# Линейная алгебра

Лекцию читает
доцент
кафедры математики и информатики

Романова
Юлия Станиславовна

# Структура дисциплины

-линейная алгебра;

-векторный анализ;

-аналитическая геометрия;

# Список литературы


- Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. М:Айрис-пресс,2009.
- Кремер Н. Ш.и др. Высшая математика для экономического бакалавриата : учебник и практикум М. : Юрайт, 2012.
- Шипачев В. С. Высшая математика : учебное пособие для бакалавров. М. : Юрайт, 2012.
- Данко П. Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1,2 –М.:Оникс:2008.
- Романова Ю.С. Линейная алгебра: УМК, 2013

# Системы линейных уравнений

**Системой** ***n*** **линейных уравнений** называются *n* уравнений, содержащих искомые переменные в первой степени

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Переменные, коэффициенты системы, свободные члены, решение СЛУ, совместность, определенная и неопределенная СЛУ

**Матрицей** системы двух линейных уравнений называется таблица чисел, составленная из коэффициентов системы

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

Элементы М, порядок, квадратная М, главная и побочная диагонали, определитель М 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = D,$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = D_1, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = D_2$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

**Формулы Крамера** для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

# Теорема Крамера

**1.** Если определитель СЛУ **отличен от нуля** $D \neq 0$, то система совместна и имеет **единственное решение**, которое находится по формулам Крамера.

$D$=0:

2. Если хотя бы один из определителей $D_1$ или $D_2$ отличен от нуля, то система уравнений несовместна.

3. Если оба определителя $D_1 = D_2 = 0$, то СЛУ имеет бесконечное множество решений.

**Пример.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 12 \\ 5x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -13.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) - 2 \cdot 7 = -26;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 12 \cdot 5 = -39.$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-26}{-13} = 2, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-39}{-13} = 3.$$

**Пример.**

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2 \\ -2x_1 + 6x_2 = -4 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - (-4) = 0.$$

$$x_1 = 2 + 3x_2, \qquad x_2 \in R.$$

**Пример.**

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 = 7 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - (-4)\left(-3\right) = 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 21 = 33$$

**Система несовместна**

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

**Минор** элемента $a_{ik}$ матрицы третьего порядка: $M_{ik}$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

**Алгебраическое дополнение** элемента $a_{ik}$ **:**

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

**Пример.**

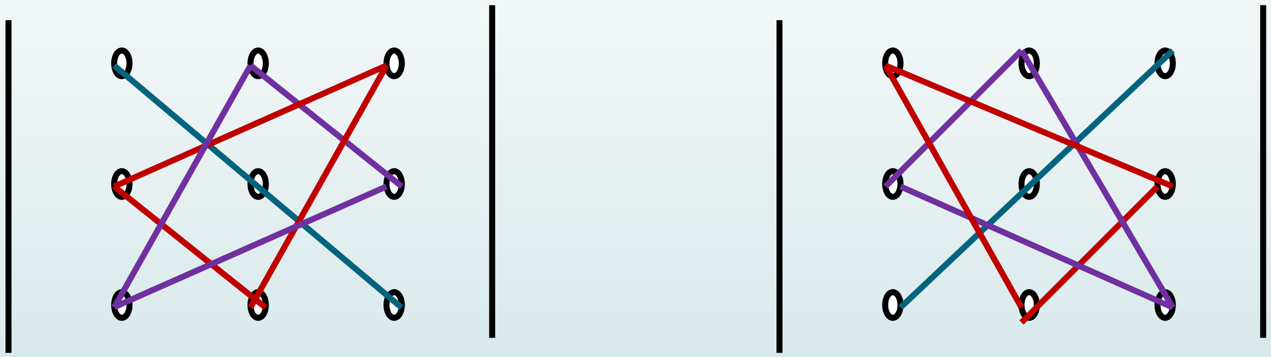
$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5.$$

# Определитель матрицы третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

## Правило треугольника



\+      -

**Пример.** Вычислить определитель двумя способами: по определению и по правилу треугольника

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

1-й способ:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2A_{11} + (-1)A_{12} + 1A_{13} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1(-1) = 3.$$

2-й способ:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 2(-1) + (-1)(-3)1 + 1\cdot 1\cdot 1 -$$

$$-1\cdot 2\cdot 1 - (-1)1(-1) - 2(-3)\cdot 1 =$$

$$= -4 + 3 + 1 - 2 - 1 + 6 = 3$$

# Матрицы

# Матрицы

Прямоугольная таблица чисел, состоящая из *m* строк и *n* столбцов, называется **матрицей с размерами** *m x n* :

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

$$B = \begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{Vmatrix} \qquad E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

диагональная единичная

**Операции с матрицами**:

-равенство;

-транспонирование;

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix} \qquad A^T = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix}$$

-сложение;

-произведение на число;

-перемножение.

**Пример.**

$$A+3B=\begin{Vmatrix}3 & -2 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{Vmatrix}+3\cdot\begin{Vmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & -1 & 5\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}3 & -2 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}3 & -9 & 6\\ 0 & -3 & 15\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}3+3 & -2-9 & 4+6\\ 1+0 & 0-3 & 2+15\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}6 & 7 & 10\\ 1 & -3 & 17\end{Vmatrix}$$

**Произведением матрицы *A*** размера $m\times n$ **на матрицу *B*** размера $n\times p$ называется матрица С размера $m\times p$:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk}.$$

**Пример.** Вычислить произведение матриц А на В и В на А.

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$B \cdot A = \left\| \begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} (-1)\cdot(-2)+2\cdot 3 & (-1)\cdot 3+2\cdot(-1) & (-1)\cdot 0+2\cdot 1 \\ 0\cdot(-2)+(-3)\cdot 3 & 0\cdot 3+(-3)\cdot(-1) & 0\cdot 0+(-3)\cdot 1 \\ 2\cdot(-2)+1\cdot 3 & 2\cdot 3+1\cdot(-1) & 2\cdot 0+1\cdot 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 8 & -5 & 2 \\ -9 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$A \cdot B = \left\| \begin{matrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} (-2)\cdot(-1)+3\cdot 0+0\cdot 2 & (-2)\cdot 2+3\cdot(-3)+0\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+1\cdot 2 & 3\cdot 2+(-1)\cdot(-3)+1\cdot 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 2 & -13 \\ -1 & 10 \end{matrix} \right\|$$

# Обратная матрица: $A^{-1}$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

**Теорема.** Для того, чтобы матрица $A$ имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы ее **определитель** был **не равен нулю:**

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{matrix} \right\|$$

# Решение системы линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}. \qquad \begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix}.$$

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \qquad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix}.$$

$$\underline{AX = B}, \qquad A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

$$A^{-1}A = E, \qquad EX = X, \qquad X = A^{-1}B.$$

**Пример.** Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A = \begin{Vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{Vmatrix}; \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}; B = \begin{Vmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{Vmatrix}.$$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 63 + 40 + 27 - 45 - 28 - 54 = 3.$$

$$A = \begin{Vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(27 - 20) = -7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 15 = -6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 3) = -3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 15 = 6;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -(28 - 27) = -1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(7 - 10) = 3;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 18 = 3.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{Vmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 65-45-14 \\ -91+90-14 \\ -78+45+42 \end{Vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 6 \\ -15 \\ 9 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = 3.$$

# Самостоятельная работа

1. Алгебраическое дополнение элемента $a_{23}$

матрицы $A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ равно...

1) **2** 2) **-2** 3) **6** 4) **14**

# Самостоятельная работа

2. Определитель $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ равен .....

**1) -1** **2) -5** **3) 5** **4) 1**

3. Если определитель системы не равен нулю, то система имеет…..

**1) единственное решение;**
**2) бесконечное число решение;**
**3) не имеет решений;**
**4) два решения.**

*

# Самостоятельная работа

4. Матрица $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ является.....

1) **квадратной;** 2) **единичной;**
3) **нулевой;** 4) **диагональной**

5. С матрицами $A = \begin{Vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -4 \end{Vmatrix}$ и $B = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$

можно выполнить операцию......

1) **A+ B** 2) **A - B**
3) **A x B** 4) **B x A**

# Самостоятельная работа

6. Решение матричного уравнения $A \bullet X = B$ имеет вид......

1) $X = \dfrac{B}{A}$

2) $X = B \cdot A^{-1}$

3) $X = A^{-1} \cdot B$

4) $X = A \cdot B^{-1}$