

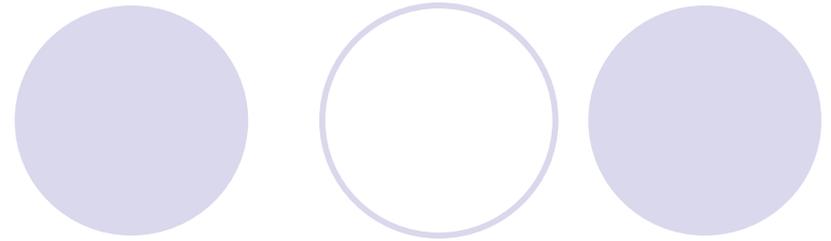
The image features six light purple circles arranged in two rows. The top row contains three circles, and the bottom row contains three circles. The text 'Теория множеств' is centered over the top row of circles.

Теория множеств

Определение

- Множество — одно из ключевых понятий математики, в частности, теории множеств и логики.
- Понятие множества является одним из наиболее общих и наиболее важных математических понятий. Оно было введено в математику немецким ученым Георгом Кантором (1845-1918), создателем теории множеств.

Задание множеств

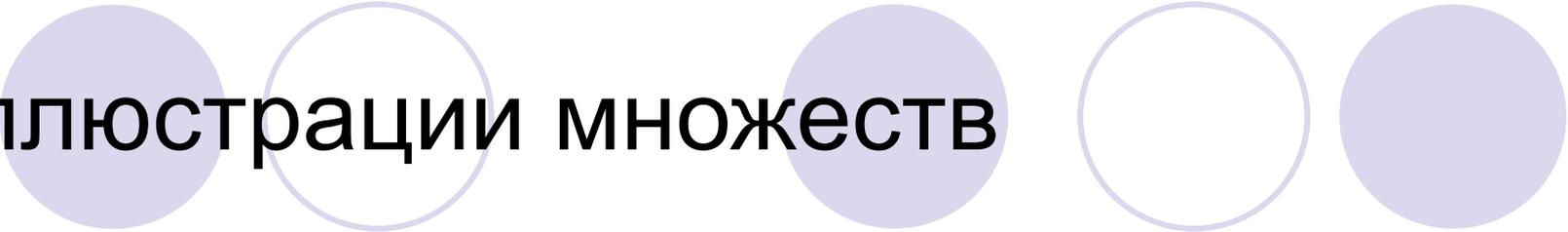


- В основе теории множеств лежат первичные понятия: *множество* и отношение *быть элементом* множества (обозначается как $x \in A$ — « x есть элемент множества A »).
- Множества обозначают прописными латинскими буквами A, B, \dots, Z , а элементы, принадлежащие данным множествам — строчными a, b, \dots, z .

Способы задания множеств

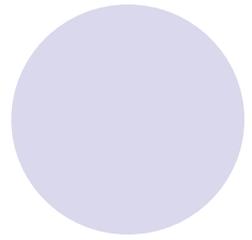
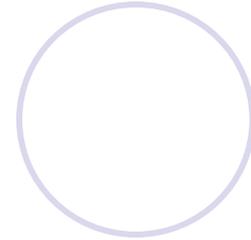
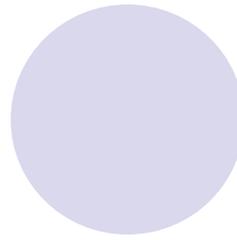
- Множество задается либо перечислением (указанием) всех его элементов, заключенных в фигурные скобки, например $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- Множество может быть задано с помощью характеристического свойства его элементов, например $A = \{x \mid 0 < x < 10 \text{ и } x \text{ – нечетное}\}$
- $z \in Z, a \notin Z$

Иллюстрации множеств



- Операции множеств и связанные с ними соотношения представляются наглядно с помощью диаграмм Эйлера-Венна (названных по имени русского математика Леонарда Эйлера (1707-1783гг.) и английского логика Джона Венна (1834-1923гг.). На этих диаграммах любые множества изображаются кругами, пересекающимися друг друга, исходя из того, что внутренними точками круга изображаются элементы множества. Общей частью двух кругов, пересекающихся друг друга, представляются возможные общие элементы двух множеств. Универсальное множество изображается в виде прямоугольника.

Пустое множество



- Среди множеств выделяют особое множество – пустое множество.
- *Пустое множество, по определению, не содержит элементов; число элементов пустого множества есть нуль.*
- Пустое множество является частью любого множества.
- Обозначение \emptyset



Универсальное множество

- Множество, содержащее все элементы, находящиеся в рассмотрении, называется универсумом или универсальным множеством и обозначается как U .

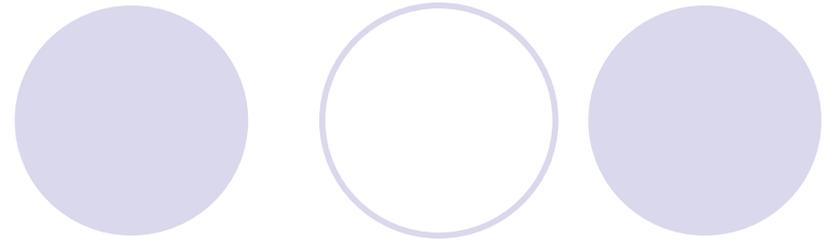
Конечные и бесконечные множества

- Конечное множество - множество, состоящее из конечного числа элементов.
- Бесконечное множество – непустое множество, не являющееся конечным.
- *Пример: Множество натуральных чисел является бесконечным.*
- Упорядоченное множество – множество, каждому элементу которого поставлено в соответствие некоторое число (номер этого элемента) от 1 до n , где n – число элементов множества.

Отношения между множествами

- Множества A и B равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Равенство множеств A и B записывают в виде $A=B$. $A=B$ если $A \subset B$ и $B \subset A$
- Множество A называют подмножеством множества B , если каждый элемент множества A является в то же время элементом множества B . $A \subset B$ или $B \supset A$.

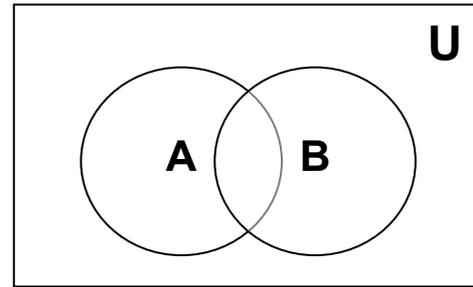
Подмножества



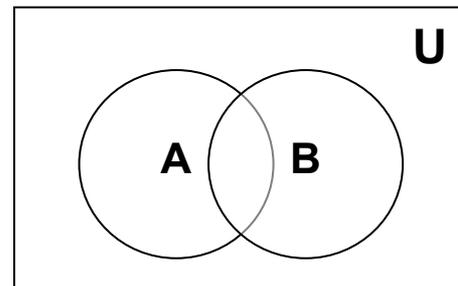
- $A \subset B, B \supset A$ – все элементы множества A принадлежат B .
- Несобственные подмножества - \emptyset , само множество B .
- Остальные – собственные подмножества.
- Структура доказательства:
 - Пусть $a \in A$, тогда ..., ..., тогда $a \in B$.
- Булеан $P(A) = \{B \mid B \subset A\}$
- $A = \{a, b, c\}; P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Операции над множествами

- Пересечение двух множеств $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$



- Объединение двух множеств $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$



Для совокупности множеств

$$\bigcap_{A \in S} A, \bigcup_{A \in S} A$$

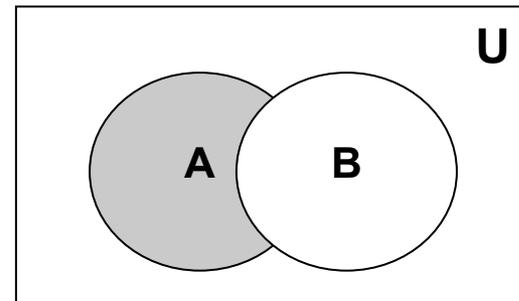
$$\bigcap_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$\bigcap_{i=1}^k A_i, \bigcup_{i=1}^k A_i$$

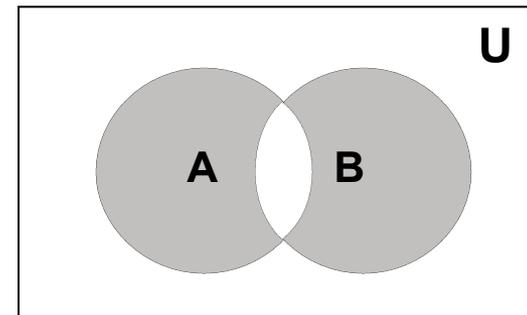
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Операции над множествами

- Разность множеств $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$

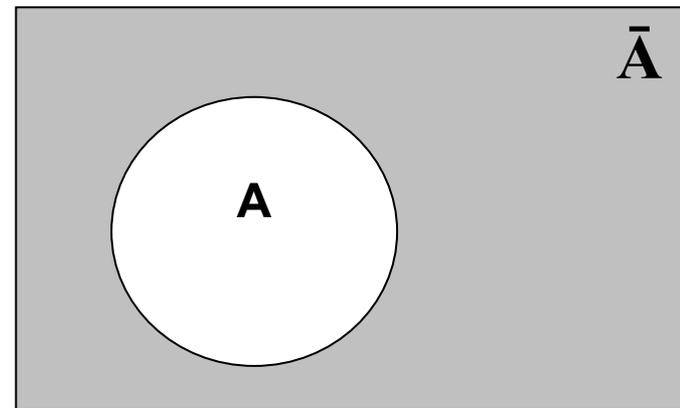


- Симметрическая разность $A \dot{\cup} B = A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \text{ или } x \in B \text{ и } x \notin A\}$



Дополнение множества

- Дополнение множества A $\bar{A} = U \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$



- Старшинство операций
 - Дополнение
 - Разность
 - Пересечение
 - Объединение
 - Симметрическая разность

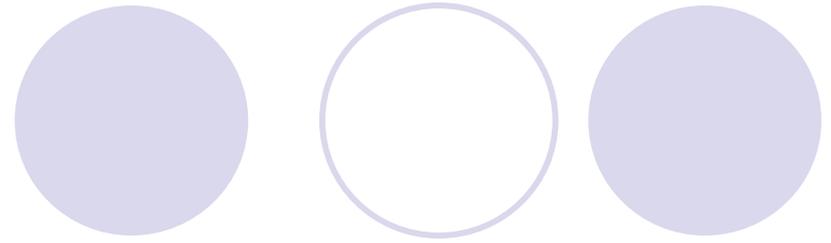
Введем обозначения для наиболее часто используемых множеств:

- **N** – множество всех натуральных чисел;
- **Z** – множество всех целых чисел;
- **Z+** – множество целых неотрицательных чисел ($\mathbf{Z^+ = N \cup \{0\}}$);
- **Z-** – множество целых неположительных чисел ($\mathbf{Z^- = Z \setminus N}$);
- **Q** – множество всех рациональных чисел;
- **R** – множество всех действительных чисел;
- **R+** – множество неотрицательных действительных чисел;
- **R-** – множество неположительных действительных чисел.

Основные законы

- Коммутативность операций \cup и \cap :
 - $A \cup B = B \cup A$
 - $A \cap B = B \cap A$
- Ассоциативность операций \cup и \cap :
 - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
 - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Законы идемпотентности операций \cup и \cap :
 - $A \cup A = A$
 - $A \cap A = A$
- Законы дистрибутивности:
 - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Основные законы



- Законы поглощения:
 - $A \cup (A \cap B) = A$
 - $A \cap (A \cup B) = A$
- Законы де Моргана:
 - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
 - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- 7. Законы пустого и универсального множеств:
 - $A \cup \emptyset = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$
 - $A \cup U = U$ $A \cap U = A$ $A \cup \overline{A} = U$
 - $U = \emptyset \cup \emptyset = U$
- Закон двойного отрицания
 - $\overline{\overline{A}} = A$

Декартово произведение

- Декартовым или прямым произведением множеств A_1, A_2, \dots, A_n называется множество
 - $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$,
- обозначаемое через $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.
- Если $A_1 = A_2 = \dots = A_n$, то множество $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ называется n -ой декартовой степенью множества A и обозначается A^n .
- Положим по определению $A^0 = \emptyset$.
- Если хотя бы одно из множеств A_i пусто, то $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \emptyset$.

N-местное отношение (соответствие)

- *N-местным отношением (соответствием) P или n -местным предикатом P на множествах A_1, A_2, \dots, A_n называется некоторое подмножество декартового произведения $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.*
- *Элементы x_1, x_2, \dots, x_n (где $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$) называются связанными соответствием P тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P$.*