# Неопределенный интеграл

***Методы интегрирования***

Лекция2

# Метод подстановки
## или метод замены переменной

- Метод основан на использовании формулы

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

- При проведении замены переменной в интеграле
- $\int f(x)dx$ необходимо:

1) выбрать подстановку $\phi(x) = t$ или замену $x = \varphi(t)$

2) преобразовать подынтегральную функцию $f(x)$ с учетом выбранной подстановки или замены переменной

3) Найти $dx = \varphi(t)dt$

4) подставить все в исходный интеграл и найти его

5) вернуться в ответе к старой переменной $x$ .

# Примеры

1) $\int x^2 \cdot \sqrt{x+7}\,dx$

2) $\int \frac{1}{6x-1}\,dx$

3) $\int \frac{xdx}{3+x^2}$

4) $\int \frac{xdx}{3+x^4}$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x}}$

6) $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x - 4}\,dx$

# Интегрирование по частям

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда

$$d(U(x)V(x)) = U(x)dV(x) + V(x)dU(x).$$

Поэтому $U(x)dV(x) \quad = d(U(x)V(x)) - V(x)dU(x).$

Вычисляя интеграл от обеих частей, с учетом того, что

$\int d(U(x)V(x)) = U(x)V(x) + C$ , получаем

$$\int U(x)dV(x) = UV - \int V(x)dU(x)$$

называемое формулой интегрирования по частям

# Только по частям берутся интегралы следующих типов

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Тип I** | $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$ | $\int P_n(x)a^{\alpha x}dx$ | |
| | $\int P_n(x)\cos\beta x dx$ | $\int P_n(x)\sin\beta x dx$ | |
| **Тип II** | $\int \ln x dx$ | $\int Q_r(x)\ln^n x dx$ | $\int \arcsin x dx$ |
| | $\int arctgx dx$ | $\int Q_r(x)\arcsin x dx$ | $\int Q_r(x) arctgx dx$ |
| **Тип II I** | $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$ | $\int e^{\alpha x} xin\beta x dx$ | |

Здесь $P_n(x)$ - многочлен целой степени относительно х Для интегралов I-ой группы.

- Схема интегрирования по частям предполагает предварительное разбиение подынтегрального выражения на произведение двух сомножителей $U$ и $dV$. При этом основным критерием правильности разбиения служит то, что интеграл в правой части схемы $\int VdU$ должен быть проще или, по крайней мере, не сложнее исходного интеграла $\int UdV$ .
- Применяя метод, интегрирования по частям, следует руководствоваться следующим правилом:
- 1.*Если в подынтегральное выражение входит произведение многочлена на показательную или тригонометрическую функцию, то в качестве функции $U$ берется многочлен (**интегралы I типа**)* .
- *2. За $U$ всегда берутся логарифмическая и обратная тригонометрическая функции (**интегралы II типа**).*

# Примеры

***Пример.*** Вычислить $\int x\cos x dx$ .

**Решение.**

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C\ .$$

# Примеры

**Пример**. Вычислить

$$\int x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x, du=\dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx, v=\dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C\,.$$

# Примеры

- Найти интегралы:
- 1. $\int x\sin 5x dx$ 2. $\int \ln(x+1)dx$ 3. $\int \ln(x^2+4)dx$
- 4. $\int \operatorname{arctg} 2x dx$ 5. $\int x\operatorname{tg}^2 2x dx$ 6. $\int (x^2+1)\ln x dx$
- 7. $\int \operatorname{arcctg} 5x dx$ 8. $\int xe^{2x}dx$ 9. $\int x^3 e^{x^2} dx$
- 10. $\int e^{2x}\cos 3x\, dx$ 11. $\int e^{5x}\cos 2x\, dx$