Элементы теории алгоритмов

§ 34. Уточнение понятия алгоритма

Зачем уточнять определение?

Алгоритм – точный набор инструкций для исполнителя, который приводит к решению задачи за конечное время.

аль-Хорезми: для любой математической задачи можно найти алгоритм решения, но для некоторых задач такие алгоритмы еще не найдены.

К. Гёдель (1931): в любой арифметике (натуральные числа, сложение, умножение) есть утверждение, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть (**теорема о неполноте**).

? Всегда ли существует алгоритм?

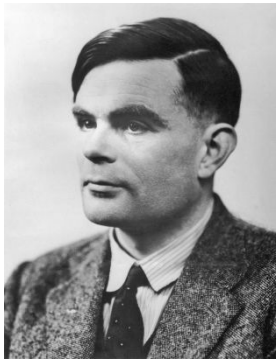
? Что такое алгоритм?

Зачем уточнять определение?

Задача: алгоритм как математический объект.

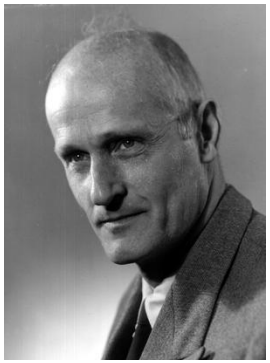
Теория алгоритмов (1930-е):

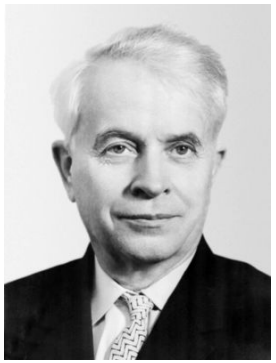
- доказательство алгоритмической неразрешимости задач
- анализ сложности алгоритмов
- сравнительная оценка качества алгоритмов


А. Тьюринг


Э. Пост


А. Чёрч


С. Клини


А. Марков

Что такое алгоритм?

Первые алгоритмы – правила арифметических действий:

- объекты – числа
- шаги – операции с однозначными числами

Что считать шагом?

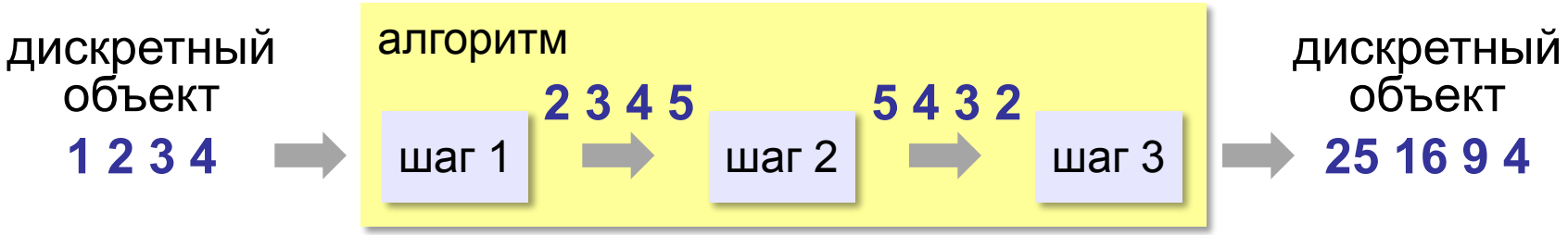
Все объекты можно закодировать как символьные строки:

Можно рассматривать только алгоритмы обработки **строк**!

Из любого кода можно перевести в двоичный:

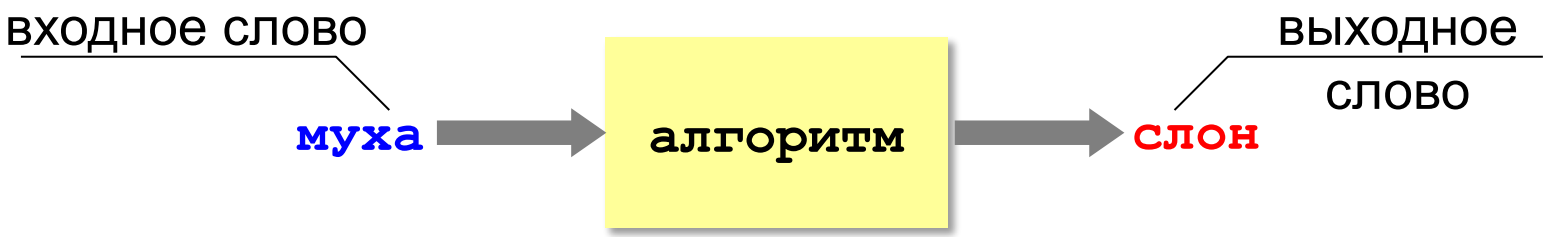
Можно рассматривать только алгоритмы обработки **битовых** строк!

Как работает алгоритм?



- получает на вход дискретный объект
- в результате строит другой дискретный объект (или выдаёт сообщение об ошибке)
- обрабатывает объект по шагам
- на каждом шаге получается новый дискретный объект

Как работает алгоритм?



! Любой алгоритм определяет функцию!

т.е. правило преобразования входа в выход

Функция не определена ⇔ алгоритм зацикливается или завершается аварийно.

```
ввод a, b
вывод a*sqrt(b)
```

→ ✗ `b < 0`

```
ввод a
нц пока да
кц
```

→ ✗ для всех `a`

Эквивалентные алгоритмы

Задают одну и ту же функцию:

```
если a < b то
  M:= a
иначе
  M:= b
все
```

```
M:= b
если a < b то
  M:= a
все
```

Универсальные исполнители

Алгоритм привязан к исполнителю ⇒ идея: построить универсального исполнителя.

Для любого алгоритма для любого исполнителя можно построить эквивалентный алгоритм для **универсального исполнителя**.

- если есть алгоритм для универсального исполнителя, то задача разрешима
- если доказано, что нет алгоритма для универсального исполнителя, задача неразрешима

Любой алгоритм может быть представлен как программа для универсального исполнителя!

Универсальные исполнители

Алгоритм – это программа для универсального исполнителя.

Модель вычислений:

- «*процессор*» (система команд и способ их выполнения)
- «*память*» (способ хранения данных)
- *язык программирования* (способ записи программ);
- *способ ввода* данных
- *способ вывода* результата

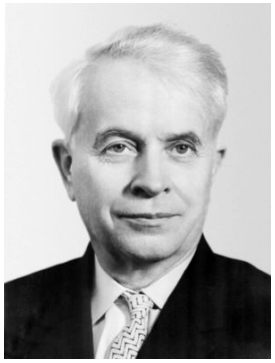
Универсальные исполнители

А. Тьюринг

машина Тьюринга

Э. Пост

машина Поста

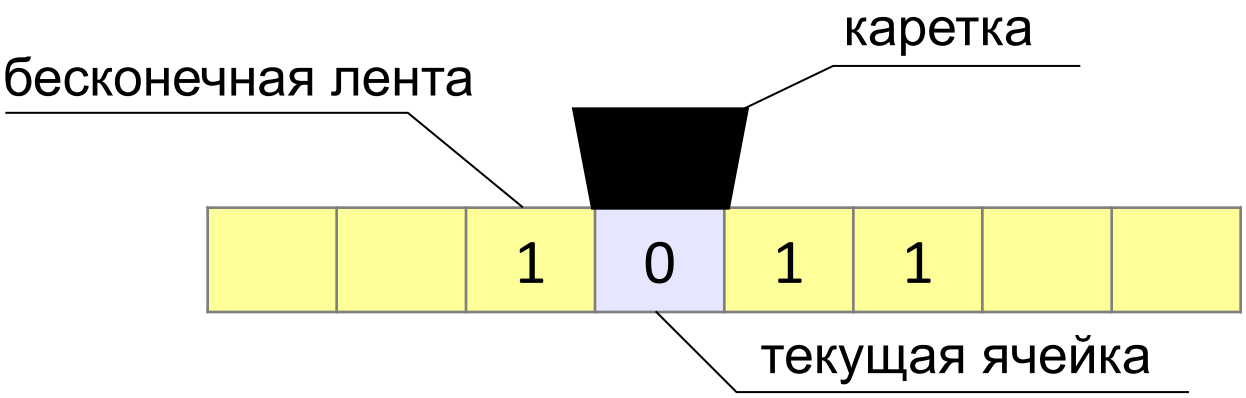


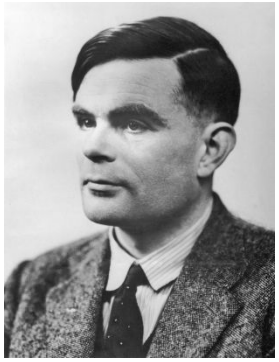
А. Марков

нормальные алгорифмы Маркова

Все универсальные исполнители эквивалентны!

Машина Тьюринга





А. Тьюринг

- бесконечная лента («память»)
- каретка (запись и чтение)
- программируемый автомат («процессор»)

алфавит: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ $A = \{0, 1, \square\}$

пробел

Что такое автомат?

Автомат – это устройство, работающее без участия человека.

Состояние – промежуточная задача, которую решает автомат.

$Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_M\}$

начальное состояние

q_0 – остановка автомата

Программа для машины Тьюринга

Программа состоит из команд:

- записать символ a_i в текущую ячейку
- переместить каретку $\rightarrow$ $\leftarrow$ • (не перемещать)
- перейти в состояние q_j

$A = \{0, 1, \square\}$

$1 \rightarrow q_1$

- записать 1
- переместиться вправо
- перейти в состояние q_1

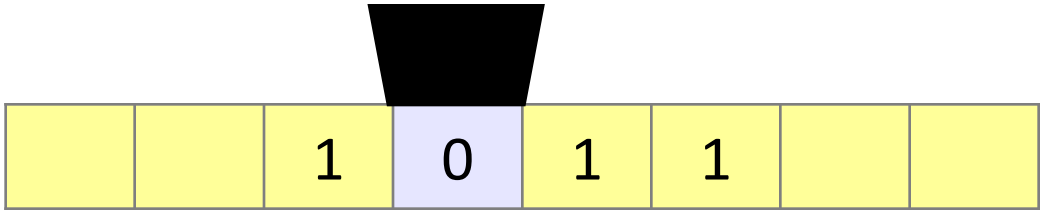
$0 \bullet q_0$

- записать 0
- не перемещать каретку
- останов (q_0)

Программа для машины Тьюринга

Задача. На ленте записано число в двоичной системе счисления. Каретка находится где-то над числом. Требуется увеличить число на единицу.

алфавит: $A = \{0, 1, \square\}$



состояния: q_1 – поиск правого конца слова

подзадачи

q_2 – увеличение числа на 1

Программа для машины Тьюринга

q_1 : поиск конца слова

- если 0, то →
- если 1, то →
- если □, то ← и **переход в q_2**

q_2 : увеличение числа на 1

- если 0, то записать 1 и стоп (q_0)
- если 1, то записать 0 и ←
- если □, то записать 1 и стоп (q_0)

только изменения!

	q_1
0	→
1	→
□	← q_2

	q_2
0	1 • q_0
1	0 ←
□	1 • q_0

? Как объединить две программы?

Программа для машины Тьюринга

	q_1
0	→
1	→
□	← q_2

	q_2
0	
1	
□	1 • q_0

Связь подзадач через ячейку (□, q_1)!

Если алгоритмы А и Б можно запрограммировать на машине Тьюринга, то и любую их комбинацию тоже можно запрограммировать.

Тезис Чёрча-Тьюринга: Любой алгоритм (в интуитивном смысле этого слова) может быть представлен как программа для машины Тьюринга.

Программа для машины Тьюринга

начальное состояние | новая метка | переход | новое состояние

$(0, q_1, 0, \rightarrow, q_1)$
$(1, q_1, 1, \rightarrow, q_1)$
$(\square, q_1, \square, \leftarrow, q_2)$

$(0, q_2, 1, \bullet, q_0)$
$(1, q_2, 0, \leftarrow, q_2)$
$(\square, q_2, 1, \bullet, q_0)$

	q_1
0	$0 \rightarrow q_1$
1	
□	

	q_2
0	$1 \bullet q_0$
1	$0 \leftarrow q_2$
□	$1 \bullet q_0$

Программы для машины Тьюринга

	q_1
0	$\leftarrow$
1	$\leftarrow$
□	$\rightarrow q_0$

	q_1
0	$\rightarrow q_0$
1	$\rightarrow q_0$
□	$\leftarrow$

	q_1	q_2
0	q_2	□ $\leftarrow$
1	q_2	□ $\leftarrow$
□	$\leftarrow$	q_0

? Что делает программа?

? Когда зацикливается?

Программы для машины Тьюринга

Задача 1. Уменьшить двоичное число на 1.

Задача 2. Увеличить на единицу число, записанное в десятичной системе счисления.

Задача 3. Уменьшить на единицу число, записанное в десятичной системе счисления.

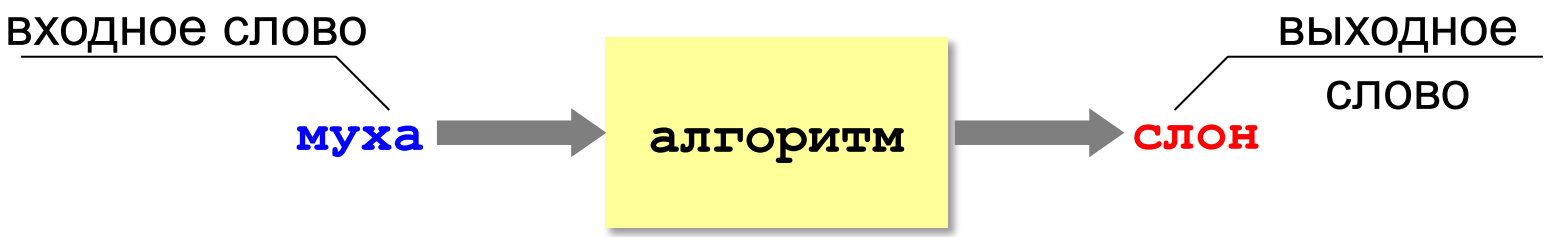
Задача 4. Сложить два числа в двоичной системе, разделенные на ленте знаком «+».

Задача 5. Сложить два числа в десятичной системе, разделенные на ленте знаком «+».

Элементы теории алгоритмов

§ 35. Алгоритмически неразрешимые задачи

Вычислимые функции



Любой алгоритм определяет функцию!

т.е. правило преобразования входа в выход

Вычислимая функция – это функция, для вычисления которой существует алгоритм.

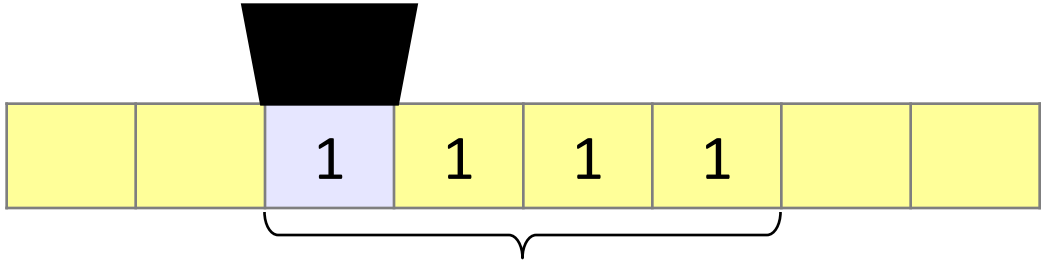
может задаваться разными алгоритмами:

```
а → 0
б → 1
```

```
б → 1
а → 0
```

Вычислимые функции

$$f(n) = \begin{cases} 1, \text{ если } n \text{ – чётное} \\ 0, \text{ если } n \text{ – нечётное} \end{cases}$$



в унарной системе счисления

	q_1	q_2	q_3	q_4
1	$\rightarrow q_2$	$\rightarrow q_1$	$\leftarrow q_4$	□ $\leftarrow$
□	$\leftarrow q_3$	$\leftarrow q_4$		q_0

? Почему пусто?

q_1 – чётное число единиц

q_2 – нечётное число единиц

q_3 – оставить 1 единицу

q_4 – стереть все единицы

Вычислимые функции

$$f(n)=\begin{cases}1, & \text{если } n \text{ – чётное}\\ 0, & \text{если } n \text{ – чётное}\end{cases}$$

```
11 → ""
1 → .
→ 1.
```

? Как написать НАМ?

Невычислимая функция (*В.А. Успенский*):

$$h(n)=\begin{cases}1, & \text{если в записи числа } \pi \text{ есть } n \text{ стоящих подряд девяток в окружении других цифр}\\ 0, & \text{если такой цепочки нет}\end{cases}$$

перебор 800 знаков:

$h(n)=1$ для $n=1, 2, 6$.

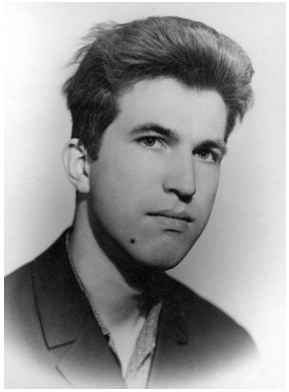
! Если $h(n)=0$, перебор не остановится!

Алгоритмически неразрешимые задачи

Алгоритмически неразрешимая задача – это задача, соответствующая невычислимой функции.

⇒ общего решения задачи нет, его бесполезно искать!

10-я проблема Гильберта (1900): найти метод, который позволяет определить, имеет ли заданное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами решение в целых числах.



Ю.В. Матиясевич

$$x^2 + y^3 + 2 = 0 \qquad \Rightarrow (5;-3) \text{ и } (-5;-3)$$

! 1970: общего алгоритма **нет**!

Алгоритмически неразрешимые задачи

Г.В. Лейбниц, XVII в.: разработать алгоритм, позволяющий установить, можно ли вывести формулу Б из формулы А в рамках заданной системы аксиом («***проблема распознавания выводимости***»).

1936: в общем виде задача **неразрешима**!

удалось получить отрицательные результаты

А. Чёрч

Алгоритмически неразрешимые задачи

Проблема останова: по тексту любой программы P и ее входным данным X определяет, завершается ли программа P при входе X за конечное число шагов или зацикливается.

Проблема эквивалентности: по двум заданным алгоритмам определить, будут ли они выдавать одинаковые результаты для любых допустимых исходных данных.

Невозможно полностью автоматизировать отладку программ!