Линейная алгебра

- Матрицы. Основные понятия.
- Действия над матрицами
- Метод обратной матрицы решения систем линейных уравнений

Матрицы. Основные понятия

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из каких – либо элементов и имеющая *m* строк и *n* столбцов.

Элементами матрицы могут быть числа, алгебраические выражения, функции и т.д.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, элементы матрицы – теми же маленькими буквами.

Размерность матрицы обозначается: $\dim A = [m \times n]$

количество строк

количество столбцов

Матрицы. Основные понятия

Если $m \neq n$, то матрица называется ***прямоугольной***.

Если $m = n$, то матрица называется ***квадратной*** (*n* - ного порядка).

Любое число (скаляр) можно представить как матрицу первого порядка, размерностью $[1 \times 1]$.

Матрица типа $[1 \times n]$ называется ***матрица-строка:***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Матрица типа $[m \times 1]$ называется ***матрица-столбец:***

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Матрицы. Основные понятия

Квадратная матрица называется ***единичной***, если ее элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице, остальные – нулю (обозначается буквой **Е**):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если все элементы квадратной матрицы равны нулю, то она называется ***нуль-матрицей*** и обозначается символом **0**.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицы. Основные понятия

Для каждой квадратной матрицы *n* - ного порядка существует определитель *n* - ного порядка, элементы которого равны соответствующим элементам матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель любой единичной матрицы равен единице.

Если определитель матрицы равен нулю, то матрица называется ***вырожденной***, в противном случае матрица ***невырожденная***.

Действия над матрицами

- *Равенство матриц*

Матрицы равны, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \dim A = \dim B; \quad a_{ij} = b_{ij}$$

- *Сложение (вычитание) матриц*

Сумма и разность матриц существуют только для матриц одинакового размера, при этом соответствующие элементы матриц складываются или вычитаются.

$$C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim A = \dim B = \dim C \\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \end{cases}$$

Действия над матрицами

- *Умножение матрицы на число*

При умножении матрицы A на число *k* получается матрица того же размера, при этом каждый элемент матрицы A умножается на *k*.

$$B = k \cdot A \quad \Leftrightarrow \quad \dim A = \dim B; \quad b_{ij} = a_{ij} \cdot k$$

Найти значение выражения: $C = A + 5 \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1+5\cdot 2 & 3+5\cdot(-4) & 2+5\cdot 1 \\ 0+5\cdot(-5) & -1+5\cdot 0 & 4+5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -17 & 7 \\ -25 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

- *Умножение матриц*

Произведение матриц *A* * *B* определено только тогда, когда число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*, в противном случае произведение не существует.

$$\left.\begin{array}{l} \dim A = m \times n \\ \dim B = n \times k \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C = A \cdot B - \text{существует} \\ \dim C = m \times k \end{array}$$

Произведением матрицы *A* размера $[m \times n]$ с элементами a_{ij} на матрицу *B* размера $[n \times k]$ с элементами b_{jq} называется матрица *C* размера $[m \times k]$ с элементами:

$$c_{iq} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jq}$$

Действия над матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

*Найти C = A * B*

$$\dim A = 2 \times 3$$

$$\dim B = 3 \times 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 6 & 9 & 1 \\ 14 & 24 & 4 \end{matrix}$$

$$c_{12} = 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2$$

$$c_{11} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3$$

$$c_{13} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 14 & 24 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c_{22} = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2$$

$$c_{23} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0$$

$$c_{21} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3$$

Действия над матрицами

Свойства операции произведения матриц:

1) $A(BC) = (AB)C;$

2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B;$

3) $(A+B)C = AC + BC;$

4) В общем случае для произведения матриц не действует переместительный закон: $A \cdot B \neq B \cdot A$

иногда *AB* существует, а *BA* не имеет смысла. В случае, когда *AB = BA*, матрицы *A* и *B* называются ***коммутативными***.

5) Единичная матрица является коммутативной для любой квадратной матрицы того же порядка:

$$EA = AE = A$$

6) Для двух квадратных матриц *A* и *B* одного порядка произведение определителей равно определителю произведения .

$$\det A \cdot \det B = \det AB$$

Действия над матрицами

- *Нахождение обратной матрицы*

Обратной матрицей по отношению к данной *невырожденной квадратной* матрице A *n - ного* порядка, называется матрица, которая, будучи умноженной как слева, так и справа на данную матрицу, дает единичную матрицу.

Обратная матрица обозначается символом A^{-1}. Таким образом, согласно определению: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

$$A \to \det A \neq 0 \to A^{T} \to A^{+} \to \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{+}}$$

Транспонированная матрица получается из матрицы А путем замены строк соответствующими столбцами

Присоединенная матрица получается путем замены каждого элемента матрицы A^{T} на его алгебраическое дополнение

Если определитель матрицы равен нулю, то обратная матрица не существует

Действия над матрицами

$$A=\begin{pmatrix}0&3&1\\2&4&1\\2&2&0\end{pmatrix}\longrightarrow \det A=\begin{vmatrix}0&3&1\\2&4&1\\2&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&1\\2&1&0\\2&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1\\2&2\end{vmatrix}\cdot(-1)^4=2$$

$$\longrightarrow A^T=\begin{pmatrix}0&2&2\\3&4&2\\1&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow A^+=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\2&-2&2\\-4&6&-6\end{pmatrix}$$

Из второй строки вычтем первую строку

Разложим определитель по элементам 3 столбца

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4&2\\1&0\end{vmatrix}\cdot(-1)^2=-2$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix}3&2\\1&0\end{vmatrix}\cdot(-1)^3=2$$

$$A_{32}=\begin{vmatrix}0&2\\3&2\end{vmatrix}\cdot(-1)^5=6$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&2&-1\\2&-2&2\\-4&6&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-0.5\\1&-1&1\\-2&3&-3\end{pmatrix}$$

Метод обратной матрицы решения систем линейных уравнений

Метод обратной матрицы рассмотрим на примере решения квадратной системы 3 порядка.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричном виде. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Основная матрица системы

Матрица - столбец свободных членов

Матрица - столбец неизвестных

Метод обратной матрицы решения систем линейных уравнений

Тогда систему можно записать так:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot X = B$$

Найдем решение системы в матричном виде.

Предположим, что *det A* отличен от нуля и, следовательно, существует обратная матрица A^{-1}.

Умножим слева матричную запись системы на обратную матрицу:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Метод обратной матрицы применим для решения квадратных систем с невырожденной основной матрицей.

Метод обратной матрицы решения систем линейных уравнений

Решить систему методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -0.5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

-0,5

2

-5

$$\Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$