



Целые уравнения и способы их решения

Работу выполнила:
Данилова С. Д.- учитель
математики МОУ лицея №86

Цель работы:

- **Познакомиться с целыми уравнениями и способами их решения.**

Целое уравнение

- Уравнение вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ - многочлен стандартного вида, называют целым алгебраическим уравнением.

- Теорема 1. Если число a является корнем многочлена

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, то этот многочлен можно представить в виде $P(x) = (x - a)P_1(x)$, где $P_1(x)$ - многочлен степень которого на единицу меньше степени многочлена $P(x)$.

Теорема Безу

- Теорема Безу. Для того чтобы многочлен делился без остатка на двучлен $x - a$, необходимо и достаточно, чтобы число a было корнем многочлена.
- Теорема 2. Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ имеет целые коэффициенты, причем свободный член отличен от нуля, то целыми корнями такого уравнения могут быть только делители свободного члена.

Пример 1

Решить уравнение $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$

Делители свободного члена- числа -1,

1, -2, 2. Подставим эти числа в

уравнение, находим что $x_1 = 1, x_2 = -2$

Представим левую часть уравнение в

виде $(x-1)(x+2)(x^2 + px + q)$ или

$(x^2 + x - 2)(x^2 + px + q)$, где p и q -
неизвестные нам числа.

Методом неопределенных коэффициентов находим, что $-2q = 2$ и $p + 1 = -1$. Отсюда $q = -1$, $p = -2$. Приравняв нулю трехчлен $x^2 - 2x - 1$, найдем остальные корни уравнения:

$$x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$x_4 = 1 + \sqrt{2}, \quad x_3 = 1 - \sqrt{2}.$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = -2, x_4 = 1 + \sqrt{2}, x_3 = 1 - \sqrt{2}$.

Метод введения новой переменной.

Этот метод заключается в том, что для решения уравнения $f(x) = 0$ вводят новую переменную (подстановку)

$y = q(x)$ и выражают $f(x)$ через y , получая новое уравнение $s(y) = 0$.

Решая затем уравнение $s(y) = 0$

находят его корни $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

После этого получают совокупность уравнений $q(x) = y_1, q(x) = y_2, \dots, q(x) = y_n$, из которых и находят корни исходного уравнения.

Пример 2

Решить уравнение

$$(3x + 2)^4 - 13(3x + 2)^2 + 36 = 0$$

Полагая $y = (3x + 2)^2$, получим уравнение $y^2 - 13y + 36 = 0$.

Находим его корни $y_1 = 4$, $y_2 = 9$ и решаем совокупность уравнений

$$\begin{cases} (3x + 2)^2 = 4, \\ (3x + 2)^2 = 9 \end{cases}$$

Первое уравнение $(3x + 2)^2 = 4$
равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 3x + 2 = 2, \\ 3x + 2 = -2 \end{array} \right. \text{ находим корни} \left. \begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = -\frac{4}{3}. \end{array} \right.$$

Второе уравнение $(3x + 2)^2 = 9$
равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 3x + 2 = 3, \\ 3x + 2 = -3. \end{array} \right. \text{ находим корни} \left. \begin{array}{l} x_3 = \frac{1}{3}, \\ x_4 = -\frac{5}{3} \end{array} \right.$$

Ответ: $x_1 = 0; x_2 = -\frac{4}{3}; x_3 = \frac{1}{3}; x_4 = -\frac{5}{3}$

Возвратные уравнения

Уравнение четвертой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

называют возвратным, если оно имеет вид $ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0$ где k - не равное нулю число.

При $k = 1$ возвратное уравнение примет вид $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

Такое уравнение называется симметрическим.

Возвратные уравнения можно упрощать введением новой переменной

$$y = x + \frac{k}{x}$$

Пример 3

Решить уравнение

$$3x^4 - 5x^3 - 30x^2 - 10x + 12 = 0$$

Это уравнение возвратное, так как оно имеет вид

$$3x^4 - 5x^3 - 30x^2 + 2(-5)x + 2^2 \cdot 3 = 0, k = 2$$

Разделим обе части уравнения на x^2 .

Равносильность уравнения не нарушится, так как $x = 0$ не является корнем уравнения.

Получим:

$$3x^2 - 5x - 30 - \frac{10}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$$

Сгруппируем члены уравнения

$$3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{2}{x}\right) - 30 = 0.$$

Введем новую переменную $y = x + \frac{2}{x}$.

Тогда $y^2 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} + 4$

Отсюда $x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4$.

Получим уравнение $3(y^2 - 4) - 5y - 30 = 0$

или $3y^2 - 5y - 42 = 0$.

Найдём его корни: $y_1 = -3, y_2 = \frac{14}{3}$.

Получим совокупность

уравнений $x + \frac{2}{x} = -3$ **или** $x + \frac{2}{x} = \frac{14}{3}$.

Приведя их к целому виду, получим:

Найдём корни

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 = 0, \\ 3x^2 - 14x + 6 = 0. \end{cases}$$
$$x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = \frac{7 - \sqrt{31}}{3}, x_4 = \frac{7 + \sqrt{31}}{3}$$