{2k+1} = g(x)^{2k+1}$$

$$f(x)=g(x)$$

Например:

$$(2x+3)^3=(5x-9)^3$$

$$2x+3=5x-9$$

$$x=4$$

Ответ: 4

- <u>если функция периодическая</u>

Например,

$$\sin(3x-1) = \sin(3x+4)$$

- <u>если функция четная</u>

Например,

$$(2x+7)^2 = (5x-12)^2$$

Пример 1:

Решить уравнение

$$5^{2x^2-3x+1}-5=0$$

$$5^{2x^2-3x+1}=5;$$

$$2x^2-3x+1=1;$$

$$2x^2-3x=0;$$

$$x=0; x=1{,}5.$$

Ответ: 0; 1,5.

Пример 2:

$$\log_3\left(x^2-3x-5\right)=\log_3\left(7-2x\right);$$

$$x^2-3x-5=7-2x;$$

$$x^2-x-12=0;$$

$$x_1=4, x_2=-3.$$

Проверка :

$$\begin{cases} x^2-3x-5 > 0, \\ 7-2x > 0. \end{cases}$$

$x=4$ – *посторонний корень*

Ответ : $-3.$

2. Метод разложения на множители.

Уравнение $f(x)g(x)h(x) = 0$ можно заменить совокупностью уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=0; \\ g(x)=0; \\ h(x)=0. \end{array}\right.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат ОДЗ исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.

Пример 3:

Решить уравнение

$$\left(\sqrt{x+2}-3\right)\left(2^{x^2+6x+5}-1\right)\ln(x-8)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}-3=0;\\ 2^{x^2+6x+5}=1;\\ \ln(x-8)=0.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x+2=9;\\ x^2+6x+5=0;\\ x-8=1.\end{array}\right.$$

Пример 3:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 7; \\ x_2 = -1; x_3 = -5; \\ x_4 = 9. \end{array}\right.$$

Проверка : ОДЗ :

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ x - 8 \geq 0. \end{cases}$$

Из найденных корней этой системе неравенств удовлетворяет только $x = 9$, остальные являются посторонними для данного уравнения.

Ответ: 9.

3. Метод введения новой переменной.

Если уравнение $f(x) = 0$ удалось преобразовать к виду $p(g(x)) = 0$, то нужно ввести новую переменную $u = g(x)$, решить уравнение $p(u) = 0$, а затем решить совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} g(x) = u_1; \\ g(x) = u_2; \\ \ldots. \\ g(x) = u_n \end{array}\right.$$

где $u_1, u_2, \ldots u_n$ - корни уравнения $p(u) = 0$.

Пример 4:

Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2+3x-3}+\frac{2}{x^2+3x+1}=\frac{7}{5}.$$

Введём новую переменную $y=x^2+3x$.

Получим:

$$\frac{1}{y-3}+\frac{2}{y+1}=\frac{7}{5}.$$

Освободившись от знаменателей, получим:

$$7y^2-29y+4=0;$$

Пример 4:

Найдём корни квадратного уравнения:

$$y_1 = 4; y_2 = \frac{1}{7}.$$

Выполним проверку корней на выполнение условия:

$$5(y-3)(y+1) \neq 0.$$

Оба корня удовлетворяют данному условию.

Пример 4:

Вернёмся к замене переменной и решим два уравнения:

$$x^2 + 3x = 4 \quad \text{и} \quad x^2 + 3x = \frac{1}{7}.$$

$$x_{1/2} = 1; -4.$$

$$x_{3/4} = \frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}.$$

Ответ: $1; -4; \ \frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}.$

3. Функционально-графический метод.

Чтобы графически решить уравнение $f(x) = g(x)$ нужно построить графики функций

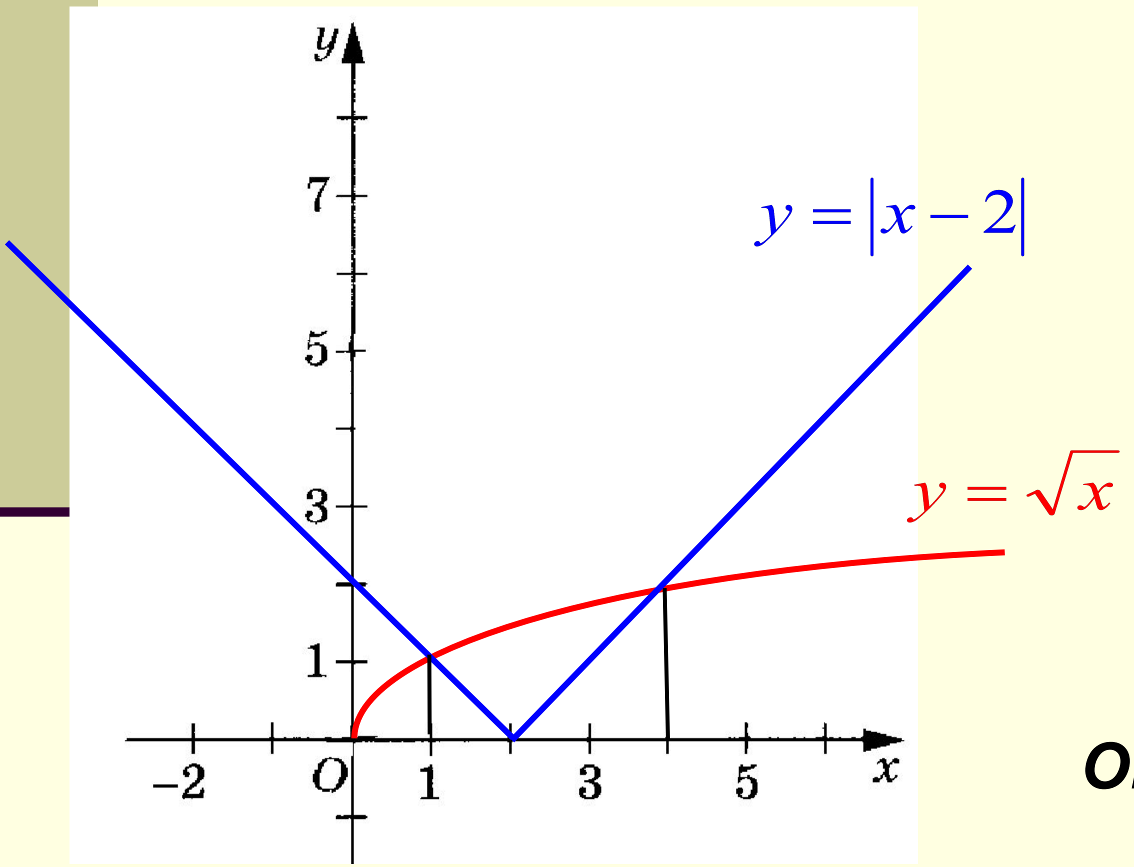
$y = f(x)$ и $y = g(x)$ и найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек.

Пример 5:

1) Решить уравнение $\sqrt{x}$ = | x – 2 |

1 шаг: построить графики функций у = $\sqrt{x}$ и у = | х – 2 |

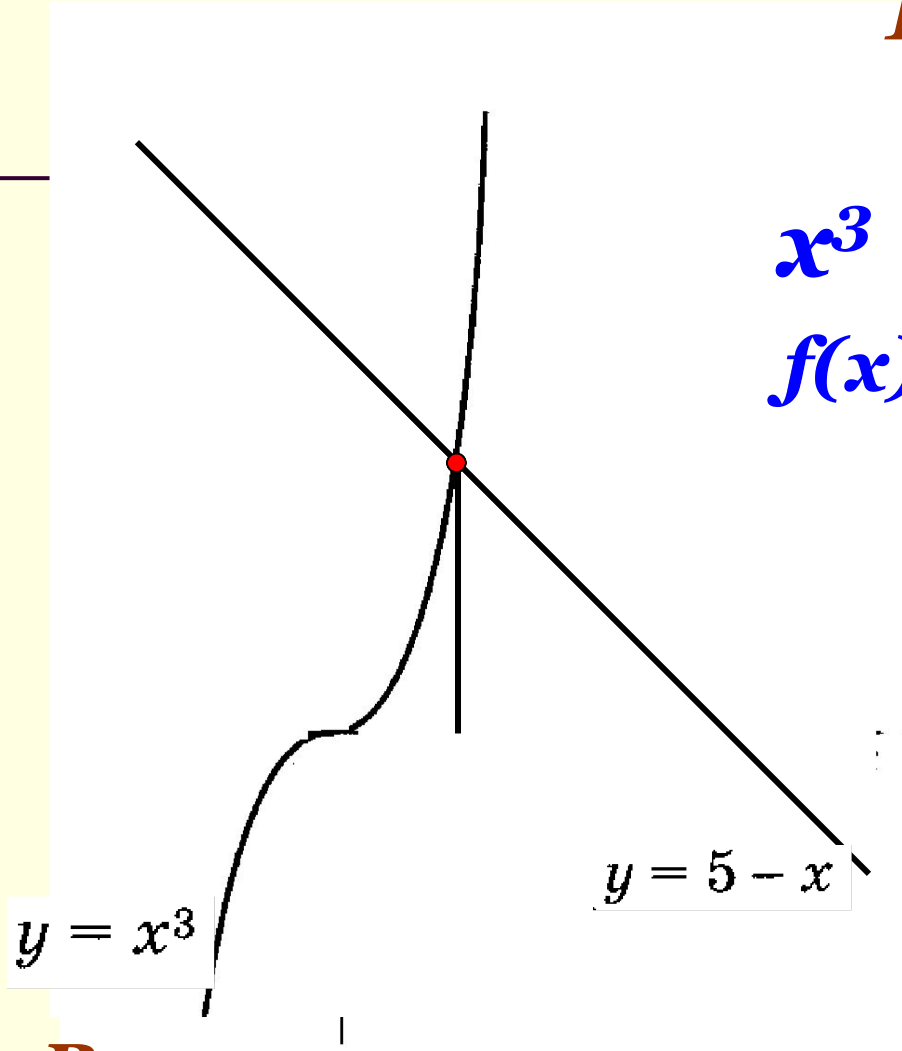
2 шаг: найти абсциссы точек (или точки) пересечения графиков



Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$

2. $x^3 - 5 + x = 0$

Пример 6:



$x^3 = 5 - x$

$f(x) = x^3$ $g(x) = 5 - x$

$x \approx 1{,}5$

Решением является абсцисса точки пересечения графиков левой и правой частей уравнения

Пример 7:

Решить уравнение

$$\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2.$$

Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x + 2$. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

В вершине параболы функция достигает своего наименьшего значения.

Пример 7:

Найдём координаты вершины параболы.

$$x_0 = -\frac{b}{2a};\ y_0 = y(x_0);\qquad (1;1)$$

Для функции y = x² - 2x + 2 $y_{наим.} = 1.$

Функция y = cos 2πx обладает свойством: $y_{наиб.} = 1.$

Пример 7:

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 = 1, \\ \cos 2\pi x = 1. \end{cases}$$

Решив 1 уравнение получили: $x = 1$. Это значение удовлетворяет и 2 уравнению системы, следовательно, является единственным корнем заданного уравнения. **Ответ: 1.**

13. а) Решите уравнение $7^{x^2-2x}+7^{x^2-2x-1}=56$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;1]$.

- **1. Задание 13 №** 501689

  а) Решите уравнение $$15^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}.$$

  б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $$\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right].$$

13

а) Решите уравнение $\left(3\operatorname{tg}^2 x-1\right)\sqrt{-5\cos x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

Решение.

а) Имеем $\left(3\operatorname{tg}^2 x-1\right)\sqrt{-5\cos x}=0$; $\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{3},\\ \cos x<0,\end{cases}$

откуда $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ или $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; б) $-\frac{19\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{6}$.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2}\sin x + 1 = 0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos 2x + \sqrt{2}\sin x + 1 = 0;$$

$$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x + 1 = 0;$$

$$2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - 2 = 0; \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ или } \sin x = \sqrt{2}.$$

Уравнение $\sin x = \sqrt{2}$ не имеет решений. Из уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ находим:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \text{ и } x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4},\ -\frac{9\pi}{4}$.

13. а) Решите уравнение $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{18}{(x-2)^2}=7\left(\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}\right)+10$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2;\ 2]$.

Решение.

а) Сделаем замену $t=\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}$. Тогда $t^2=\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{9}{(x-2)^2}-3$.

Получаем уравнение

$$2\left(t^2+3\right)=7t+10;\ 2t^2-7t-4=0,$$

откуда $t=-\frac{1}{2}$ или $t=4$.

Если $t=-\frac{1}{2}$, то получаем

$$\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}=-\frac{1}{2};\ (x-2)^2-6=-(x-2);\ x^2-3x-4=0,$$

откуда $x=-1$ или $x=4$.

Если $t=4$, то $\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}=4$.

Аналогично получаем:

$$(x-2)^2-6=8(x-2);\ x^2-12x+14=0,$$

откуда $x=6-\sqrt{22}$ или $x=6+\sqrt{22}$.

б) $0<6-\sqrt{22}<6-4=2$, а $6+\sqrt{22}>6+4=10>2$. Среди корней уравнения отрезку $[-2;\ 2]$ принадлежат только числа -1 и $6-\sqrt{22}$.

Ответ: **а)** $-1;\ 4;\ 6\pm\sqrt{22}$; **б)** $-1;\ 6-\sqrt{22}$.

13. а) Решите уравнение $\cos x+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin x+1)}=0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right]$.

Решение.

а) Перейдем к системе

$$\begin{cases}\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin x+1)=\cos^2 x;\\ \cos x\le 0,\end{cases}$$

Решим уравнение:

$$\left(2-\sqrt{2}\right)(\sin x+1)=2\cos^2 x;\quad \left(2-\sqrt{2}\right)\sin x+2-\sqrt{2}=2-2\sin^2 x;$$

$$2\sin^2 x+\left(2-2\sqrt{2}\right)\sin x-\sqrt{2}=0;\quad \sin x=-1 \text{ или } \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\quad x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \text{ или } x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$\frac{3\pi}{4}$,

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; **б)** $-\frac{21\pi}{4};\ -\frac{9\pi}{2}$.

13

а) Решите уравнение $\dfrac{5\cos x+3}{5\sin x-4}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0;2\pi]$.

Решение.

а) Имеем

$$\frac{5\cos x+3}{5\sin x-4}=0;\quad \begin{cases}\cos x=-\dfrac{3}{5},\\ \sin x\neq\dfrac{4}{5},\end{cases}$$

откуда $x=-\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ или $x=\pi+\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: а) $\pi+\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\pi+\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

а) Решите уравнение $\frac{2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x}{\log_4(\sin x)}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3}{2}\pi\right]$.

Решение.

Перейдём к системе $\begin{cases} 2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0; \\ \sin x\neq 1; \\ \sin x>0. \end{cases}$

Решаем уравнение системы $2\cos x\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$.

Получаем $\left[\begin{array}{l} \cos x=0; \\ \cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}=0. \end{array}\right.$

С учётом всех ограничений $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

а) Решите уравнение $8\cdot 16^{\sin^2 x}-2\cdot 4^{\cos 2x}=63$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

Решение.

Имеем $8\cdot 16^{\sin^2 x}-2\cdot 4^{\cos 2x}=63$; $8\cdot 4^{2\sin^2 x}-2\cdot 4^{1-2\sin^2 x}=63$.

Обозначим $a=4^{2\sin^2 x}$, $a>0$ при любом значении x. Тогда имеем

$8a-\frac{8}{a}=63$, $8a^2-63a-8=0$, $a_1=-\frac{1}{8}$ и $a_2=8$. Так как $a>0$, a_1 не подходит. Получаем $4^{2\sin^2 x}=8$; $2\sin^2 x=\frac{3}{2}$; $\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+\pi n$; $\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{11\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{3}$, $\frac{14\pi}{3}$.

а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Решение.

а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases}\log_2(\sin x)\left(\log_2(\sin x)+1\right)=0,\\ 2\cos x-\sqrt{3}\neq 0.\end{cases}$$

Пусть $y=\log_2(\sin x)$.

Получаем $y(y+1)=0$, откуда $y=0$ или $y=-1$.

После обратной замены получаем $\log_2(\sin x)=0$ или $\log_2(\sin x)=-1$, то есть

$\sin x=1$ или $\sin x=\dfrac{1}{2}$ при условии $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Если $\sin x=\dfrac{1}{2}$, то

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \text{ или } x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ k,n\in\mathbb{Z}.$$

Числа $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, не удовлетворяют

условию $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Если $\sin x=1$, то $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

Ответ: а) $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ n,m\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{5\pi}{6}$.

а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} + 2 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3}{\cos x} + 2 = 0.$$

Сделаем замену $y = \frac{1}{\cos x}$. Получим

$$y^2 + 3y + 2 = 0;$$

$$y = -1 \text{ или } y = -2$$

Значит, $\cos x = -\frac{1}{2}$ или $\cos x = -1$.

Если $\cos x = -\frac{1}{2}$, то

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Если $\cos x = -1$, то

$$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: а) $\pi + 2\pi n;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi m;\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k, n, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{3};\ 3\pi$.