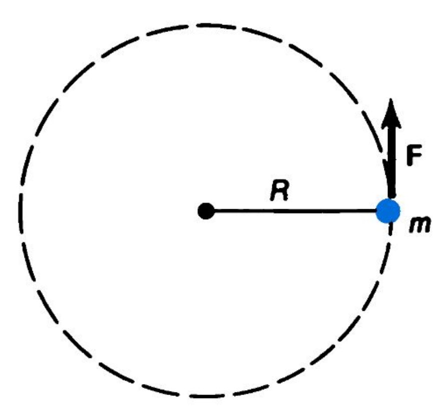
Теорема о параллельных осях

Существуют две простые теоремы, которые помогают при вычислении моментов инерции. Первая из них называется *теоремой о параллельном переносе оси вращения* (теоремой о параллельных осях). Она утверждает, что если I – момент инерции тела массой M относительно некоторой оси вращения, а $I_{\text{цм}}$ – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной первой оси, отстоящей от нее на расстояние h, то[1)]

$$I = I_{\text{цм}} + Mh^2 . \tag{9.15}$$

Момент инерции

Частица с массой **m** вращается по окружности **R** $F = ma = mR\alpha.$



Умножим обе части уравнения на **R**

$$RF = \boxed{mR^2}\,\alpha$$

момент инерции – мера инертности частицы во вращательном

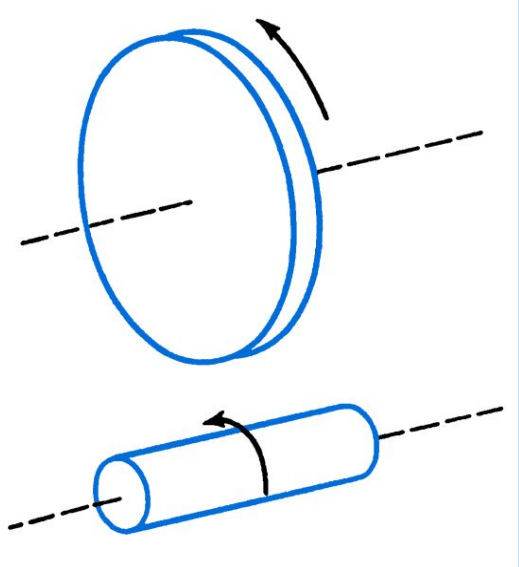
Рассмотрим вращающееся твердое тело как совокупность множества частиц, расположенных на разных расстояниях от оси вращения.

Так как угловое ускорение одинаково, то $\left(\sum m_i R_i^2\right)\alpha$

Полный момент сил = сумме моментов внешних сил.

Сумма $$\sum m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \ldots + m_n R_n^2 = I$$

называется **моментом инерции** тела.



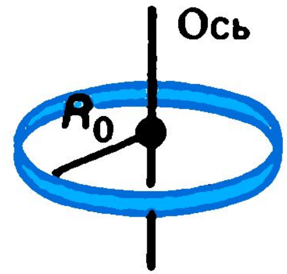
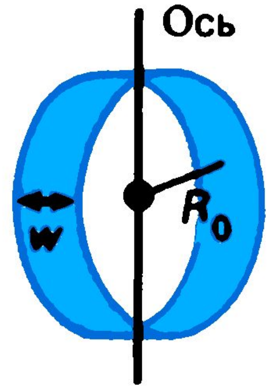
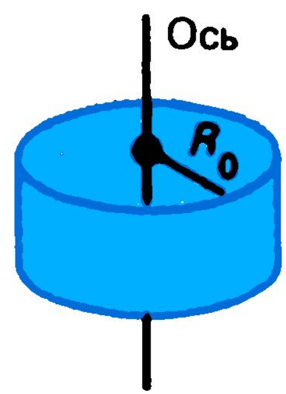
момент инерции зависит не только от массы тела, но и от того, как эта масса распределена.

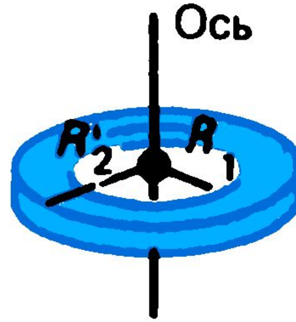
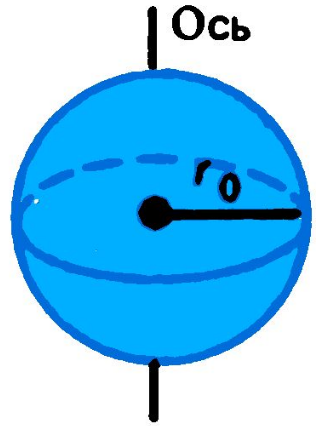
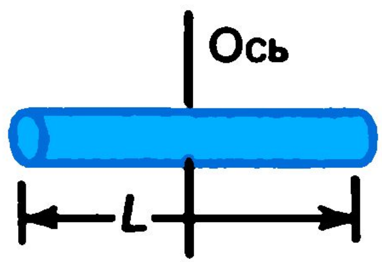
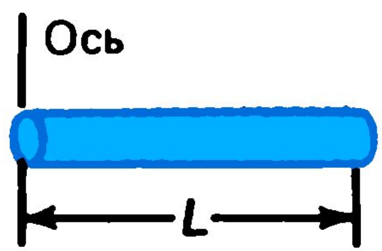
Вращательный эквивалент второго закона Ньютона

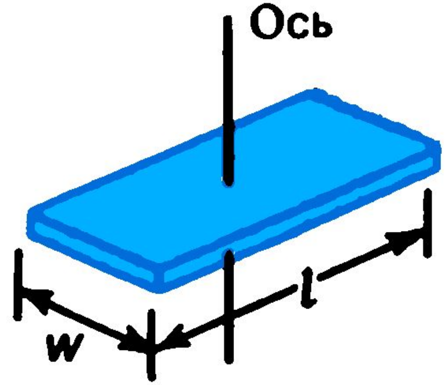
$$\boxed{T = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha.}$$ [неподвижная ось].

Вращение абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси

$$\boxed{\tau_{ЦМ} = I_{ЦМ}\,\alpha_{ЦМ}}$$

Тело	Положение оси вращения		Момент инерции	Радиус инерции
а) Тонкое кольцо радиусом R_0	Через центр		MR_0^2	R_0
б) Тонкое кольцо радиусом R_0 и шириной w	По диаметру		$\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mw^2$	$\sqrt{\frac{R_0^2}{2} + \frac{w^2}{12}}$
в) Твердый цилиндр радиусом R_0	Через центр		$\frac{1}{2}MR_0^2$	$\frac{R_0}{\sqrt{2}}$

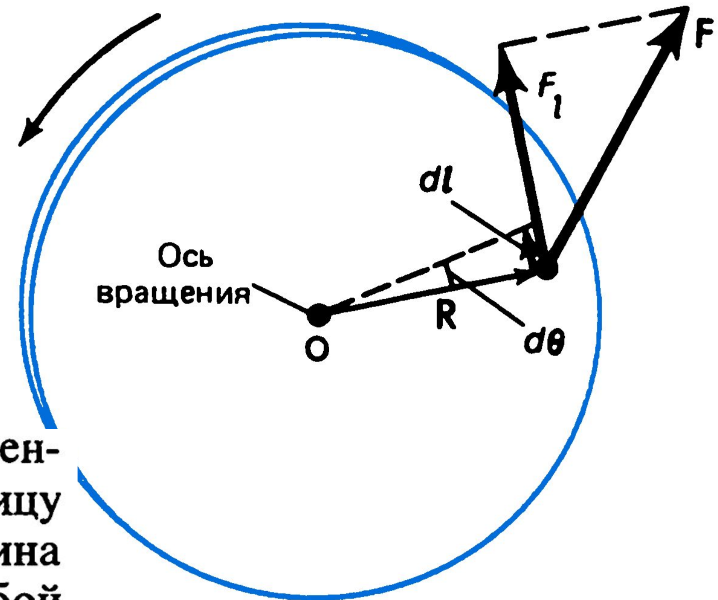
г) Полый цилиндр с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2	Через центр		$\frac{1}{2}M(R_1^2+R_2^2)$	$\sqrt{\frac{R_1^2+R_2^2}{2}}$
д) Твердая сфера радиусом r_0	Через центр		$\frac{2}{5}Mr_0^2$	$\sqrt{\frac{2}{5}}\,r_0$
е) Тонкий стержень длиной L	Через центр		$\frac{1}{12}ML^2$	$\frac{L}{\sqrt{12}}$
ж) Тонкий стержень длиной L	Через конец		$\frac{1}{3}ML^2$	$\frac{L}{\sqrt{3}}$

з) Тонкая прямоугольная пластинка длиной l и шириной w	Через центр		$\frac{1}{12}M(l^2 + w^2)$	$\sqrt{\frac{l^2+w^2}{12}}$

Поступательное движение $x(t) = x_0 + v_0 t + a t^2/2$	Вращательное движение $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \alpha t^2/2$
Скорость v	Угловая скорость ω
Масса **m**	Момент инерции **I**
Импульс $\mathbf{p} = \mathbf{m}v$	Момент импульса $\mathbf{L} = \mathbf{I}\omega$
Сила **F**	Момент силы τ
Ускорение a $a = dv/d\mathrm{t}$	Угловое ускорение α $\alpha = d\omega/d\mathrm{t}$
2-й закон Ньютона $\mathbf{F} = \mathbf{ma}$ $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/d\mathbf{t}$	$\tau = \mathbf{I}\alpha$ $\mathbf{F} = d\mathbf{L}/d\mathbf{t}$
Работа $\mathbf{A} = \mathbf{F}l$	$\mathbf{A} = \tau\varphi$
Кинетическая энергия $\mathbf{m}v^2/2$	$\mathbf{I}\omega^2/2$

Связь энергии и работы при вращательном движении

Работа, совершаемая над телом, вращающимся вокруг неподвижной оси, может быть выражена через угловые величины.



$$A = \int \mathbf{F} \cdot dl = \int F_l R\, d\theta,$$

где dl – вектор бесконечно малого перемещения, перпендикулярного линии, соединяющей ось вращения и частицу (и, следовательно, направлен по движению). Величина этого вектора равна $dl = R\, d\theta$, а F_l представляет собой величину составляющей силы **F**, параллельную вектору dl

$$A = \int \tau\, d\theta.$$

Скорость совершения работы, или мощность

$$P = \frac{dA}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

Учитывая

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{d\theta};$$

получим

$$\boxed{A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\, d\omega = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2.}$$

1.155. Для демонстрации законов сохранения применяется маятник Максвелла, представляющий собой массивный диск радиусом R и массой m, туго насаженный на ось радиусом r, которая подвешивается на двух предварительно намотанных на нее нитях (рис. 27). Когда маятник отпускают, то он совершает возвратно-поступательное движение в вертикальной плоскости при одновременном движении диска вокруг оси. Не учитывая сил сопротивления и момента инерции оси, определить: 1) ускорение поступательного движения маятника; 2) силу натяжения нити.

Т

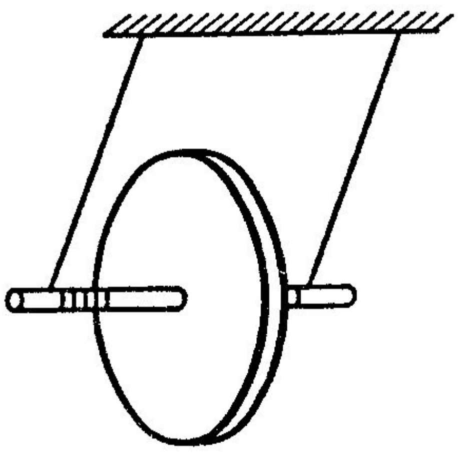


Рис. 27

$$\left[\,1)\ a=\frac{g}{1+R^2/(2r^2)};\quad 2)\ T=\frac{mR_2}{2}\frac{g}{R^2+2r^2}\,\right]$$

1.158. Горизонтальная платформа массой $m = 25$ кг и радиусом $R = 0{,}8$ м вращается с частотой $n_1 = 18$ мин$^{-1}$.

Т

В центре стоит человек и держит в расставленных руках гири. Считая платформу диском, определить частоту вращения платформы, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от $J_1 = 3{,}5$ кг$\cdot$м^2 до $J_2 = 1$ кг$\cdot$м^2. [23 мин$^{-1}$]

1.162 Человек массой $m = 60$ кг, стоящий на краю горизонтальной платформы радиусом $R = 1$ м и массой

Т

$M = 120$ кг, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой $n_1 = 10$ мин$^{-1}$, переходит к ее центру. Считая платформу круглым однородным диском, а человека — точечной массой, определить работу, совершаемую человеком при переходе от края платформы к ее центру. [65,8 Дж]

Ч

3.30. Однородный диск массой $m_1=0{,}2$ кг и радиусом $R=20$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси z, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку C (рис. 3.17). В точку A на образующей диска попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси z) со скоростью $v=10$ м/с, и прилипает к его поверхности. Масса m_2 шарика равна 10 г. Определить угловую скорость ω диска и линейную скорость u точки O на диске в начальный момент времени. Вычисления выполнить для следующих значений a и b: 1) $a=b=R$; 2) $a=R/2$, $b=R$; 3) $a=2R/3$, $b=R/2$; 4) $a=R/3$, $b=2R/3$.

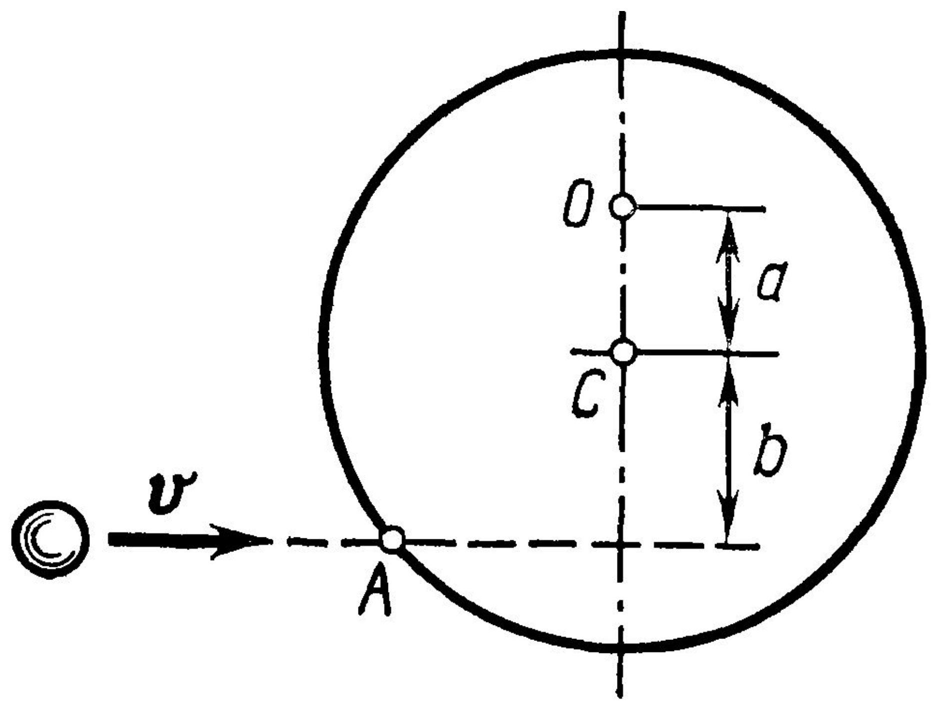


Рис. 3.17

Ч

3.31. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой $m=0{,}4$ кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью $v=20$ м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии $r=0{,}8$ м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч, если суммарный момент инерции J человека и скамьи равен 6 кг$\cdot$м^2?

Ч

3.45. Кинетическая энергия T вращающегося маховика равна 1 кДж. Под действием постоянного тормозящего момента маховик начал вращаться равнозамедленно и, сделав $N=80$ оборотов, остановился. Определить момент M силы торможения.

Ч

3.49. Обруч и сплошной цилиндр, имеющие одинаковую массу $m=2$ кг, катятся без скольжения с одинаковой скоростью $v=5$ м/с. Найти кинетические энергии T_1 и T_2 этих тел.

Ч

3.53. Тонкий прямой стержень длиной $l=1$ м прикреплен к горизонтальной оси, проходящей через его конец. Стержень отклонили на угол $\varphi=60°$ от положения равновесия и отпустили. Определить линейную скорость v нижнего конца стержня в момент прохождения через положение равновесия.

Домашнее задание

3.27. Через неподвижный блок массой $m=0,2$ кг перекинут шнур, к концам которого подвесили грузы массами $m_1=0,3$ кг и $m_2=0,5$ кг. Определить силы натяжения T_1 и T_2 шнура по обе стороны блока во время движения грузов, если масса блока равномерно распределена по ободу.

$\boxed{\text{Т}}$ 1.148, 1.156, 1.161

$\boxed{\text{Ч}}$ 3.29, 3.46, 3.50, 3.55