Методы решения квадратных уравнений

Уравнение – это золотой ключ, открывающий все математические сезамы.

С.Коваль

План урока

1. Теоретическая разминка.
2. Тест.
3. Практикум.
4. Историческая справка.
5. Презентация специальных методов решения квадратных уравнений.
6. Общие методы решения квадратных уравнений
6. Домашнее задание.

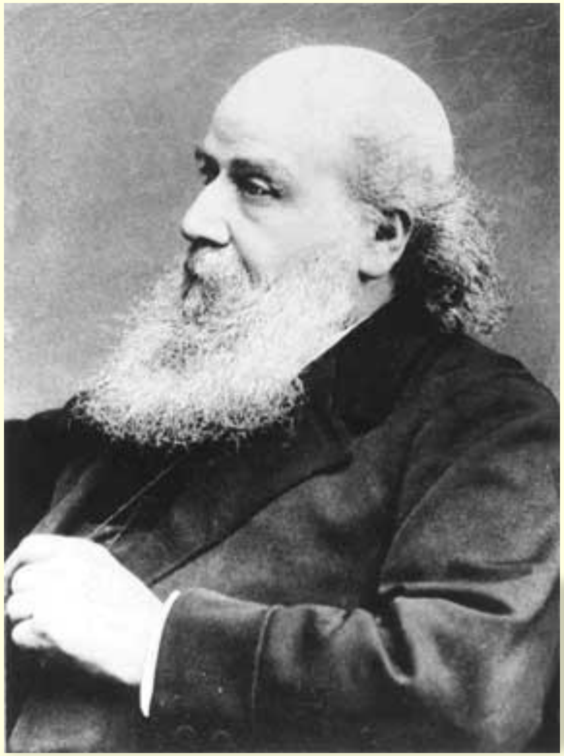
Термин «квадратное уравнение» впервые ввёл Кристиан Вольф

Кристиан Вольф - знаменитый немецкий философ.

Родился в 1679 г. в Бреславле, в семье простого ремесленника.

Изучал в Йене сначала богословие, потом математику и философию.

Сильвестр Джеймс Джозеф



Английский математик, который ввёл термин «дискриминант».

Михаэль Штифель

В 13 – 16 веках даются отдельные методы решения различных видов квадратных уравнений.

Слияние этих методов произвел в 1544 году немецкий математик Михаэль Штифель.

ВОПРОСЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ РАЗМИНКИ

1. Уравнение какого вида называют квадратным?
2. Как по названиям различают коэффициенты а, в и с?
3. Объясните, в чём заключается смысл ограничения в определении квадратного уравнения ($a \neq 0$).
4. Перечислите виды квадратных уравнений.
5. Какое квадратное уравнение называется приведённым,а какое неприведённым? Приведите примеры.
6. Какое квадратное уравнение называется полным, а какое неполным? Приведите примеры.
7. Что называют корнем квадратного уравнения?
8. Что значит решить квадратное уравнение?
9. Сколько корней имеет квадратное уравнение?
10. Способы решения неполных квадратных уравнений.
11. Что называют дискриминантом квадратного уравнения?
12. Как с помощью дискриминанта различают квадратные уравнения по числу корней?
13. Правило решения полного квадратного уравнения.

Неполные квадратные уравнения

$ax^2 = 0$	$x = 0$
$ax^2 + bx = 0,$ $(b \neq 0)$	$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{b}{a} \end{array}\right.$
$ax^2 + c = 0,$ $(c \neq 0)$	Если $-\frac{c}{a} < 0$, то *корней нет* Если $-\frac{c}{a} > 0$, то $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

РЕШЕНИЕ НЕПОЛНЫХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

в=0	с=0	в,с=0
$ax^2+c=0$	$ax^2+вx=0$	$ax^2=0$
подробнее	**подробнее**	**подробнее**

Алгоритм решения

$ax^2+c=0$

в=0

1.Переносим c в правую часть уравнения.

$$ax^2 = -c.$$

2. Делим обе части уравнения на а ≠ 0.

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

3.Если $-\frac{c}{a} > 0$ - два решения:

$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Если $-\frac{c}{a} < 0$ - нет решений.

Алгоритм решения

$ax^2+вx=0$

$c=0$

1. **Выносим *x* за скобки:**

   x (ax + в) = 0.

2. **«Разбиваем» уравнение на два:**

   x = 0 или ax + в = 0.

3. **Два решения:**

   $x = 0$ и $x = \frac{-b}{a}$ $(a\neq 0)$.

Алгоритм решения

$ax^2=0$

в,с=0

1. ***Делим обе части уравнения на** $a \neq 0$.*

$$x^2 = 0$$

2. ***Одно решение:** $x = 0$.*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

D < 0	D = 0	D > 0
Корней нет	$x = -\frac{b}{2a}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

b = 2k (четное число)

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$(D_1 \geq 0)$$

Специальные методы

1. <u>Метод выделения квадрата двучлена</u>
2. Метод «переброски» старшего коэффициента
3. На основании теорем

Метод выделения квадрата двучлена

Цель: привести квадратное уравнение общего вида к неполному квадратному уравнению.

Пример:

$$X^2 - 6x+5=0$$

Метод выделения квадрата двучлена

Решим уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$.

$x^2 - 6x + 5 = 0,$
$(x^2 - 2\cdot 3x + 9) + 5 - 9 = 0,$
$(x - 3)^2 - 4 = 0.$
$(x - 3)^2 = 4.$
$x - 3 = 2;\ x - 3 = -2.$
$x = 5,\ x = 1.$

Ответ: 5; 1.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Метод «переброски» старшего коэффициента

Корни квадратных уравнений

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{и} \quad y^2+by+ac=0$$

связаны соотношениями

$$x_1=\frac{y_1}{a} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{y_2}{a}$$

В некоторых случаях бывает удобно решать сначала не данное квадратное уравнение, а приведенное, полученное «переброской» коэффициента *a* .

Пример: $2x^2-9x-5=0$

Метод “переброски” старшего коэффициента

Решите уравнение $2x^2 - 9x – 5 = 0$.

$y^2 - 9y - 10 = 0$.

D=81+40=121, получаем корни: y=-1;y= 10, далее возвращаемся к корням исходного уравнения:

x = - 0,5;   x = 5.

Ответ: -0,5; 5.

$ax^2 + bx + c = 0$ и $y^2 + by + ac = 0$

связаны соотношениями: $x_1 = \frac{y_1}{a}$ $x_2 = \frac{y_2}{a}$

На основании теорем:

1. Если в квадратном уравнении ***a+b+c=0***, то один из корней равен 1, а второй $\frac{c}{a}$

2. Если в квадратном уравнении ***a+c=b,*** то один из корней равен -1, а второй $\left(-\frac{c}{a}\right)$

<u>Примеры</u>:

$$157x^2 + 20x - 177 = 0$$

$$203x^2 + 220x + 17 = 0$$

Теорема 1. Если в квадратном уравнении $a + b + c = 0$, то один из корней равен 1, а второй равен $\frac{c}{a}$

Решите уравнение $137x^2 + 20x – 157 = 0.$

$137x^2 + 20x – 157 = 0.$

$a = 137, b = 20, c = -157.$

$a + b + c = 137 + 20 – 157 = 0.$

$x_1 = 1,\ x = \frac{c}{a} = -\frac{157}{137}$

Ответ: $1; -\frac{157}{137}$.

Теорема 2. Если в квадратном уравнении

$a + c = b$, то один из корней равен -1, а второй равен $-\frac{c}{a}$

Решите уравнение $200x^2 + 210x + 10 = 0$.

$200x^2 + 210x + 10 = 0$.

$a = 200$, $b = 210$, $c = 10$.

$a + c = 200 + 10 = 210 = b$.

$x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{10}{200}$

Ответ: -1; -0,05

Общие методы

1. Разложение на множители;
2. Введение новой переменной;
3. Графический метод.

Метод разложения на множители

Цель: привести квадратное уравнение общего вида к виду

$A(x) \cdot B(x) = 0$,

где A(x) и B(x) – многочлены относительно x.

Способы:

1. Вынесение общего множителя за скобки;
2. Использование формул сокращенного умножения;
3. Способ группировки.

Метод разложения на множители

Решите уравнение $4x^2 + 5x + 1 = 0.$

$4x^2 + 5x + 1 = 0.$

$4x^2 + 4x + x + 1 = 0.$

$(4x^2 + 4x) + (x + 1) = 0.$

$4x(x + 1) + (x + 1) = 0.$

$(x + 1)(4x+1) = 0.$

Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а второй при этом не теряет смысла, или когда оба равны нулю.

$x + 1 = 0$ или $4x + 1 = 0,$

$x = -1$ или $x = -0,25.$

Ответ: -1; -0,25.

Введение новой переменной.

Умение удачно ввести новую переменную – важный элемент математической культуры. Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более прозрачной.

Решите уравнение $(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2.$

Метод введения новой переменной

Решите уравнение $(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2$.

$(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2$.

Пусть: $2x + 3 = t$.

Произведем замену переменной: $t^2 = 3t - 2$.

$t^2 - 3t + 2 = 0$, $D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$, $D > 0$.

$t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Произведем обратную замену и вернемся к переменной x:

$2x + 3 = 1$ или $2x + 3 = 2$,

$x = -1$ или $x = -0{,}5$.

Ответ: -1; -0,5.

Графический метод

Для решения уравнения **f(x) = g(x)** необходимо построить графики функций

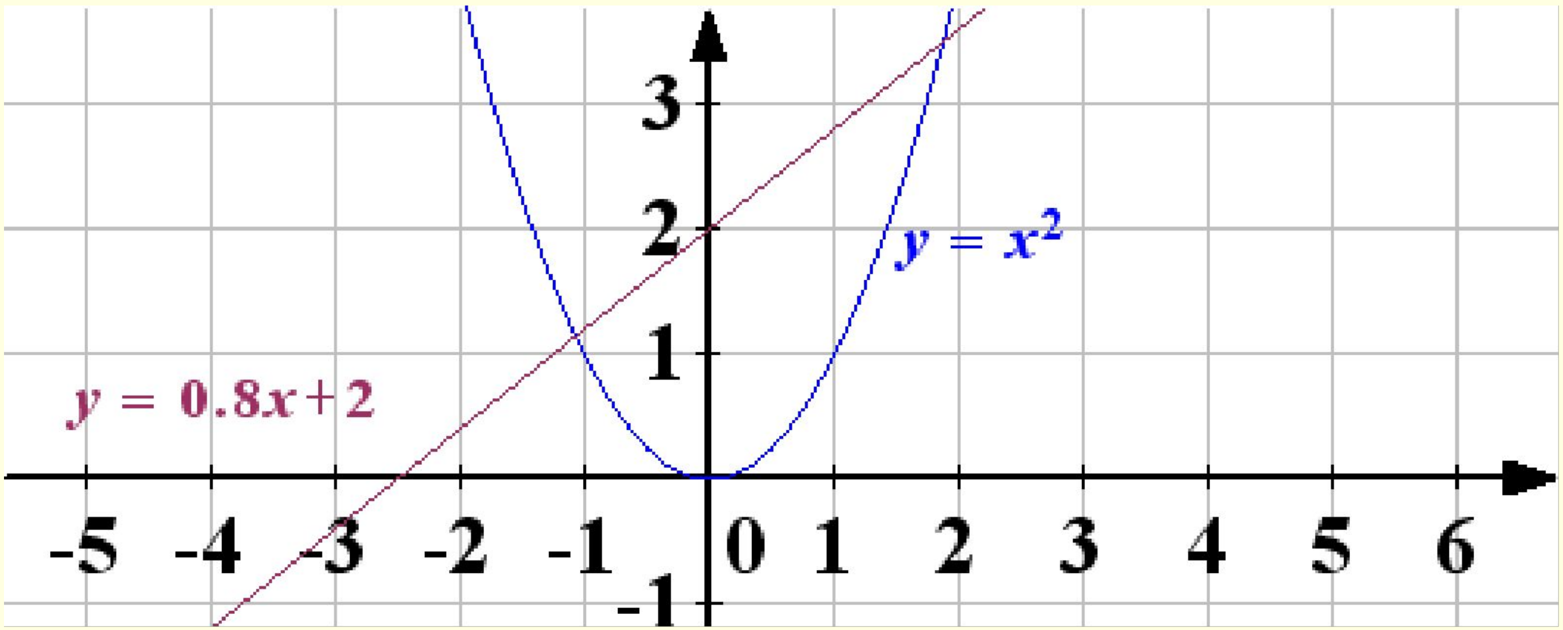
y = f(x), y = g(x)

и найти точки их пересечения;

абсциссы точек пересечения и будут корнями уравнения.

Пример: $x^2 = x + 2$

Графический метод часто применяют не для нахождения корней уравнения, а для определения их количества.



Практикум

Уравнение	*a*	*b*	*c*	$b^2 - 4ac$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 7x + 12 = 0$								
	5	-7	-6					
$5x^2 = 15x$								
	3	0	-75					

Проверь себя!

Уравнение	*a*	*b*	*c*	$b^2 - 4ac$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 7x + 12 = 0$	1	-7	12	1	4	3	7	12
$5x^2 - 7x - 6 = 0$	5	-7	-6	169	2	-0,6	1,4	-1,2
$5x^2 = 15x$	5	-15	0	225	0	3	3	0
$3x^2 - 75 = 0$	3	0	-75	900	5	-5	0	-25

ТЕСТ

№1	№2	№3	№4	№5	№6
б	д	в	д	а	в

	№ уравнения	№ метода
1	$100x^2 + 53x - 153 = 0$	
2	$20x^2 - 6x = 0$	
3	$299x^2 + 300x + 1 = 0$	
4	$3x^2 - 5x + 4 = 0$	
5	$7x^2 + 8x + 2 = 0$	
6	$35x^2 - 8 = 0$	
7	$4x^2 - 4x + 3 = 0$	
8	$(x - 8)^2 - (3x + 1)^2 = 0$	
9	$4(x - 1)^2 + 0,5(x - 1) - 1 = 0$	
10	$12x^2 = 0$	

1. в,с=0

$ax^2=0$

2. с=0

$ax^2+вx=0$

3. в=0

$ax^2+c=0$

4. b - нечётное

$ax^2+bx+c=0$

5. b - чётное

$ax^2+bx+c=0$

6. Теорема Виета.

7. Метод выделения квадрата двучлена.

8. Метод «переброски» старшего коэффициента.

9. Т1 или Т2.

10. Метод разложения на множители.

11. Метод введения новой переменной.