

# Тема 2. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭМВ В СВОБОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО

## Лекция №4 (4). Электродинамические потенциалы ЭМП

1. Возбуждение ЭМП заданными источниками. Неоднородные уравнения Максвелла в комплексной форме.
2. Векторный и скалярный потенциалы для мгновенных значений поля.
3. Векторный и скалярный потенциалы для комплексных амплитуд. Уравнения Гельмгольца относительно векторных потенциалов.
4. Решение неоднородных уравнений Гельмгольца. Теорема запаздывающих потенциалов.

# 1 Волновые уравнения произвольной электромагнитной системы источников. Уравнения Гельмгольца

*Физическая трактовка 1 и 2 уравнений Максвелла* : изменение во времени электрического поля приводит к изменению магнитного поля и наоборот.

*Волновой процесс* – колебательное движение непрерывной среды.

*Решение уравнений Максвелла* – две волновые функции (волны): расходящаяся и сходящаяся волны.

Волнами переносится ЭМ энергия из объема, где действуют переменные сторонние токи, в окружающее этот объем пространство, где этих токов нет.

Процесс распространения в пространстве электромагнитных волн с конечной скоростью и утративших связь со своими источниками (переменными зарядами и токами), называется *излучением электромагнитных волн*.

*Решение задачи об излучении заключается* в определении в любой точке пространства структуры ЭМП, возбуждаемого сторонними токами.

*С математической точки зрения* задачи о возбуждении ЭМВ заданными источниками сводятся к решению системы неоднородных уравнений Максвелла:

*Для произвольных сигналов*

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}^{\text{э.ст.}}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{j}^{\text{м.ст.}}$$

$$\varepsilon_a \operatorname{div} \vec{E} = \rho^{\text{э.ст.}}$$

$$\mu_a \operatorname{div} \vec{H} = \rho^{\text{м.ст.}}$$

*Для гармонических сигналов*

$$\operatorname{rot} \vec{H} - i\omega \varepsilon_a \vec{E} = \vec{j}^{\text{ст.э}}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + i\omega \mu_a \vec{H} = -\vec{j}^{\text{ст.м}}$$

$$\varepsilon_a \operatorname{div} \vec{E} = \rho^{\text{э.ст.}}$$

$$\mu_a \operatorname{div} \vec{H} = \rho^{\text{м.ст.}}$$

Для получения единственного решения системы должны быть дополнены 1) граничными условиями; 2) условиями излучения.

## 2 Векторный и скалярный потенциалы для мгновенных значений поля

Решение неоднородных уравнений является неточным, т.к. сторонние источники известны приближенно: данные берутся из опытов или предположений.

Выход из положения – введение *электродинамических потенциалов*: векторного  $(\vec{A}^{\circ}, \vec{A}^M)$  и скалярного  $(u^{\circ}, u^M)$ .

Для каждого типа источника выбирается один вид потенциалов.

Вводятся с помощью 4 уравнения Максвелла и закона непрерывного тока:

$$\mu_a \vec{H} = \text{rot } \vec{A}^{\circ} \quad \text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}^{\circ}}{\partial t} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = -\text{grad } u^{\circ} - \frac{\partial \vec{A}^{\circ}}{\partial t}$$

Знак «минус» перед  $\text{grad } u^{\circ}$  введен для совпадения в случае электростатического поля функция с обычным выражением для электростатического потенциала.

Подстановка выражений для потенциалов в 1 уравнение Максвелла и учет материальных уравнений позволяет записать:

$$(\mu_0 \mu)^{-1} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}^{\vartheta} = \vec{j}^{\vartheta cm} - \varepsilon_0 \varepsilon \left( \operatorname{grad} \frac{\partial u^{\vartheta}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}^{\vartheta}}{\partial t^2} \right) - \sigma \frac{\partial \vec{A}^{\vartheta}}{\partial t} - \sigma \operatorname{grad} u^{\vartheta}$$

Введение потенциалов было произвольным. Для устранения неоднозначности вводится условие калибровки. Классическое условие – *калибровка Лоренца*:

$$\operatorname{div} \vec{A}^{\vartheta} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial u^{\vartheta}}{\partial t} + \sigma u^{\vartheta} = 0$$

С учетом калибровки волновые уравнения принимают вид:

$$\nabla^2 \vec{A}^{\vartheta} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}^{\vartheta}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{A}^{\vartheta}}{\partial t} = -\mu_0 \mu \vec{j}^{\vartheta cm} \qquad \nabla^2 u^{\vartheta} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 u^{\vartheta}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u^{\vartheta}}{\partial t} = -\frac{\rho^{\vartheta cm}}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

***Достоинство: в правые части входят сторонние источники тока, а не их производные.***

Введение электродинамических потенциалов электрического типа:

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \operatorname{rot} \vec{A}^M \quad \vec{H} = -\operatorname{grad} u^M - \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{A}^M}{\partial t} - \sigma \vec{A}^M$$

Условие калибровки:  $\operatorname{div} \vec{A}^M + \mu_0 \mu \frac{\partial u^M}{\partial t} = 0$

Получаемые волновые уравнения:

$$\nabla^2 \vec{A}^M - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{A}^M}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{A}^M}{\partial t} = -\vec{j}^M \quad \nabla^2 u^M - \frac{\partial^2 u^M}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial u^M}{\partial t} = \frac{\rho^M}{\mu_0 \mu}$$

# 3 Векторный и скалярный потенциалы для комплексных амплитуд. Уравнения Гельмгольца относительно векторных потенциалов

Введение потенциалов для гармонических сигналов

*Электрического типа*

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0 \mu} \text{rot } \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r})$$
$$\vec{E}_m(\vec{r}) = -\text{grad } u_m^{\text{э}}(\vec{r}) - i\omega \mu_0 \mu \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r})$$

*Магнитного типа*

$$\vec{E}_m(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \text{rot } \vec{A}_m^{\text{м}}(\vec{r})$$
$$\vec{H}_m(\vec{r}) = -\text{grad } u_m^{\text{м}}(\vec{r}) - \tilde{\varepsilon}_a \vec{A}_m^{\text{м}}(\vec{r})$$

*Волновые уравнения (неоднородные уравнения Гельмгольца):*

$$\nabla^2 \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) + \gamma^2 \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) = -\vec{j}_m^{\text{э.ст}}$$
$$\nabla^2 u_m^{\text{э}}(\vec{r}) + \gamma^2 u_m^{\text{э}}(\vec{r}) = -\frac{\rho_m^{\text{э.ст}}}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{A}_m^{\text{м}}(\vec{r}) + \gamma^2 \vec{A}_m^{\text{м}}(\vec{r}) = -\vec{j}_m^{\text{м.ст}}$$
$$\nabla^2 u_m^{\text{м}}(\vec{r}) + \gamma^2 u_m^{\text{м}}(\vec{r}) = -\frac{\rho_m^{\text{м.ст}}}{\mu_0 \mu}$$

$\gamma = ik = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \tilde{\mu}_a} = k_\alpha - ik_\beta$  - коэффициент распространения;

$k_\alpha$  - коэффициент затухания;

$k_\beta$  - коэффициент фазы.

**Уравнения связи:**

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -i\omega\mu_a \vec{A}^\vartheta + \frac{1}{i\omega\tilde{\varepsilon}_a} \text{grad div } \vec{A}^\vartheta - \text{rot } \vec{A}^M \\ \vec{H} &= \text{rot } \vec{A}^\vartheta - i\omega\tilde{\varepsilon}_a \vec{A}^M + \frac{1}{i\omega\mu_a} \text{grad div } \vec{A}^M\end{aligned}$$

$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_0\varepsilon - i\sigma^\vartheta / \omega$  - комплексная диэлектрическая проницаемость  
(для реальных сред с потерями)

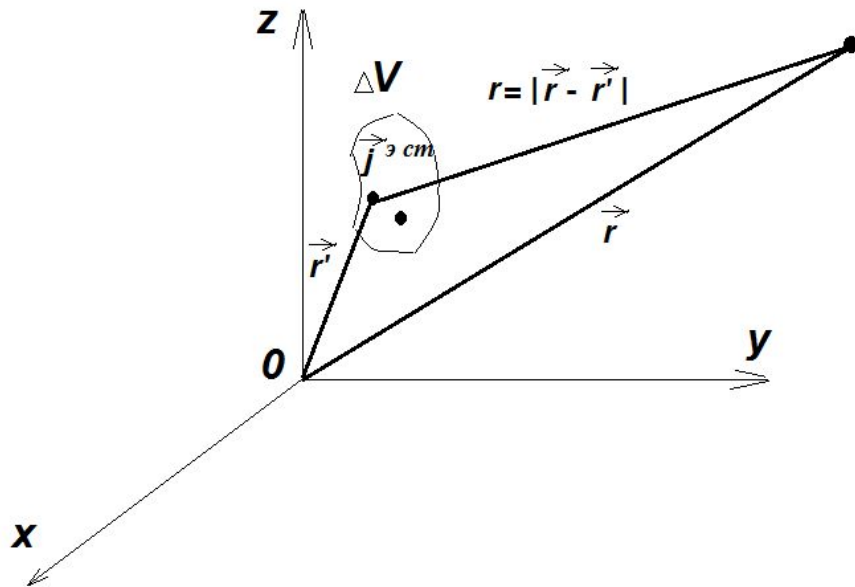
**Достоинство:** 1) в правые части входят сторонние источники тока, а не их производные;

2) число неизвестных сокращается с 6 до 4.



# 4 Решение неоднородных уравнений Гельмгольца. Теорема запаздывающих потенциалов

Решение рассмотрим на примере источников электрического типа – потенциалы электрические.



Допущения: 1) среда изотропная;  
2) волновое число определяется выражением

$$\tilde{k} = k_\beta - ik_\alpha$$

Вид волновых уравнений:

$$\nabla^2 \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) - \tilde{k}^2 \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) = -\vec{J}^{\text{э.ст}}$$

$$\nabla^2 u_m^{\text{э}}(\vec{r}) - \tilde{k}^2 u_m^{\text{э}}(\vec{r}) = -\frac{\rho^{\text{э.ст}}}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

Рисунок 1 – Геометрия задачи

## Последовательность решения:

1. Предположим, что
  - сторонний электрический ток занимает весьма малую область  $\Delta V \rightarrow 0$  вблизи начала координат;
  - остальное пространство удовлетворяет однородным волновым уравнениям;
  - решение симметрично в сферической системе координат (не зависит от углов  $\theta, \phi$ ).
2. С учетом предположений решение имеет вид:  $u_m^{\text{э}}(\vec{r}) = \frac{B}{r} \exp(-i\tilde{k}r)$
3. Нахождение коэффициента  $B$ , описывающего интенсивность источника. 1) Понижаем частоту излучения ( $\tilde{k} = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} \rightarrow 0$ ). В пределе получаем поле электростатического заряда:

$$B = \frac{\rho_m^{\text{э.ст}} \Delta V}{4\pi\varepsilon_a}$$

- 2) Возвращаемся к произвольной частоте и произвольному объему:

$$u_m^{\text{э}}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho_m^{\text{э.ст}} \exp(-i\tilde{k}r)}{4\pi\varepsilon_a r} dv$$

**Последовательность решения:**

4. Представляем векторное уравнение тремя скалярными проекциями и используем замены типа:

$$\frac{\rho_m^{\text{э.ст}}}{\tilde{\epsilon}_a} \rightarrow \tilde{\mu}_a \vec{J}_{m,x,y,z}^{\text{э.ст}} \quad u_m^{\text{э}} \rightarrow A_{m,x,y,z}^{\text{э}}$$

5. Решение после преобразований принимает вид **интеграла Кирхгофа для запаздывающих потенциалов**:

$$\vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_V \vec{j}_m^{\text{э.ст}}(\vec{r}') \frac{\exp(-ikr)}{r} dv$$

Векторный **потенциал** называется **запаздывающим**.

Экспоненциальный множитель соответствует конечной скорости распространения волны до источника со скоростью  $v = \omega / \beta$ .

**Время запаздывания воздействия**

$$t_3 = \frac{r}{v} = \frac{k_\beta r}{\omega}$$

### ***Теорема запаздывающих потенциалов:***

Векторный потенциал в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$  в момент времени  $t$  является функцией токов в точке расположения источников, существовавших в более ранний момент времени.

Токи и заряды меняются по гармоническому закону. В связи с этим экспоненциальный множитель в среде без потерь имеет вид:

$$\exp[i\omega(t - r/v)] = \exp(i\omega t) \exp(-i\omega r/v) = \exp(i\omega t) \exp(-ik_{\beta} r)$$

Вывод: применительно к гармоническим процессам запаздывание

на время  $t_3 = \frac{r}{v} = \frac{k_{\beta} r}{\omega}$  учитывается множителем  $\exp(-ik_{\beta} r)$  и

означает сдвиг по фазе на величину  $\omega r/v$ .