Интерпретации формул алгебры предикатов

Область интерпретации – непустое множество M, которое является областью возможных значений всех предметных переменных.

n-местным предикатным символам P присваиваются конкретные значения P_M n-местных предикатов на множестве M.

Соответствие β: $P \to P_M$ называется *интерпретацией предикатных символов*.

Область интерпретации M вместе с интерпретацией предикатных символов β называется *интерпретацией формул алгебры предикатов* и обозначается (M, β) или просто M.

При наличии интерпретации M конкретные значения предметным переменным формул алгебры предикатов присваиваются с помощью отображения α множества всех предметных переменных X в область интерпретации M.

Такие отображения называются *оценками* предметных переменных.

Выполнимость формулы Φ в интерпретации M при оценке α обозначается $M \models_\alpha \Phi$ и определяется следующим образом:

1) если $\Phi = P(x_1,\ldots,x_n)$ для *n*-местного предикатного символа P и предметных переменных $x_1,\ldots,x_n$, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда высказывание $P_M(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_n))$ истинно;

2) если $\Phi = \neg\Psi$ для формулы Ψ, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда неверно, что $M \models_\alpha \Psi$;

3) если $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$ для формул Φ_1, Φ_2, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_\alpha \Phi_1$ и $M \models_\alpha \Phi_2$;

4) если $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$ для формул Φ_1, Φ_2, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_\alpha \Phi_1$ или $M \models_\alpha \Phi_2$;

5) если $\Phi = \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$ для формул Φ_1, Φ_2, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда неверно, что $M \models_\alpha \Phi_1$ и $M \models_\alpha \neg\Phi_2$;

6) если $\Phi = \Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2$ для формул Φ_1, Φ_2, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_\alpha \Phi_1$, $M \models_\alpha \Phi_2$ одновременно верны или нет;

7) если $\Phi = (\forall x)\Psi$ для некоторой формулы Ψ, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_{\alpha'} \Psi$ для всех оценок α', отличающихся от оценки α возможно только на элементе x;

8) если $\Phi = (\exists x)\Psi$ для некоторой формулы Ψ, то $M \models_\alpha \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_{\alpha'} \Psi$ для некоторой оценки α', отличающейся от оценки α возможно только на элементе x.

Классификация формул алгебры предикатов

Определение. В интерпретации M формула Φ называется:

– *общезначимой* (или *тождественно истинной*), если $M \models_\alpha \Phi$ при любых оценках α;

– *выполнимой*, если $M \models_\alpha \Phi$ для некоторой оценки α;

– *опровержимой*, если для некоторой оценки α неверно, что $M \models_\alpha \Phi$;

– *тождественно ложной*, если для любой оценки α неверно, что $M \models_\alpha \Phi$.

Формула Φ общезначима в интерпретации M, если при подстановке в нее вместо n-арных предикатных символов P их интерпретаций P_M она превращается в тождественно истинный на множестве M предикат. Символическая запись $M \models \Phi$.

Формула Φ в интерпретации M выполнима, опровержима или тождественно ложна, если при подстановке в нее вместо n-арных предикатных символов P их интерпретаций она превращается соответственно в выполнимый, опровержимый или тождественно ложный на множестве M предикат P_M.

<u>Определение</u>. Формула Ф называется *тождественно истинной*, если она тождественно истина в любой интерпретации *M*. Такая формула называется также *общезначимой формулой*, или *тавтологией алгебры предикатов* и обозначается $\models \Phi$. Множество всех тавтологий алгебры предикатов обозначим $\boldsymbol{T}_{\text{АП}}$.

<u>Определение</u>. Формула Ф называется *тождественно ложной* или *противоречием*, если она тождественно ложна в любой интерпретации *M*.

По определению противоречивость формулы Ф равносильна условию $\models \neg\Phi$.

<u>Определение</u>. Формула Ф называется *выполнимой*, если она выполнима хотя бы в одной интерпретации *M*, которая называется *моделью* этой формулы.

Таким образом, формула Φ :

– *общезначимая* (или *тождественно истинная*, *тавтология*), если $M \models_{\alpha} \Phi$ в любой интерпретации M при любых оценках α; запись $\models \Phi$;

– *выполнимая*, если $M \models_{\alpha} \Phi$ в некоторой интерпретации M для некоторой оценки α;

– *опровержимая*, если в некоторой интерпретации M для некоторой оценки α неверно, что $M \models_{\alpha} \Phi$;

– *тождественно ложная*, если в любой интерпретации M для любой оценки α неверно, что $M \models_{\alpha} \Phi$.

Замечание 1.

Если формула Ф является предложением, то она не содержит свободных вхождений переменных и, следовательно, не зависит от оценок α предметных переменных в области интерпретации M.

Значит, предложение Ф в интерпретации M общезначимо в том и только том случае, если оно выполнимо (т.е. выполняется хотя бы при одной оценке α предметных переменных в области интерпретации M).

Тавтологии алгебры предикатов

Любая тавтология алгебры высказываний является тавтологией алгебры предикатов. Более того, тавтологии алгебры высказываний дают возможность легко получать тавтологии алгебры предикатов с помощью следующего очевидного результата.

Лемма 1. Если $\Phi(X_1,\ldots,X_n)$ – тавтология алгебры высказываний, то для любых формул алгебры предикатов $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ формула $\Phi(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$ является тавтологией алгебры предикатов.

С другой стороны, в алгебре предикатов можно получить много принципиально новых тавтологий с помощью следующих свойств кванторов.

Лемма 2. Для любых формул Φ, Ψ следующие формулы являются тавтологиями:

1. $\neg(\forall x)\Phi \Leftrightarrow (\exists x)\neg\Phi$, $\neg(\exists x)\Phi \Leftrightarrow (\forall x)\neg\Phi$,

$$(\forall x)\Phi \Leftrightarrow \neg(\exists x)\neg\Phi, \ (\exists x)\Phi \Leftrightarrow \neg(\forall x)\neg\Phi;$$

2. $(\forall x)(\forall y)\Phi \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\Phi$, $(\exists x)(\forall y)\Phi \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\Phi$;

3. $(\forall x)(\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow (\forall x)\Phi \wedge (\forall x)\Psi$,

$$(\exists x)(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow (\exists x)\Phi \vee (\exists x)\Psi;$$

4. $(\forall x)(\Phi\ \pi\ \Psi) \Leftrightarrow (\forall x)\Phi\ \pi\ \Psi$, где π – символ одной из операций $\wedge, \vee$;

5. $(\exists x)(\Phi\ \pi\ \Psi) \Leftrightarrow (\exists x)\Phi\ \pi\ \Psi$, где π – символ одной из операций $\wedge, \vee$,

если в формулу Ψ предметная переменная x не входит свободно; а также

6. $(\forall x)(\Phi \Rightarrow \Psi) \Leftrightarrow ((\exists x)\Phi \Rightarrow \Psi)$,

$$(\exists x)(\Phi \Rightarrow \Psi) \Leftrightarrow ((\forall x)\Phi \Rightarrow \Psi),$$

7. $(\forall x)(\Psi \Rightarrow \Phi) \Leftrightarrow (\Psi \Rightarrow (\forall x)\Phi)$,

$$(\exists x)(\Psi \Rightarrow \Phi) \Leftrightarrow (\Psi \Rightarrow (\exists x)\Phi).$$

Логическая равносильность формул алгебры предикатов

Определение. Формулы алгебры предикатов Φ, Ψ называется *логически равносильными*, если результат применения к ним логической операции эквивалентность $\Phi \Leftrightarrow \Psi$ является тавтологией.

В этом случае записывают $\Phi \equiv \Psi$, или просто $\Phi = \Psi$.

Таким образом, $\Phi = \Psi$ означает, что $\models \Phi \Leftrightarrow \Psi$.

Теорема 1 (Взаимосвязь между кванторами).

Для любой формулы Φ справедливо равенство:

$$(\forall x)(\forall y)\Phi = (\forall y)(\forall x)\Phi\,, \quad (\exists x)(\exists y)\Phi = (\exists y)(\exists x)\Phi\,.$$

С другой стороны, если в формулу Φ предметные переменные x, y входят свободно, то равенство

$$(\forall y)(\exists x)\Phi = (\exists x)(\forall y)\Phi$$

не выполняется, так как в этом случае формула

$$(\forall y)(\exists x)\Phi \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\Phi$$

не является тавтологией.

Теорема 2. Пусть формула $\Phi(x)$ не содержит предметную переменную y и формула $\Phi(y)$ получается из $\Phi(x)$ заменой всех свободных вхождений переменной x на предметную переменную y.

Тогда формулы $(\forall x)\Phi(x)$ и $(\exists x)\Phi(x)$ будут логически равносильны соответственно формулам $(\forall y)\Phi(y)$ и $(\exists y)\Phi(y)$, т.е. выполняются равенства:

$$(\forall x)\Phi(x) = (\forall y)\Phi(y) \quad \text{и} \quad (\exists x)\Phi(x) = (\exists y)\Phi(y).$$

Теорема 3 (Законы де Моргана для кванторов). Для любой формулы Φ справедливы следующие утверждения:

$$\neg(\forall x)\Phi = (\exists x)\neg\Phi, \quad \neg(\exists x)\Phi = (\forall x)\neg\Phi,$$

$$(\forall x)\Phi = \neg(\exists x)\neg\Phi, \quad (\exists x)\Phi = \neg(\forall x)\neg\Phi.$$

Теорема 4 (Взаимосвязь кванторов с конъюнкцией и дизъюнкцией). Для любых формул Φ, Ψ справедливы следующие утверждения:

$$(\forall x)(\Phi \wedge \Psi) = (\forall x)\Phi \wedge (\forall x)\Psi,$$

$$(\exists x)(\Phi \vee \Psi) = (\exists x)\Phi \vee (\exists x)\Psi.$$

Если в формулу Ψ предметная переменная x не входит свободно, то справедливы также утверждения:

$(\forall x)\Phi\ \pi\ \Psi = (\forall x)(\Phi\ \pi\ \Psi)$, $(\exists x)\Phi\ \pi\ \Psi = (\exists x)(\Phi\ \pi\ \Psi)$, где π – символ одной из операций $\wedge, \vee$.

Теорема 6 (Взаимосвязь кванторов с импликацией). Если в формулу Φ предметная переменная x не входит свободно, то для любой формулы Ψ справедливы следующие утверждения:

$$(\forall x)(\Phi \Rightarrow \Psi) = \Phi \Rightarrow (\forall x)\Psi, \quad (\exists x)(\Phi \Rightarrow \Psi) = \Phi \Rightarrow (\exists x)\Psi.$$

Если же предметная переменная x не входит свободно в формулу Ψ, то для любой формулы Φ справедливы утверждения:

$$(\forall x)(\Phi \Rightarrow \Psi) = (\exists x)\Phi \Rightarrow \Psi, \quad (\exists x)(\Phi \Rightarrow \Psi) = (\forall x)\Phi \Rightarrow \Psi.$$

Следствие 7. Любая формула Φ представляется в следующем виде:

$$\Phi = (K_1 x_1)\ldots(K_n x_n)\Psi,$$

где $K_1,\ldots,K_n$ – некоторые кванторы и Ψ – формула без кванторов.

Таким образом, каждая формула Φ логически равносильна формуле $(K_1 x_1)\ldots(K_n x_n)\Psi$, в которой все кванторы стоят в самом начале формулы и которая называется *предваренной нормальной формой* (сокращенно ПНФ) формулы Φ.

Алгоритм приведения формулы Φ к ПНФ:

1) преобразуем формулу Φ в эквивалентную ей формулу Φ', которая не содержит импликации и эквивалентности и в которой отрицание действует только на элементарные формулы;

2) в Φ' все кванторы последовательно выносим вперед по теореме 5, при этом кванторы общности $(\forall x)$ выносятся из конъюнкции и кванторы существования $(\exists x)$ выносятся из дизъюнкции, а для выноса кванторов общности $(\forall x)$ из дизъюнкции и кванторов существования $(\exists x)$ из конъюнкции переименовываем связанные переменные x в новые переменные y, которые не входят в рассматриваемую формулу.