

**Кубанский государственный технологический университет**  
**Институт информационных технологий и безопасности**  
Кафедра компьютерных технологий и информационной  
безопасности

**Учебная дисциплина**

**Электротехника и электроника**

**Лекция № 9**

**Спектральный метод анализа  
электрических цепей**

### Учебные вопросы:

**1. Несинусоидальные колебания в электрических цепях. Методы анализа.**

**2. Спектры типовых сигналов**

### Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В., Страков С.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 234 – 249
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: Учебник для вузов, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 103 – 117.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.
4. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов, Под ред. Самойло К.А.- М.: Высшая школа, 2002 г, с. 41 – 65.

# 1. Несинусоидальные воздействия в электрических цепях. Методы анализа

В основе методов анализа и синтеза электрических цепей, находящихся под воздействием периодических несинусоидальных и непериодических токов и напряжений лежит спектральное представление несинусоидальных воздействий, базирующееся на разложении в ряд или интеграл Фурье.

## 1.1 Периодические воздействия

Из курса математического анализа известно, что всякая периодическая функция  $f(t)$ , удовлетворяющая условиям Дирихле (если функция  $f(t)$  на периоде  $T$  имеет конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, что для реальных электрических сигналов обычно выполняется), то она может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t)] \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(k\omega t) dt$$

**Коэффициенты  
разложения**

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(k\omega t) dt$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Представляет собой среднее за период значение  $f(t)$  (функция  $f(t)$  может иметь смысл как тока, так и напряжения) и называется постоянной составляющей.

Таким образом, ряд Фурье показывает, что любая периодическая функция  $f(t)$  может быть разложена на постоянную составляющую  $a_0/2$  и совокупность гармонических колебаний составляющих гармоник  $A_{mk}$  с кратными частотами:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \cos(k\omega t - \varphi_k),$$

$$A_{mk} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

*Амплитуда  $k$ -й гармоника*

$$a_k = A_{mk} \cdot \cos \varphi_k$$

$$b_k = A_{mk} \cdot \sin \varphi_k$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}$$

*Начальная фаза  $k$ -й гармоника*

В задачах анализа цепей при периодических воздействиях удобно пользоваться **комплексным рядом Фурье**. Такой ряд получится, если временную функцию  $n$ -й гармоника записать, используя формулу Эйлера, в виде суммы показательных функций:

$$\lambda(t) = a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t)$$

Введя обозначения –  
 комплексные амплитуды

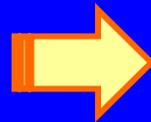
$$\dot{A}_{mk} = A_{mk} \cdot e^{-j\varphi_k}$$

$$\dot{A}_{m-k} = A_{m-k} \cdot e^{j\varphi_k}$$

$$\dot{A}_0 = a_0$$

$$f(t) = \frac{\dot{A}_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_{mk} \cdot e^{jk\omega t} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{-1} \dot{A}_{m-k} \cdot e^{jk\omega t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{mk} \cdot e^{jk\omega t}$$

Коэффициенты  
 комплексного ряда  
 Фурье



$$\dot{A}_{mk} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt$$

$$A_{mk} = A(k\omega)$$

Амплитудный

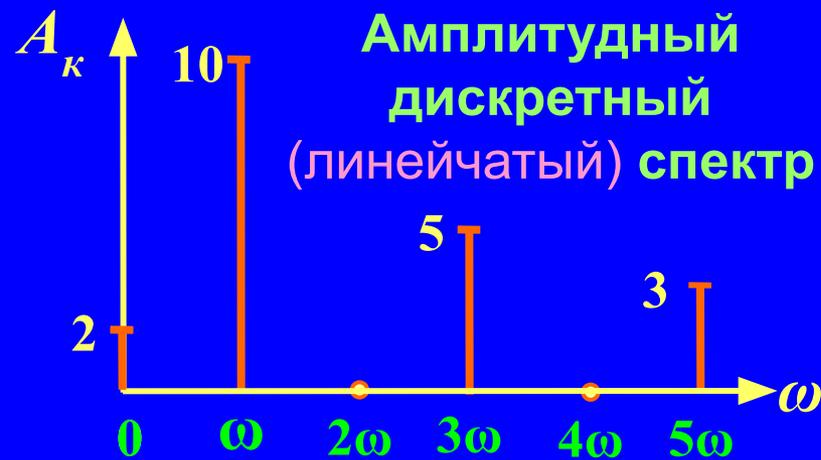
**СПЕКТРЫ**

Фазовый

$$\varphi_k = \varphi(k\omega)$$

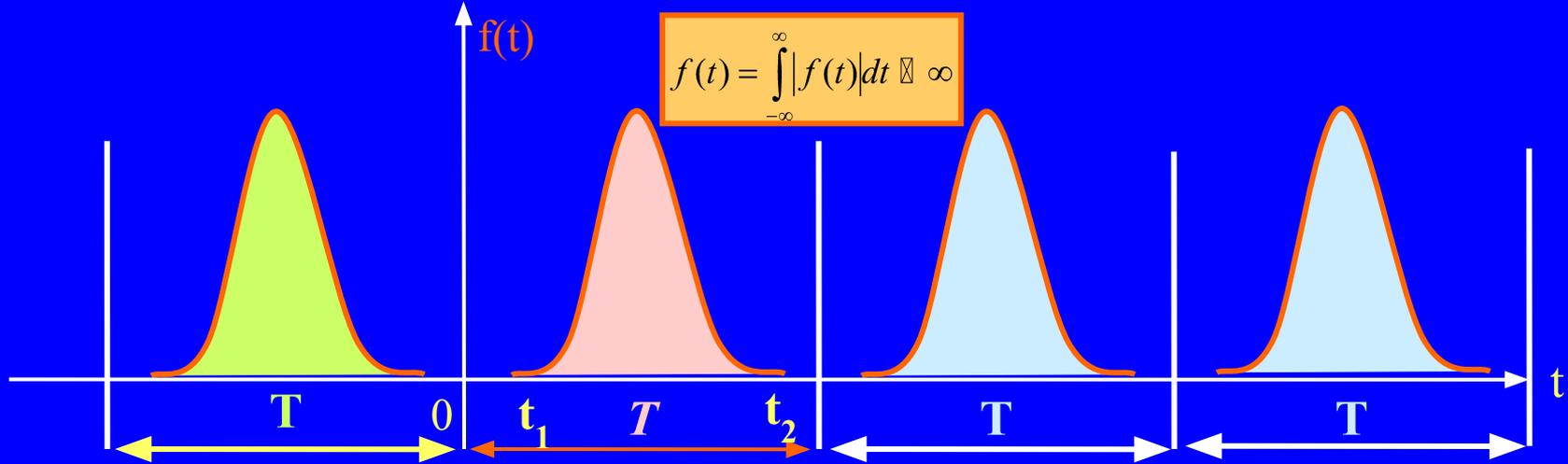


$$u(t) = 2 + 10 \sin(\omega t + 40^\circ) + 5 \sin(3\omega t - 60^\circ) + 3 \sin(5\omega t + 80^\circ)$$



# 1.2 Непериодические воздействия

Для неперидических сигналов используются спектральные представления, базирующиеся на *паре преобразований Фурье*.



$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \cdot \infty$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{mk} \cdot e^{jk\omega_1 t}, \rightarrow \dot{A}_{mk} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt; \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t} \cdot \omega_1 \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt$$

$$\begin{matrix} \omega_1 \rightarrow d\omega \\ k\omega_1 \rightarrow \omega \end{matrix}$$

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_1(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$



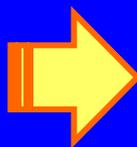
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

# Прямое и обратное преобразования Фурье составляют основу спектрального анализа сигналов

Спектральную плотность можно представить в показательной форме

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| \cdot e^{-j\varphi(\omega)} = F(\omega) \cdot e^{-j\varphi(\omega)}$$

$$F(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$$



Модуль спектральной плотности  
определяет  
**амплитудный спектр сигнала**

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

Аргумент  
спектральной  
плотности определяет  
фазовый спектр

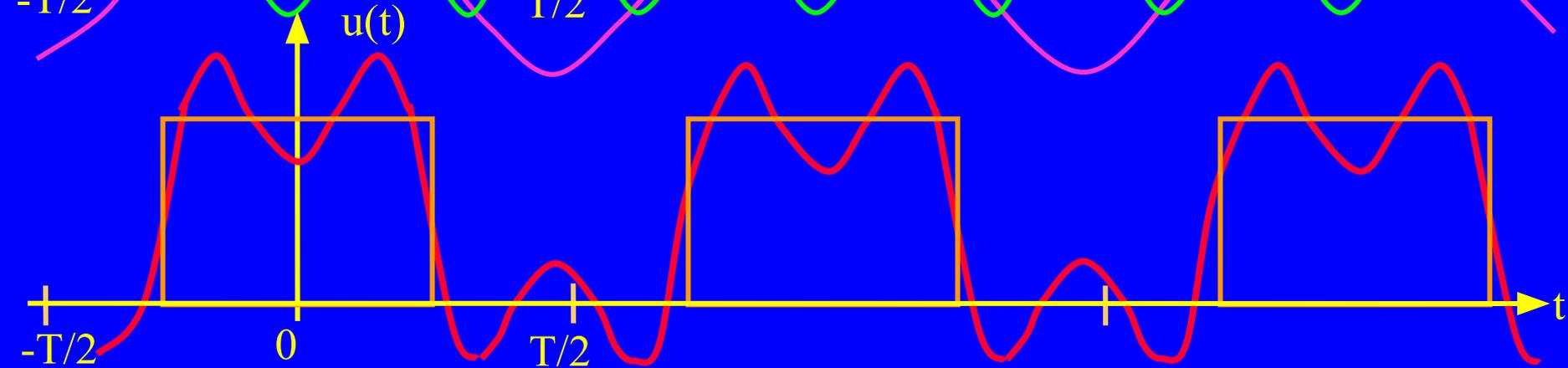
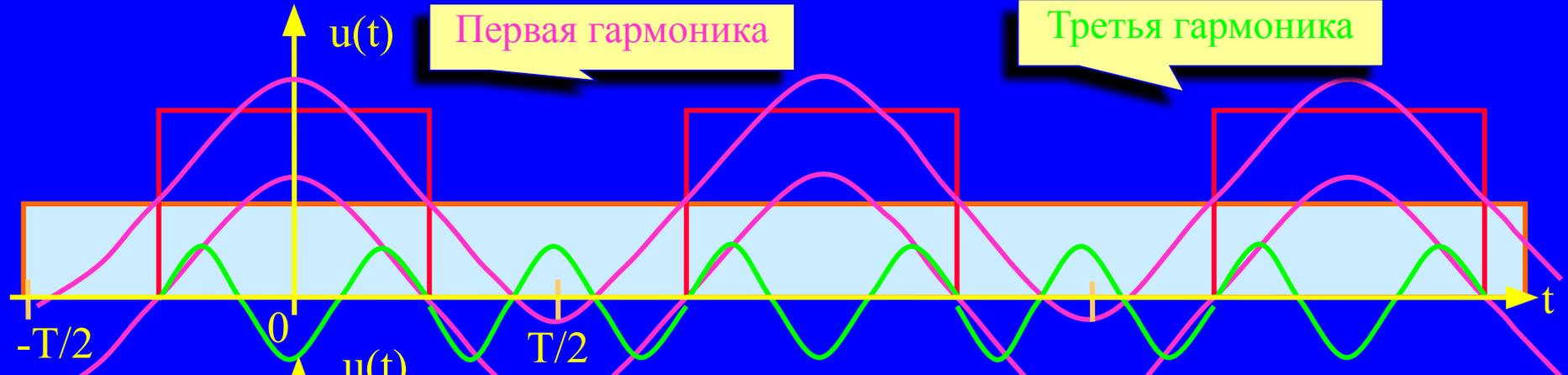
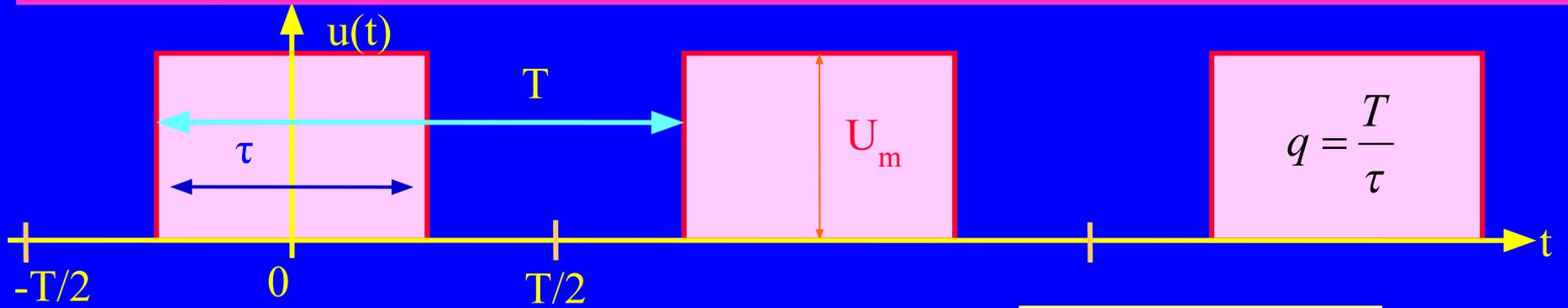
$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$$

Вид модуля  $F(\omega) = |F(j\omega)|$  позволяет судить о распределении энергии в спектре непериодического сигнала, определяемом равенством Парсеваля (теоремой Рэлея)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

В отличие от линейчатого (дискретного) спектра периодических сигналов спектр непериодического сигнала носит сплошной характер (т.к. разность между соседними частотными составляющими равная  $d\omega$  бесконечно мала)

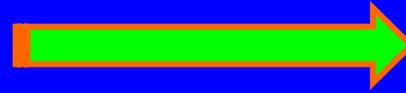
$$u(t) = \frac{U_m}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2U_m}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos k\omega_c t = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi} \cos \omega_c t - \frac{2U_m}{3\pi} \cos 3\omega_c t$$



# Свойства сигналов и их спектров

Для сигналов  $f(t)$  и их спектров  $F(j\omega)$  справедлив ряд свойств:

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot f_k(t) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k \cdot F_k(j\omega)$$



свойство линейности

$$\frac{d}{dt} f(t) \Leftrightarrow j\omega F(j\omega)$$



дифференцирования сигнала

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$$



интегрирование сигнала

$$f(t \pm \tau) \Leftrightarrow F(j\omega) \cdot e^{\pm j\omega\tau}$$



смещение сигнала по времени на  $\tau$

## Умножение спектров (теорема свертки)

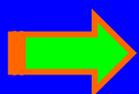
$$F_1(j\omega)F_2(j\omega) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) dt$$

## Ширина спектра сигнала

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

увеличивается при сжатии сигнала во времени (уменьшении длительности сигнала) и

наоборот, уменьшается при растяжении сигнала во времени.

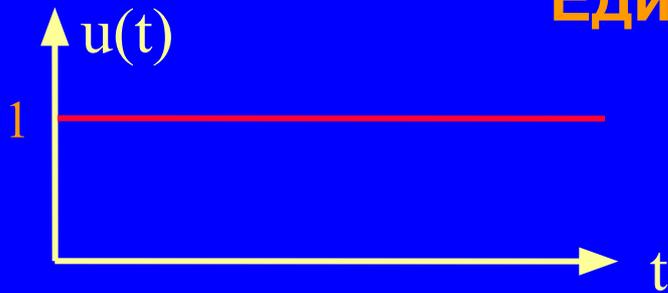


Изменение масштаба

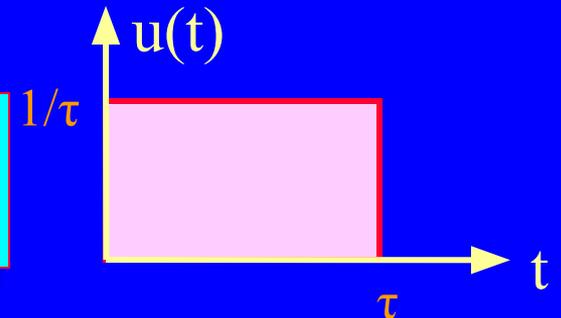
## 2. Спектры типовых сигналов

Для теоретических и экспериментальных исследований характеристик электрических цепей и передачи сообщений по каналам связи используются различные типы сигналов: гармонические колебания, уровни постоянных напряжений, последовательности прямоугольных импульсов и т.п. Особо важную роль в теоретических исследованиях играют испытательные сигналы в форме единичной функции  $1(t)$  и единичной импульсной функции  $\delta(t)$  – функции Дирака

### Единичная функция



$$1(t) = \begin{cases} 1, & \rightarrow \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \rightarrow \text{при } t < 0 \end{cases}$$



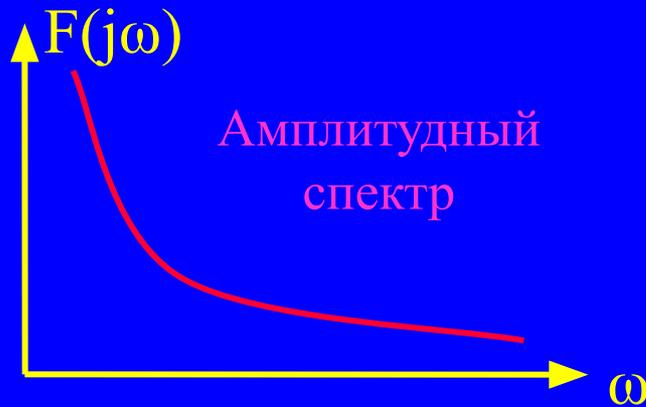
Обобщенное  
преобразование  
Фурье

$$F(j\omega, c) \int_{-\infty}^{\infty} 1(t) \cdot e^{-ct} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1(t) \cdot e^{-(c+j\omega)t} dt = \frac{1}{c+j\omega}$$

Спектр  
единичной  
функции



$$F(j\omega) = \lim_{c \rightarrow 0} F(j\omega, c) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c+j\omega} = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$



## Единичная импульсная функция

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq 0 \\ \infty, & \text{при } t = 0 \\ 0, & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$$

Эта функция является нереализуемой математической абстракцией, однако обладает рядом интересных свойств и играет важную роль в теоретических исследованиях.

Фильтрующее свойство  $\delta(t)$  функции



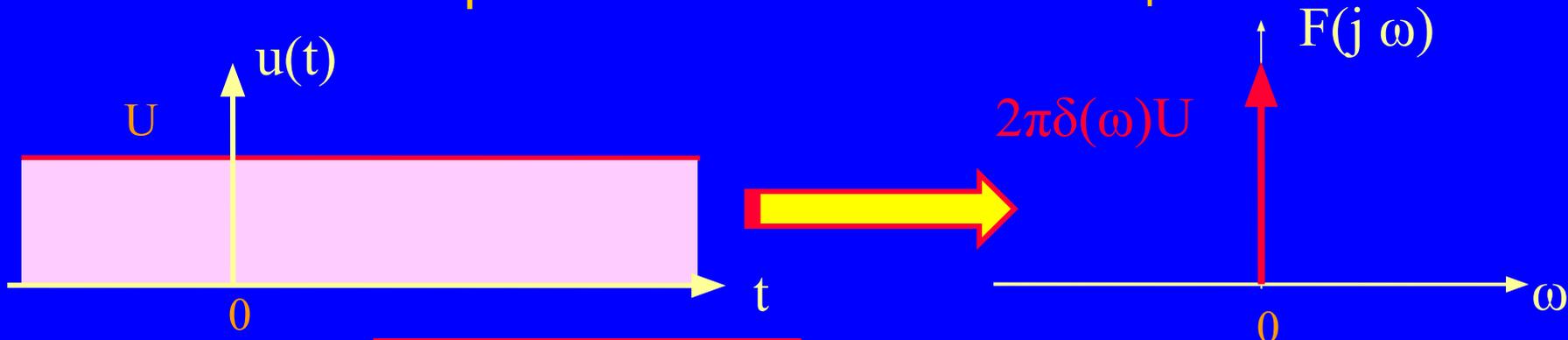
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

Спектр  
дельта  
функции

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \sin \omega t dt = 1e^{j0} = 1$$

$\delta(t)$  функция имеет равномерный амплитудный и нулевой фазовый спектры

# Спектр постоянной составляющей



Обратное преобразование Фурье

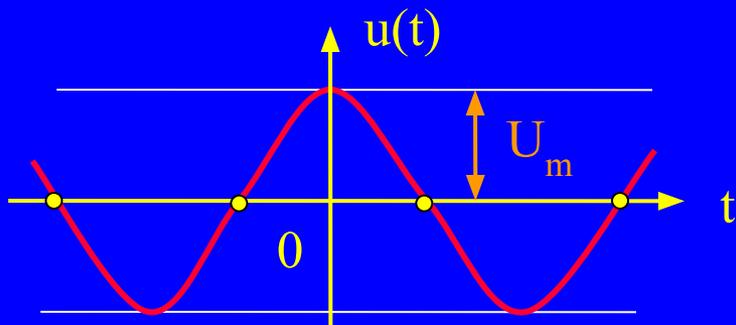
$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

$t \Leftrightarrow \omega$

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega t} dt$$

# Спектр гармонического колебания

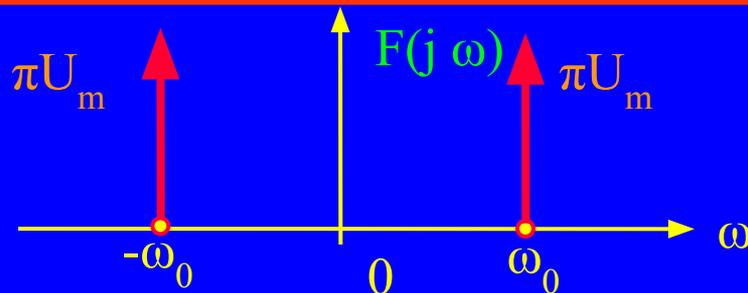
$$u(t) = U_m \cos \omega_0 t$$



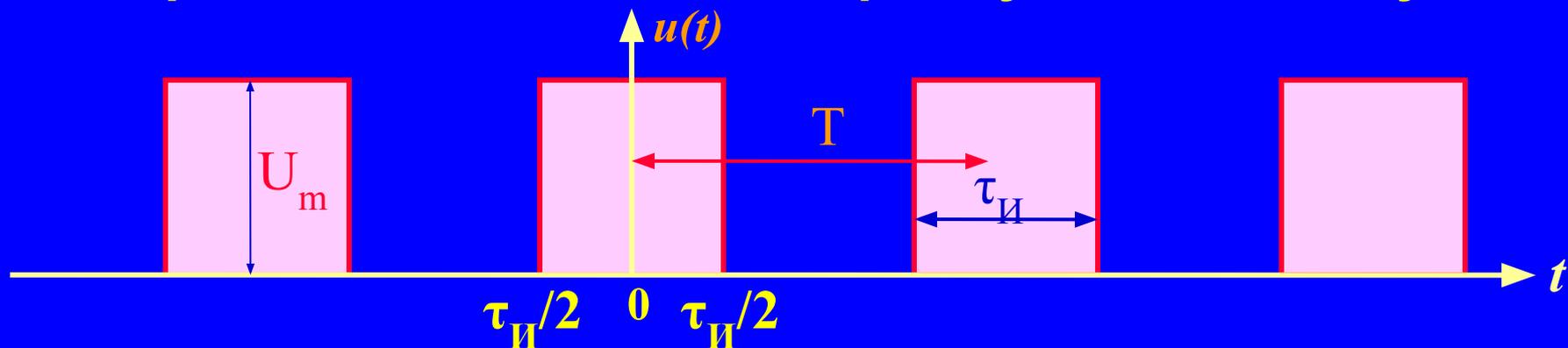
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_m \cos \omega_0 t \cdot e^{-j\omega t} dt, \quad \Re$$

$$F(j\omega) = \frac{U_m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_0 - \omega)t} dt + \frac{U_m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_0 + \omega)t} dt =$$

$$= \pi U_m [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



# Спектр последовательности прямоугольных импульсов



Комплексная амплитуда  $k$ -й гармоники будет равна

$$\begin{aligned} \dot{A}_{mk} &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-jk\omega t} dt = \frac{2}{T} \int_{-\tau_{И}/2}^{\tau_{И}/2} U_m e^{-jk\omega t} dt = -\frac{2U_m}{T \cdot j \cdot k \cdot \omega} e^{-jk\omega t} \Big|_{-\tau_{И}/2}^{\tau_{И}/2} = \\ &= \frac{2U_m \cdot \frac{\tau_{И}}{2}}{T \cdot j \cdot k \cdot \omega \cdot \frac{\tau_{И}}{2}} \left[ e^{jk\omega \frac{\tau_{И}}{2}} - e^{-jk\omega \frac{\tau_{И}}{2}} \right] = \frac{2U_m \cdot \tau_{И}}{T} \left[ \frac{e^{jk\omega \frac{\tau_{И}}{2}} - e^{-jk\omega \frac{\tau_{И}}{2}}}{2j} \right] \frac{1}{k\omega \frac{\tau_{И}}{2}} = \\ &= \frac{2U_m}{q} \cdot \frac{\sin(k\omega \frac{\tau_{И}}{2})}{k\omega \frac{\tau_{И}}{2}} = \frac{2U_m}{q} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{2U_m \cdot \tau_{И}}{T} \cdot \frac{\sin x}{x}, \text{ где } \rightarrow x = k\omega \frac{\tau_{И}}{2} \end{aligned}$$

$$A_m = \frac{2U_m}{q} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{2U_m \cdot \tau_{И}}{T} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

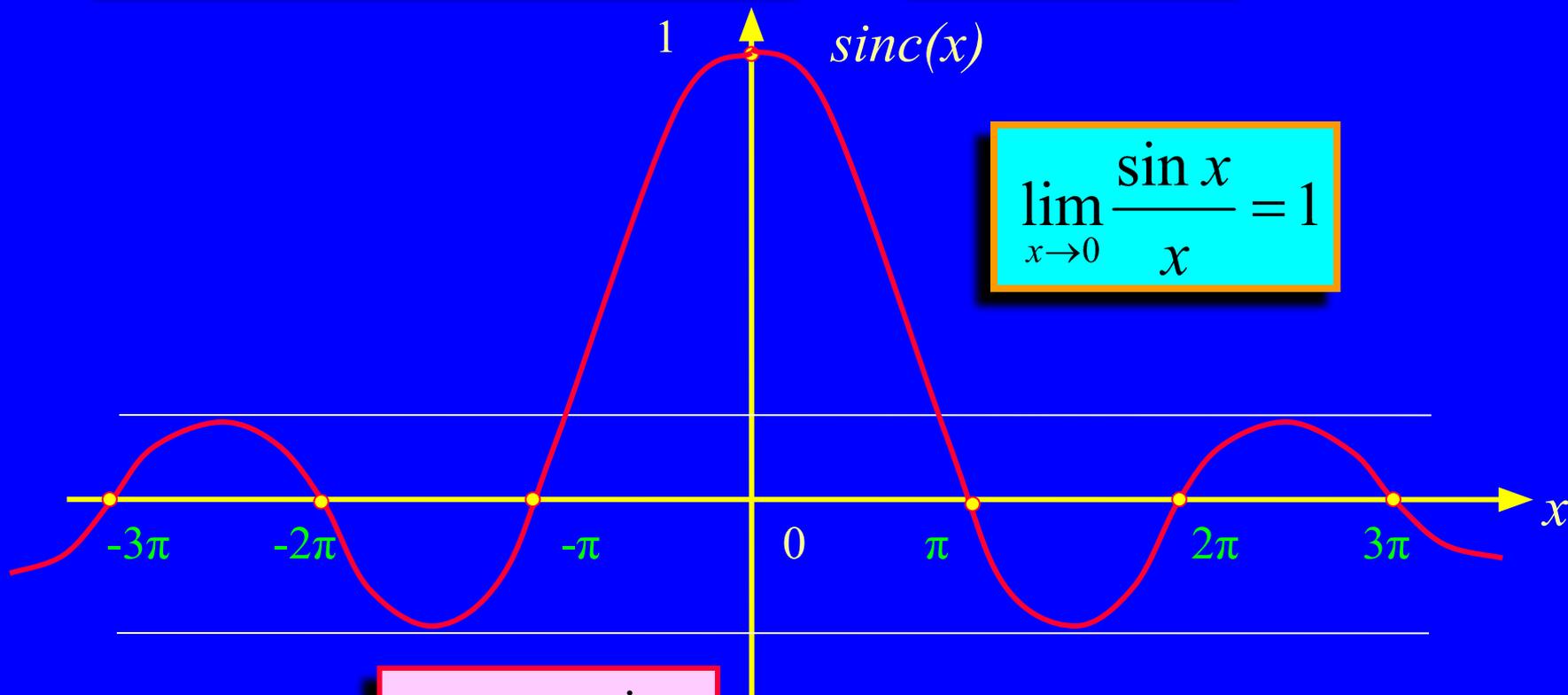
$$q = \frac{T}{\tau_{И}}$$

Сквaжнoсть  
импульсов

$$x = k \cdot \omega \cdot \frac{\tau_{И}}{2} = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau_{И}}{2} = \frac{k\pi}{2}$$

функция  $\frac{\sin x}{x}$

Функция  
отсчетов

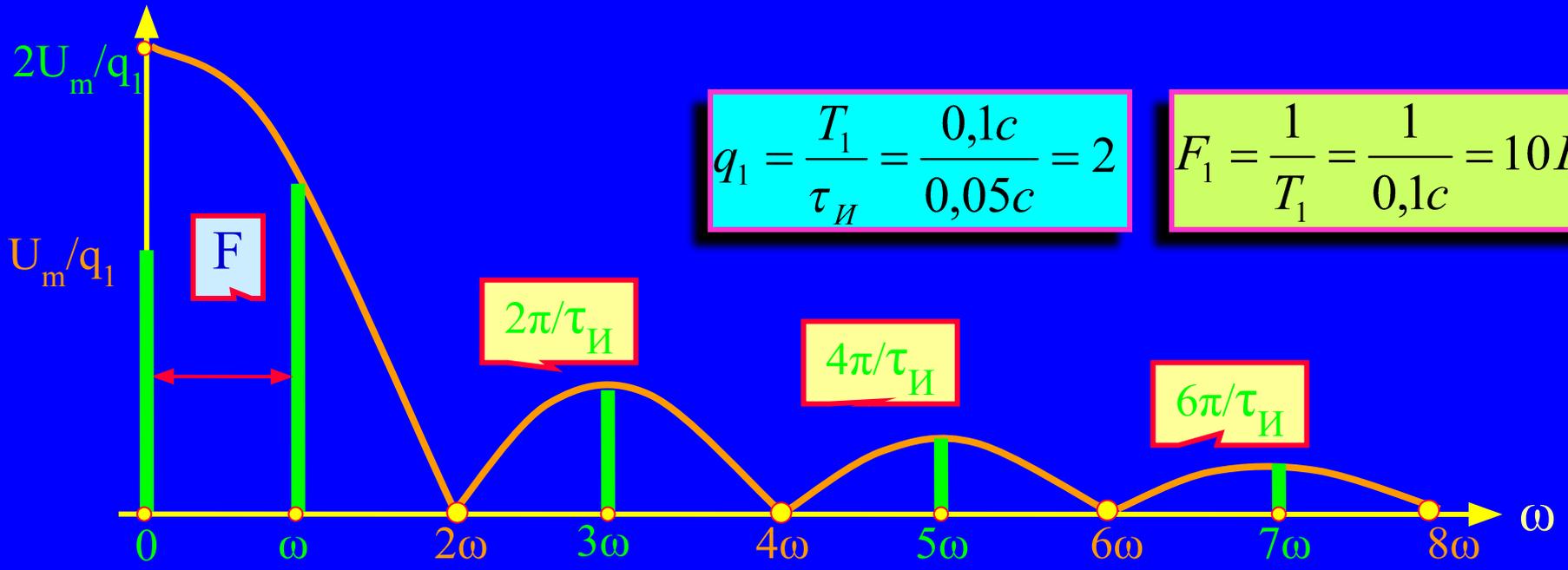
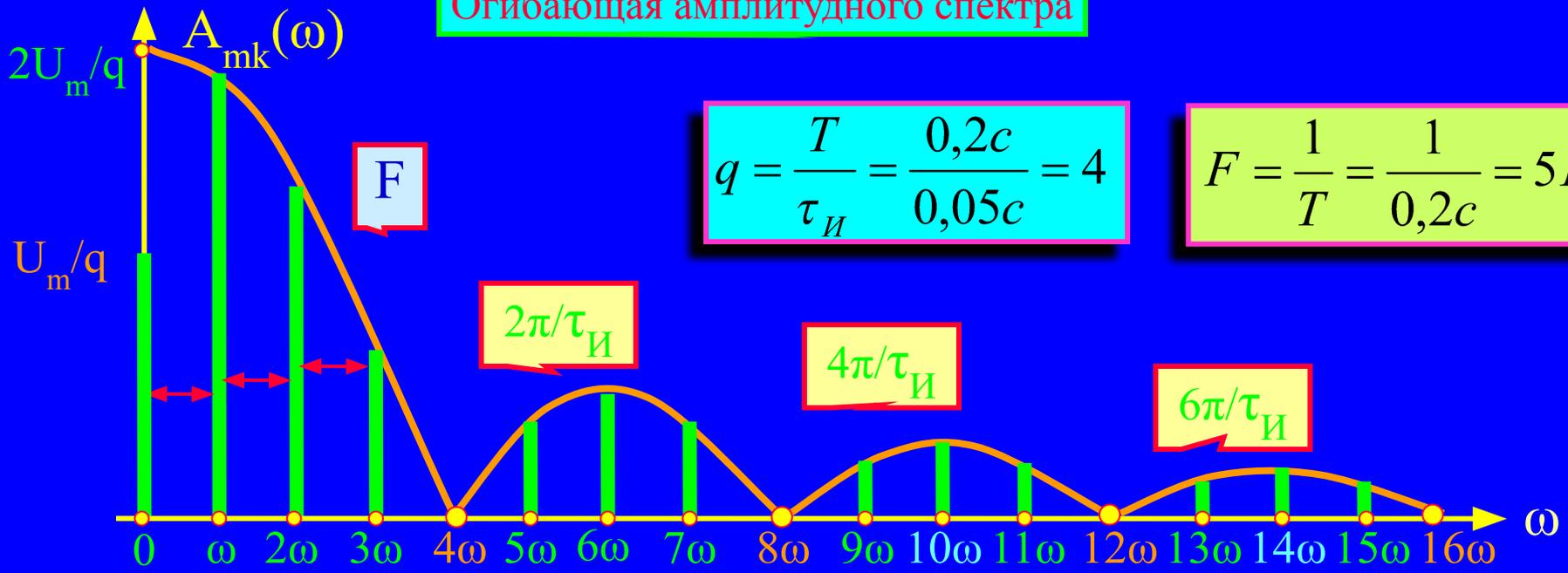


$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

функция  $\frac{\sin x}{x}$

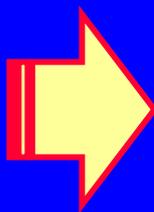
Четная функция аргумента

Огибающая амплитудного спектра



## Амплитудно-частотный спектр такой последовательности импульсов

$$A_{mk} = \frac{2 \cdot U_m}{q} \frac{\sin(k\omega \frac{\tau_{И}}{2})}{k\omega \frac{\tau_{И}}{2}}$$



Огибающая амплитудного спектра имеет много лепестков: первый из которых занимает интервал частот от 0 до  $(2\pi/\tau_{И})$ , второй от  $(2\pi/\tau_{И})$  до  $2 \cdot (2\pi/\tau_{И})$  и т.д.

Ширина каждого лепестка равна  $(2\pi/\tau_{И})$  и определяется только длительностью импульса. Расстояние между спектральными линиями равно  $F = 1/T$  — частоте повторения импульсов, т.е. определяется периодом импульсной последовательности.

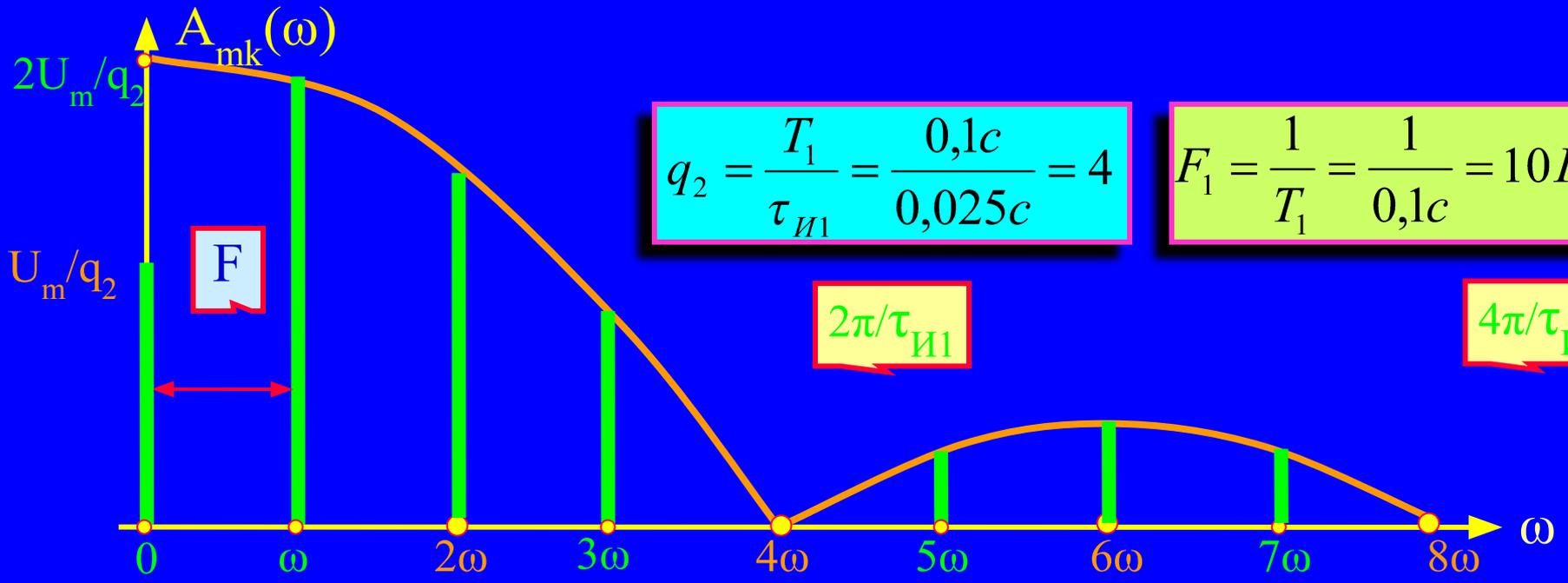
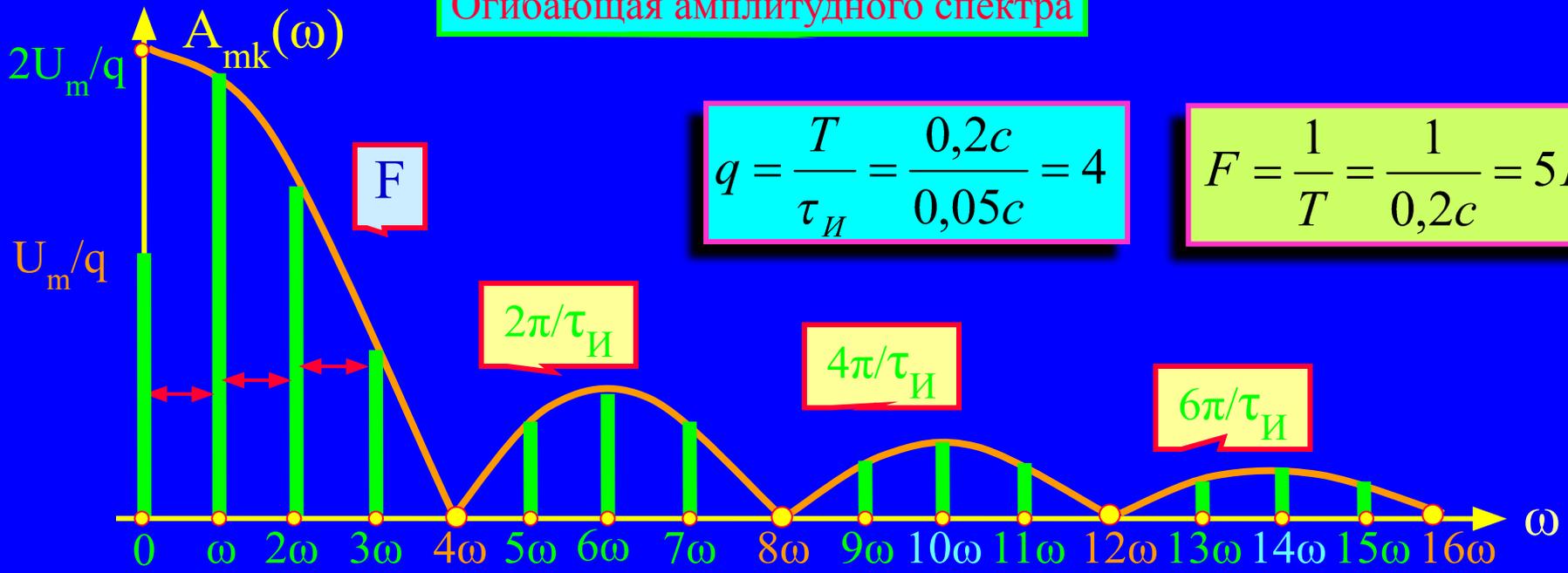
Вид спектра периодической последовательности существенно зависит от скважности импульсной последовательности —  $q = T/\tau_{И}$

Узлы (нули) амплитудного спектра — значения частот  $k \cdot \omega$ , в которых  $A_{mk}(\omega) = 0$  и происходит смена знака сомножителей спектра, т.е. фаза скачком изменяется на  $180^\circ$ .

$$\sin(k\omega \frac{\tau_{И}}{2}) = \sin(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau_{И}}{2}) = 0; \Rightarrow \sin(k \frac{\pi}{q}) = 0; \Rightarrow k = n \cdot \pi$$

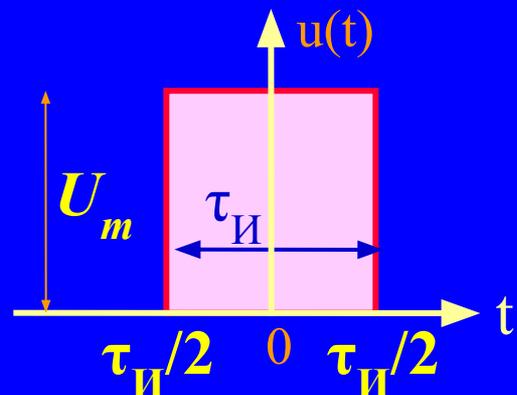
**Вывод:** Амплитудно-частотный спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов является дискретным. Вид (огибающая) спектра определяются формой импульса, структура спектра (количество спектральных составляющих) — скважностью импульсной последовательности. На частотах кратных скважности — спектральные составляющие отсутствуют, т.е. равны нулю.

Огибающая амплитудного спектра

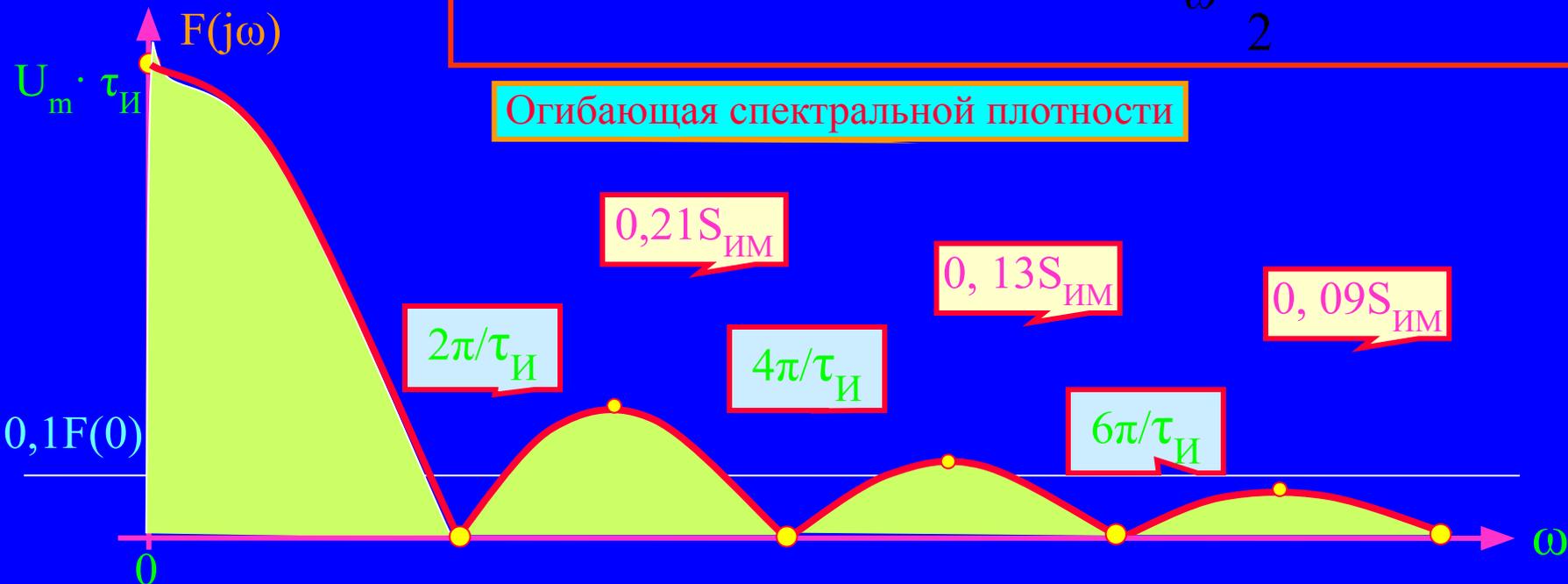


# Спектр одиночного прямоугольного импульса

Определим спектр (спектральную плотность)



$$F(j\omega) = \int_{-\frac{\tau_{И}}{2}}^{\frac{\tau_{И}}{2}} U_m \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{U_m}{j\omega} (e^{j\omega \frac{\tau_{И}}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau_{И}}{2}}) =$$
$$= 2 \frac{U_m}{\omega} \left( \frac{e^{j\omega \frac{\tau_{И}}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau_{И}}{2}}}{2j} \right) = U_m \cdot \tau_{И} \cdot \frac{\sin \omega \frac{\tau_{И}}{2}}{\omega \frac{\tau_{И}}{2}} = U_m \cdot \tau_{И} \cdot \frac{\sin x}{x}$$



Огибающая спектральной плотности

# Вид графика спектральной плотности

$$F(j\omega) = U_m \cdot \tau_{И} \frac{\sin(\omega \frac{\tau_{И}}{2})}{\omega \frac{\tau_{И}}{2}}$$

Функция спектральной плотности обращается в нуль при значениях аргумента  $\omega \cdot \tau_{И} / 2 = n \cdot \pi$ .  
Спектральная плотность импульса произвольной формы при  $\omega = 0$  численно равна его площади

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = S_{ИМП}$$

**Вывод:** Спектр (спектральная плотность) непериодических сигналов является сплошным. Огибающая спектральной плотности определяется формой импульса. Значение спектральной плотности на нулевой частоте численно равно площади импульса. При увеличении длительности импульса происходит сжатие спектра и наоборот.

Распределение энергии в спектре периодических сигналов

$$\eta P_A = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N A_{mk}; \Rightarrow \eta = 0,95$$

$$2\Delta f = \frac{2}{\tau_{И}}$$

Распределение энергии в спектре непериодических сигналов

$$\eta P_A = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi\Delta f} F^2(\omega) d\omega; \Rightarrow \eta = 0,95$$

## Задание на самостоятельную работу

### Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В., Страков С.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 234 – 249
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: Учебник для вузов, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 103 – 117.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.
4. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов, Под ред. Самойло К.А.- М.: Высшая школа, 2002 г, с. 41 – 65.