



Задачи выпуклого программирования

Постановка задачи выпуклого программирования

$$f[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow \max (\min) \quad (1)$$

$$g_i[x_1, x_2, \dots, x_n] \leq b_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n),$$

$$f[\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1] \leq \lambda f(X_2) + (1-\lambda)f(X_1).$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

$$f[\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1] \geq \lambda f(X_2) + (1-\lambda)f(X_1).$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

Область допустимых значений (2) обладает свойством регулярности, если найдется такой вектор x_k , что все функции

$$q_i(x_k) < b_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

ЗНЛП называется **задачей выпуклого программирования**, если функция (1) либо выпуклая, либо вогнута, а все функции g_i выпуклы.

Теорема Любой локальный экстремум задачи выпуклого программирования является глобальным .

Функцией Лагранжа L называется следующая функция:

$$L(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m y_i [b_i - g_i(x_1, \dots, x_n)].$$

Седловой точкой функции Лагранжа L называется вектор $\left(X^{(0)}, Y^{(0)} \right)$, для которого выполняется следующее условие:

$$L(x_1, \dots, x_n, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) \leq L(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) \leq L(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y_1, \dots, y_m) \\ \forall x_j, y_i \geq 0.$$

Теорема Куна–Таккера Для задачи выпуклого программирования, ОДЗ которой обладает свойством регулярности, план $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ является оптимальным тогда и только тогда, когда \exists вектор $Y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$, $(y_i^{(0)} \geq 0, i = \overline{1, m})$ такой, что точка $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ является седловой точкой функции Лагранжа.

Если функции f и g непрерывно дифференцируемы, то аналитически уравнения для теоремы Куна–Таккера выглядят следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L_0}{\partial x_j} \leq 0 \quad (j=\overline{1, n}) \\ x_j^{(0)} \frac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0 \quad (j=\overline{1, n}) \\ x_j \geq 0, \quad (j=\overline{1, n}) \\ \frac{\partial L_0}{\partial y_i} \geq 0 \quad (i=\overline{1, m}) \\ y_i^{(0)} \frac{\partial L_0}{\partial y_i} = 0 \quad (i=\overline{1, m}) \\ y_i \geq 0, \quad (i=\overline{1, m}) \end{array} \right.$$

Пример:

Найти максимальное значение функции:

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + y_1[8 - x_1 - 2x_2] + y_2[12 - 2x_1 + x_2]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L_0}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2 \leq 0 \\ \frac{\partial L_0}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2 \leq 0 \\ \frac{\partial L_0}{\partial y_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ \frac{\partial L_0}{\partial y_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2) = 0 \\ x_2(4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2) = 0 \\ y_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0 \\ y_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L_0}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2 + v_1 = 0 \\ \frac{\partial L_0}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2 + v_2 = 0 \\ \frac{\partial L_0}{\partial y_1} = 8 - x_1 - 2x_2 - w_1 = 0 \\ \frac{\partial L_0}{\partial y_2} = 12 - 2x_1 + x_2 - w_2 = 0 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 v_1 = 0 \\ x_2 v_2 = 0 \\ y_1 w_1 = 0 \\ y_2 w_2 = 0 \end{array} \right.$$

Решаем методом искусственного базиса

$$-Mz_1 - Mz_2 \rightarrow \max \quad z_1, z_2 \geq 0$$

$$x_1^{(0)} = 1, x_2^{(0)} = 1, w_1 = 5, w_2 = 11$$

$$y_1 = y_2 = v_1 = v_2 = z_1 = z_2 = 0$$

$$x^* = (1,1), f \max = 3.$$