Геометрия в Заданиях ЕГЭ

Результаты ЕГЭ по математике 2013

В этом году экзамен сдавали 860 840 человек. 754 776 из них – выпускники текущего года. То есть, 106 064 человека сдавали ЕГЭ повторно, либо впервые – для поступления в вуз.

Всего было проведено 2 888 104 «человек-экзаменов» (если расценивать присутствие одного человека на экзамене как отдельный экзамен).

Таким образом, было сдано 1 166 424 человек-экзамена по выбору.

Результаты ЕГЭ по математике 2013

Средний тестовый балл по математике в России 48,7.

538 выпускников сдали ЕГЭ по математике на 100 баллов.

7 человек из Саратовской области получили 100 баллов.

43% выпускников не приступили к части С с развернутым решением.

Результаты ЕГЭ по математике 2013

Согласно результатам пересдач и апелляций, 2,24 % учеников (16 635 человек) не получили аттестат о среднем (полном) общем образовании.

В том числе, около 500 человек были лишены права пересдать ЕГЭ в текущем году за нарушение правил сдачи ЕГЭ. Более того, в Якутии возбуждено 5 дел об административном правонарушении.

Результаты ЕГЭ по математике 2013

Если говорить об образовательных тенденциях, то, как отмечают организаторы ЕГЭ, они не самые радужные. К сожалению, говорить о росте образованности пока не приходится, особенно в точных науках. К примеру, задание В1 – про таблетки – не выполнили 150 000 учащихся (около 17 %). Один из учащихся даже предложил в ответе дать ребёнку 31 500 таблеток.

В целом экзамен по математике показал незначительный – на 4 тестовых балла – рост общероссийского среднего балла ЕГЭ.

Результаты ЕГЭ по математике 2013

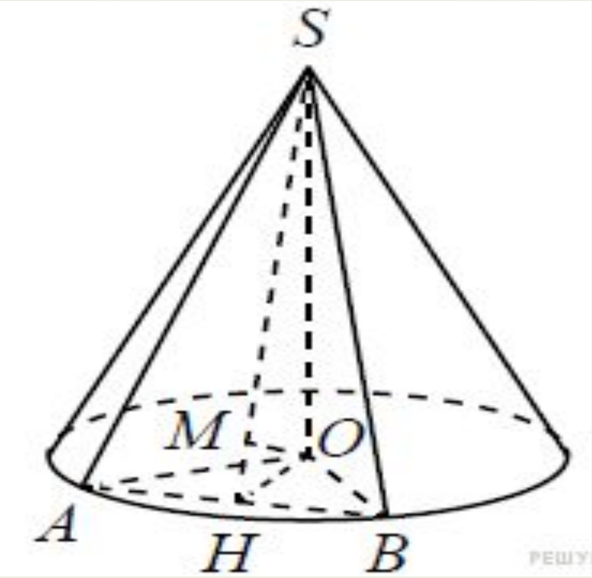
Всего в Саратове над тестами и задачками размышляли более четырех тысяч выпускников. Из них почти две сотни, 197 человек, провалили этот экзамен - школьники набрали меньше 24 баллов (тот минимальный порог, который нужно преодолеть). А вот отличниками стали всего четверо саратовских одиннадцатиклассников - точная наука явно далась школьникам сложнее, чем родной язык. На ЕГЭ по русскому, напомним, максимальный балл набрали 24 ученика.

Результаты ЕГЭ по математике 2013

Тем не менее этот результат все равно лучше прошлогодних: для сравнения, в 2011 году ЕГЭ по математике в Саратове на сто баллов написал лишь один ученик, а в 2012 году и вовсе никому не удалось не сделать ни одной ошибки. Средний балл по городу также увеличился и составил 54,3, тогда как в 2012 году школьники набирали 42,6.

Расстояние от точки до плоскости

С 2. Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.



Сечение конуса плоскостью, содержащей его вершину *S* и хорду $AB = 6$ **- треугольник *ASB*. В равных прямоугольных треугольниках *SOA* и *SOB*, где *O* — центр основания конуса, откуда** $OA = OB = 5, SO = 12,$

$$SA = SB = \sqrt{OB^2 + SO^2} = 13.$$

Пусть *SH* — высота и медиана равнобедренного треугольника *ASB*,

$$SH = \sqrt{SB^2 - HB^2}, SH = \sqrt{169 - 9} = 4\sqrt{10}.$$

Тогда отрезок *OH* — высота и медиана равнобедренного треугольника АОВ, $OH = 4.$ **Плоскость *SOH* перпендикулярна плоскости *ASB*, так как прямые SH и OH перпендикулярны прямой АВ. Поэтому расстояние от точки *O* до плоскости *ASB* равно высоте *OM* прямоугольного треугольника *SOH*, проведенной к гипотенузе**

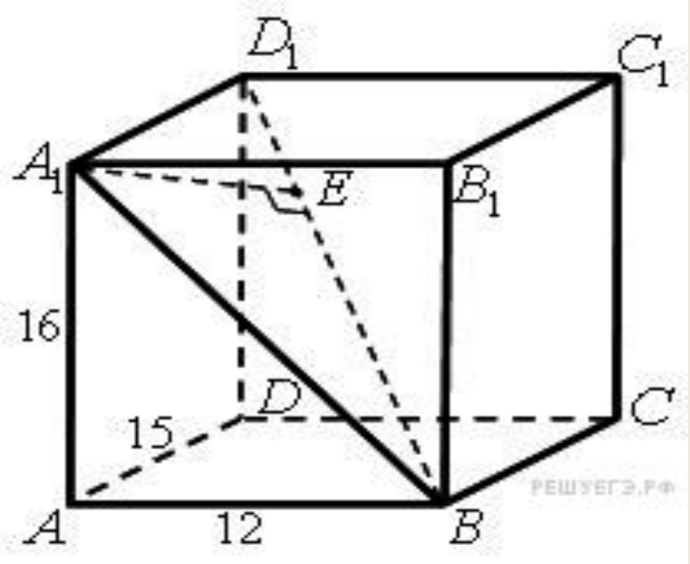
$$OM = \frac{OH \cdot SO}{SH} = \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$

$$Ответ: \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$

Расстояние от точки до прямой

С 2. Длины ребер *AB*, *AA₁* и *AD* прямоугольного параллелепипеда *ABCDA₁B₁C₁D₁* равны соответственно 12, 16 и 15. Найдите расстояние от вершины *A₁* до прямой *BD₁*.

Из вершины A1 опускаем перпендикуляр на BD1.
Так как A1D1 перпендикулярна плоскости AA1B, то
A1D1 перпендикулярен A1B.
Следовательно A1E-высота прямоугольного треугольника A1BD1.



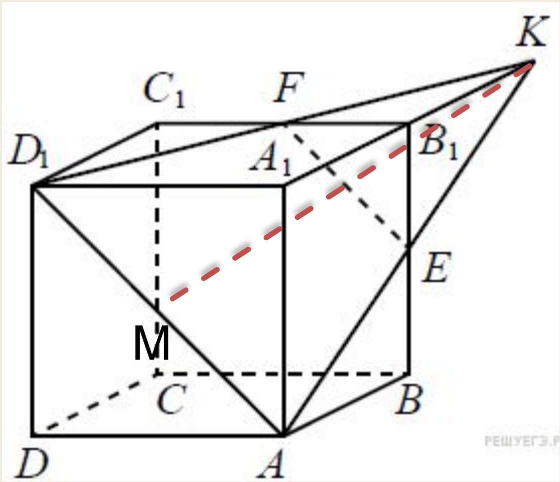
$$A_1E = \frac{A_1D_1 \cdot A_1B}{D_1B}, \; A_1B = \sqrt{A_1A^2 + AB^2} = 20,$$

Ответ:12.

$$BD_1 = \sqrt{A_1A^2 + AB^2 + A_1D_1^{\,2}} = 25, \; A_1E = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12$$

Задачи на сечение

С 2. Точка Е — середина ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью D_1AE, если ребра куба равны 4.



Прямая АЕ пересекает прямую A_1B_1 в точке К, а прямая D_1K пересекает C_1B_1 в его середине, точке F. Искомое сечение – плоскость D_1FEA.

Из подобия треугольников AD_1K и EFK следует, что

$$S_{AD_1FE} = \frac{3}{4} S_{AD_1K} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot AD_1 \cdot h$$

Высота KM=h, ее длину находим из треугольника AMK

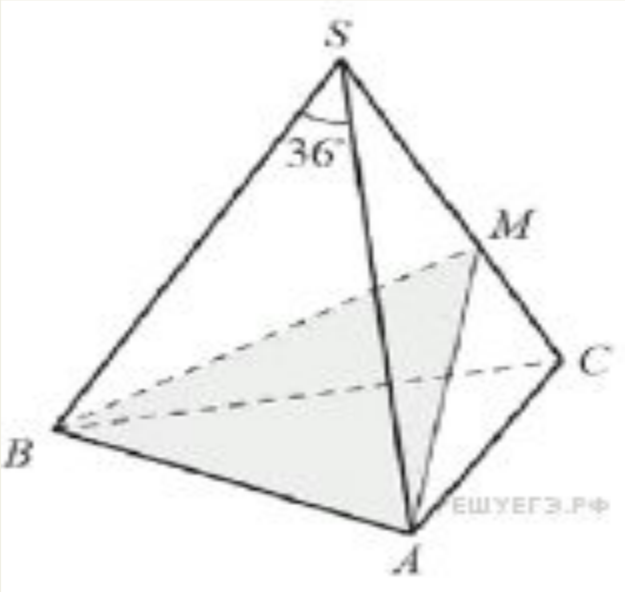
$$h = MK = \sqrt{AK^2 - AM^2}, h = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}.$$

$$S_{AD_1FE} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 18.$$

Ответ:18.

С 2. В правильной треугольной пирамиде SABCD с основанием ABC сторона основания равна 8, а угол ASB равен 36°. На ребре SM взята точка M так, что AM- биссектриса угла SAC. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A , M и B.

Нужное сечение — треугольник AMB.



Рассмотрим треугольник ASC.

Он равнобедренный,

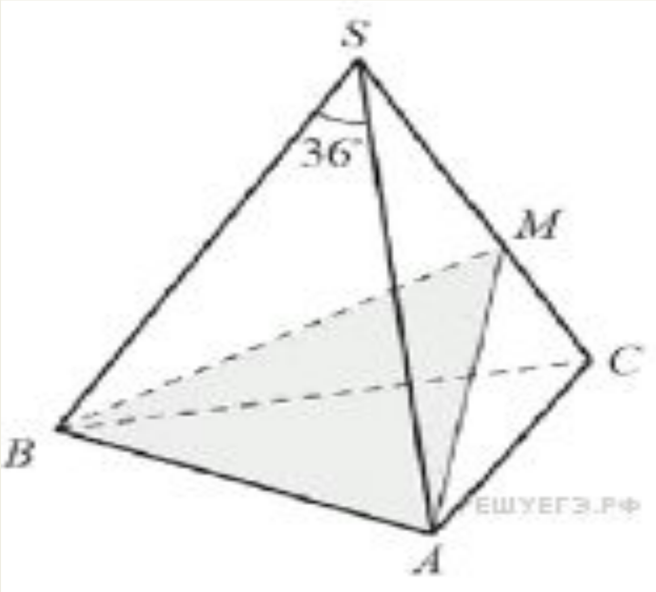
$$\angle ASC = \angle SCA = 36^0 ,$$

поэтому

$$\angle SAC = \angle SCA = 72^0$$

Значит,

$$\angle MAC = 36^0$$



$Ответ: 16\sqrt{3}.$

Рассмотрим теперь треугольник CAM . Сумма его углов 180^0 , значит, угол AMC равен 72^0 . Следовательно, треугольник CAM равнобедренный, и поэтому AM=AC=8. Аналогично находим, что BM=8.

Таким образом, треугольник AMB равносторонний со стороной 8. Его площадь равна

$$\frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}.$$

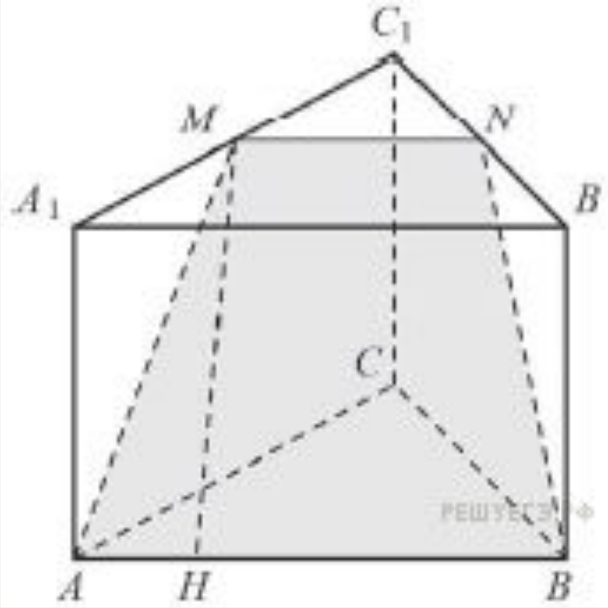
С 2. В правильной треугольной призме ABCA1B1C1 стороны основания равны 6, боковые рёбра равны 4. Изобразите сечение, проходящее через вершины A, B и середину ребра A_1C_1 .Найдите его площадь.

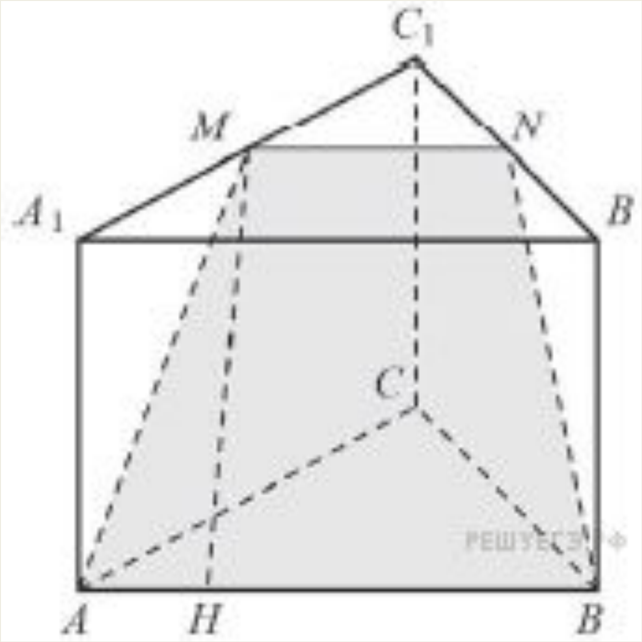
Обозначим через M и N середины ребер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно.

По теореме о средней линии треугольника

$$MN \parallel A_1B_1 \parallel AB$$

так что прямые MN и AB лежат в одной плоскости. Значит сечением призмы является равнобокая трапеция AMNB. Основания AB=6, MN=3.





$$AM = \sqrt{AA_1^{\,2} + A_1M^{\,2}},$$

$$AM = \sqrt{16+9} = 5.$$

$$AH = \frac{3}{2}.$$

$$MH = \sqrt{5^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{91}}{2}.$$

$$S_{AMNB} = \frac{MN + AB}{2} \cdot MH,$$

$$S_{AMNB} = \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = \frac{9}{4} \cdot \sqrt{91}$$

$$Ответ: \frac{9}{4} \cdot \sqrt{91}$$

Угол между прямыми

С 2.
Точка E - середина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AE и CA_1.

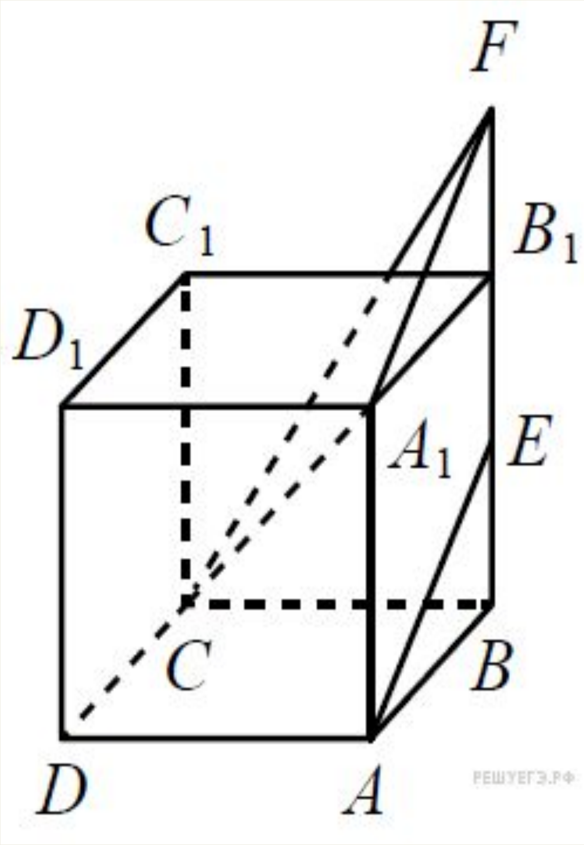
Примем ребро куба за единицу. Тогда

$$CA_1 = \sqrt{3}$$

Проведём через точку A_1 прямую, параллельную AE. Она пересекает продолжение ребра BB_1 в точке F, причём

$$B_1F = \frac{1}{2}.$$

Искомый угол равен углу CA_1F (или смежному с ним). В прямоугольном треугольнике A_1B_1F с прямым углом B_1



$$A_1F = \sqrt{A_1B_1^{\,2} + B_1F^{\,2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике CBF с прямым углом B

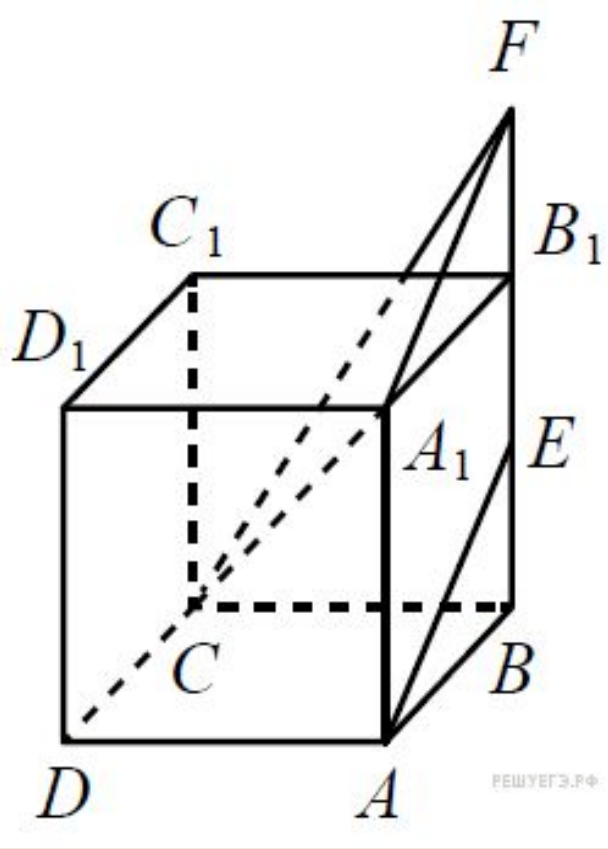
$$CF=\sqrt{CB^2+BF^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

В треугольнике CA1F

$$CF^2=CA_1{}^2+A_1F^2-2\cdot\cos\angle CA_1F\cdot CA_1\cdot A_1F$$

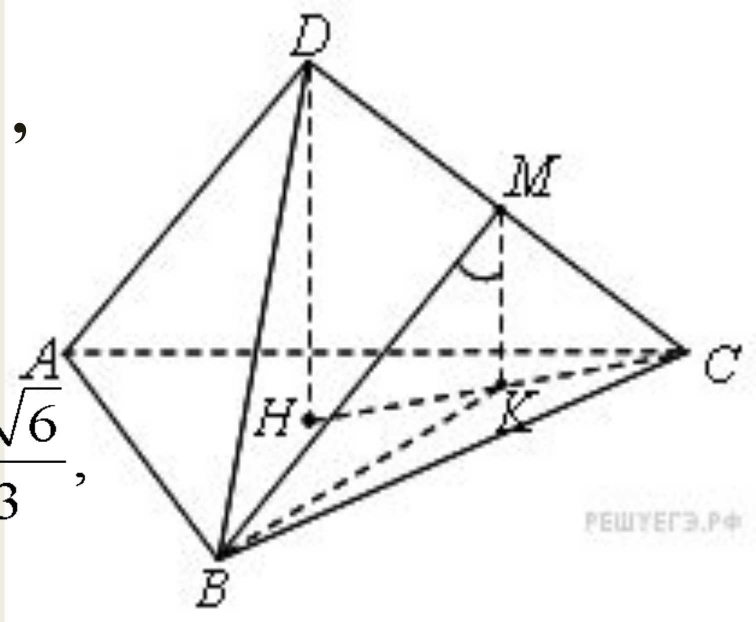
$$\cos\angle CA_1F=\frac{CA_1{}^2+A_1F^2-CF^2}{2\cdot CA_1\cdot A_1F}=\frac{\sqrt{15}}{15},$$

$$\angle CA_1F=\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}.$$



$$\textit{Ответ:}\ \arccos\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

С 2 . В правильном тетраэдре ABCD найдите угол между высотой DH тетраэдра и медианой BM боковой грани BCD .



Пусть длина ребра тетраэдра равна a , угол BMK искомый, тогда имеем:

$$CH = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$KM = \frac{1}{2}\cdot DH = \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a}{\sqrt{6}},$$

$$BM = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

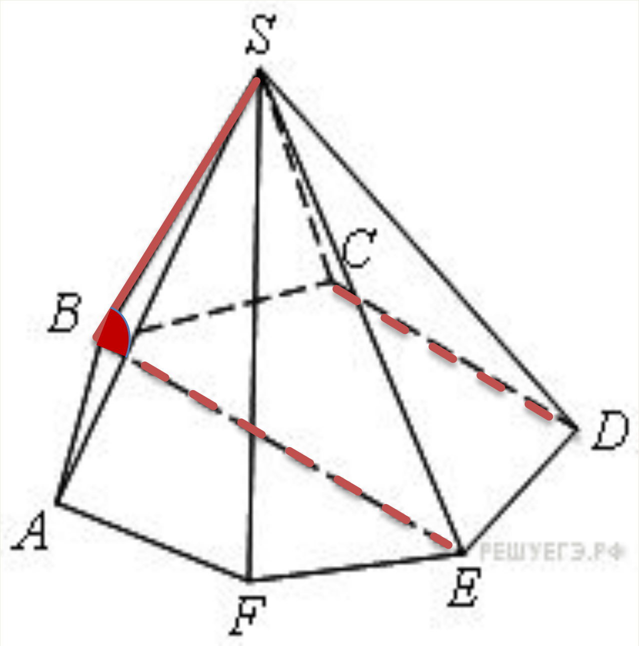
$$\cos\angle BMK = \frac{KM}{BM} = \frac{a\cdot 2}{\sqrt{6}\cdot a\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\angle BMK = \arccos\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\textit{Ответ}: \arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$$

С 2. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми *SB* и *CD*.

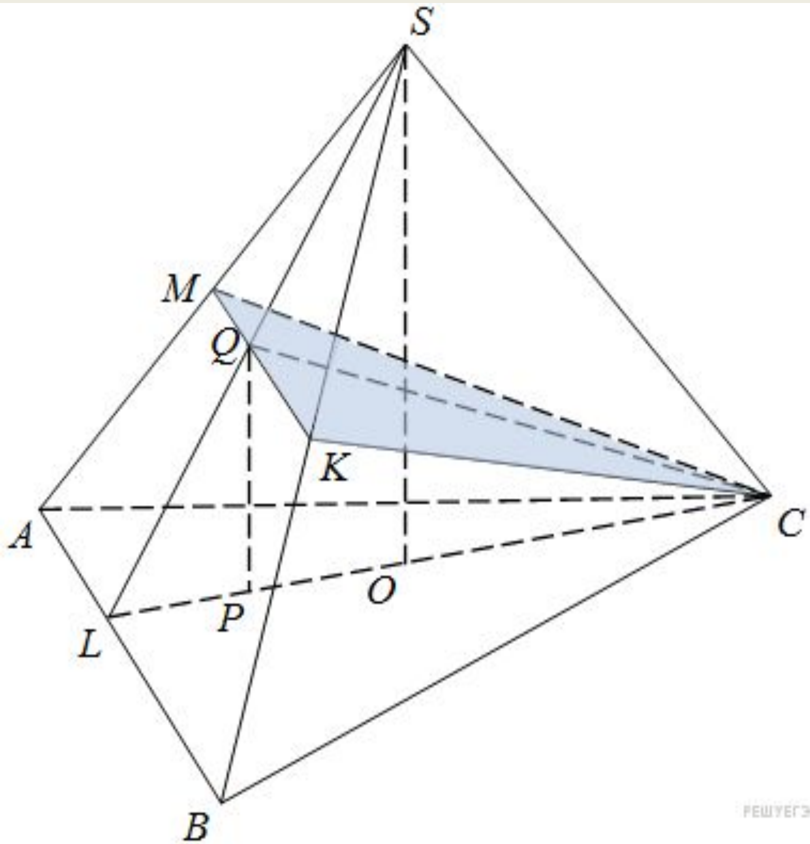
Вместо прямой *CD* рассмотрим параллельную ей прямую *BE*. Искомый угол равен углу *SBE*. Треугольник *SBE* равносторонний, поскольку большая диагональ правильного шестиугольника вдвое больше его стороны: BE=2CD Следовательно, угол CBE=60^0 .



Ответ: 60^0

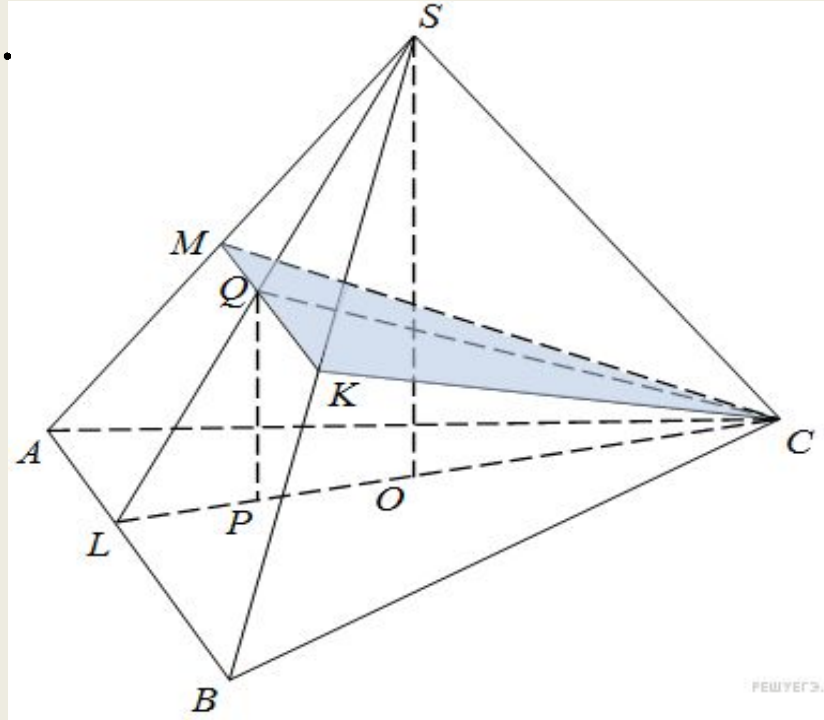
Угол между плоскостями

С 2. В правильной треугольной пирамиде SABC с основанием ABC то
- середина ребра SA, точка K - середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если SC=8, BC=6.



Проведем перпендикуляр CQ к MK, так как треугольник CMK равнобедренный, то Q - середина MK. Из точки Q опустим перпендикуляр QP на плоскость основания. Точка P лежит на медиане CL треугольника ABC. Прямая MK параллельна прямой пересечения плоскостей CMK и ABC, QP перпендикулярен MK и CQ перпендикулярен MK. Следовательно, угол QCP — линейный угол искомого угла между плоскостями.

$$CO=\frac{2}{3}CL,\ CO=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot BC=2\sqrt{3}.$$



$$SO=\sqrt{SC^2-CO^2},$$

$$SO=\sqrt{8^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{13}.$$

$$QP=\frac{1}{2}SO,\ QP=\sqrt{13}.$$

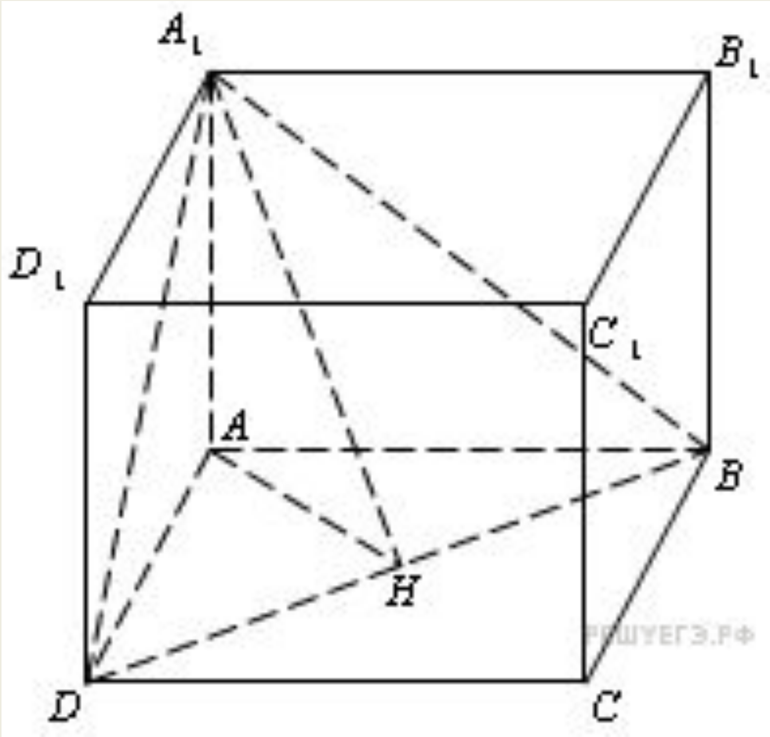
$$CP=\frac{1}{2}OL=\frac{5}{6}CL.$$

$$CP=\frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

$$tg\angle QCP=\frac{\sqrt{13}\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot 5}=\frac{2\cdot\sqrt{39}}{15}.$$

$$Ответ: arctg\,\frac{2\cdot\sqrt{39}}{15}.$$

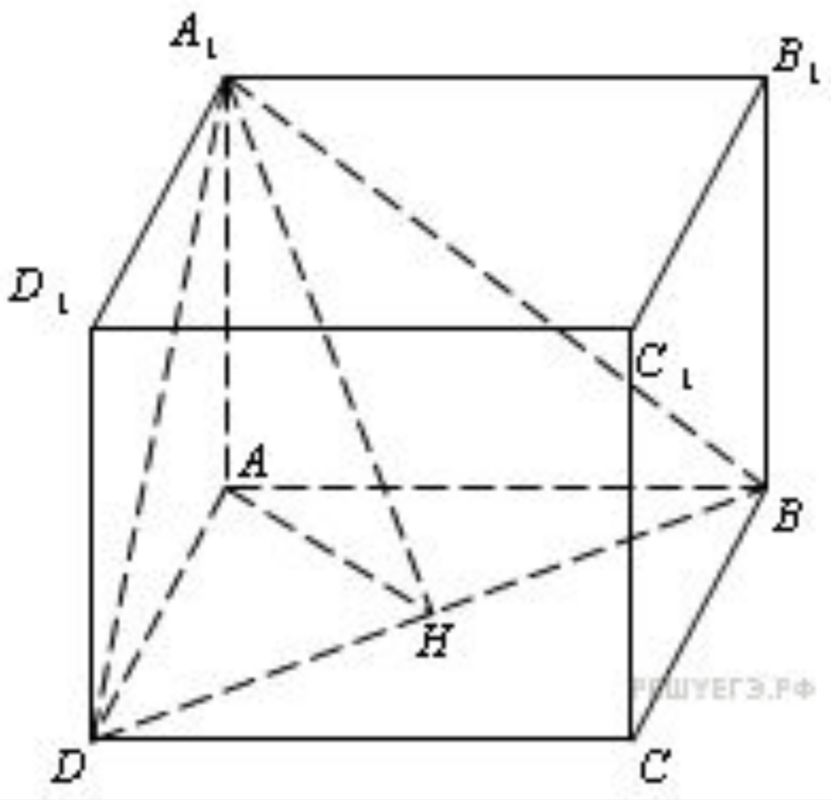
С 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB=6$, $AD=8$, $CC_1=16$. Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.



Плоскости ABC и A_1DB имеют общую прямую BD. Проведем AH перпендикуляр к BD. По теореме о трех перпендикулярах A_1H перпендикулярен BD. Значит, линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями ABC и A_1DB — это угол A_1HA. Из прямоугольного треугольника BAD находим:

$$AH = \frac{AB \cdot AD}{BD},$$

$$AH = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}.$$



Из прямоугольного треугольника А1АН находим:

$$tg\angle A_1HA = \frac{AA_1}{AH},$$

$$tg\angle A_1HA = \frac{16 \cdot 5}{24} = \frac{10}{3}.$$

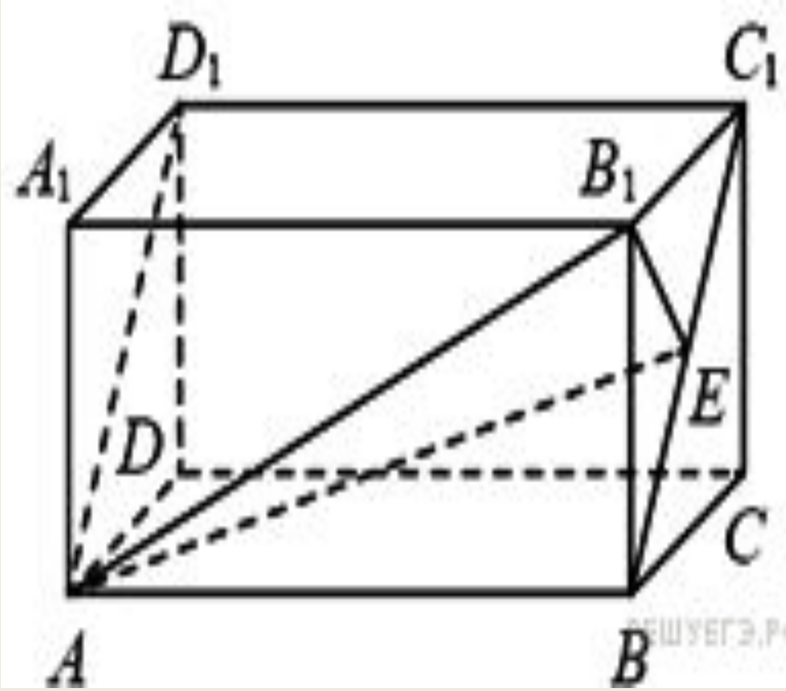
Значит, искомый угол равен $arctg\,\dfrac{10}{3}.$

$$Ответ: arctg\,\frac{10}{3}.$$

Угол между прямой и плоскостью

С 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны $AB=2$, $AD=AA_1=1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Плоскости ABC_1 и BCC_1 перпендикулярны. Перпендикуляр из точки B_1 к плоскости ABC_1 лежит в плоскости BCC_1 и пересекает прямую BC_1 в точке E . Значит, искомый угол равен углу B_1AE.

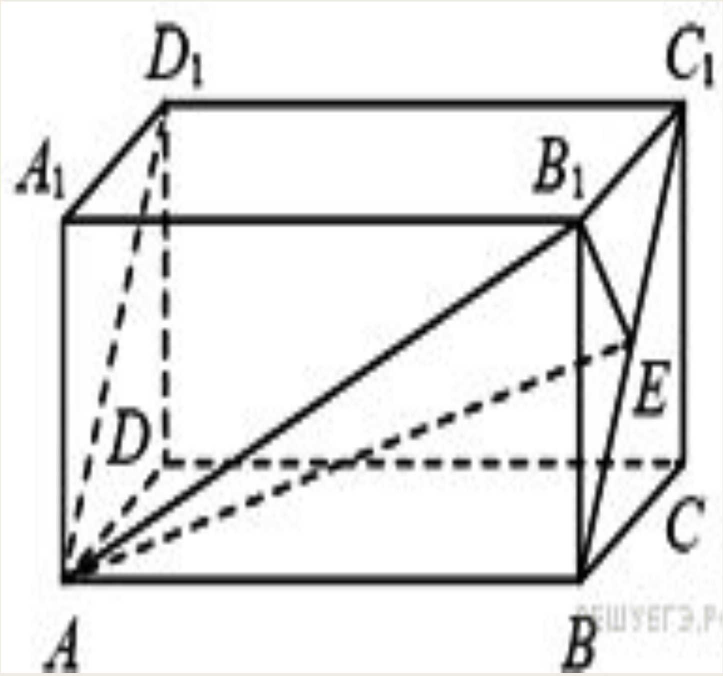


В прямоугольном треугольнике B1AE

катет $B_1E = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

гипотенуза $AB_1 = \sqrt{5}.$

Поэтому



$$\sin \angle B_1AE = \frac{B_1E}{AB_1}.$$

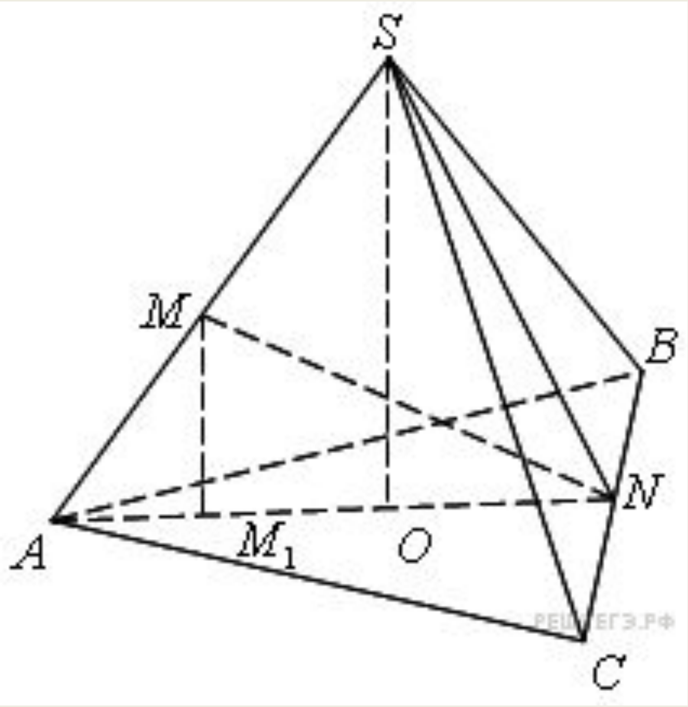
$$\sin \angle B_1AE = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\angle B_1AE = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\textit{Ответ}: \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\angle B_1AE = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} = arctg\,\frac{1}{3} = arcctg\,3.$$

С 2. В правильной треугольной пирамиде SABC с основанием ABC известны ребра $AB = 7\sqrt{3}, SC = 25.$ Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.

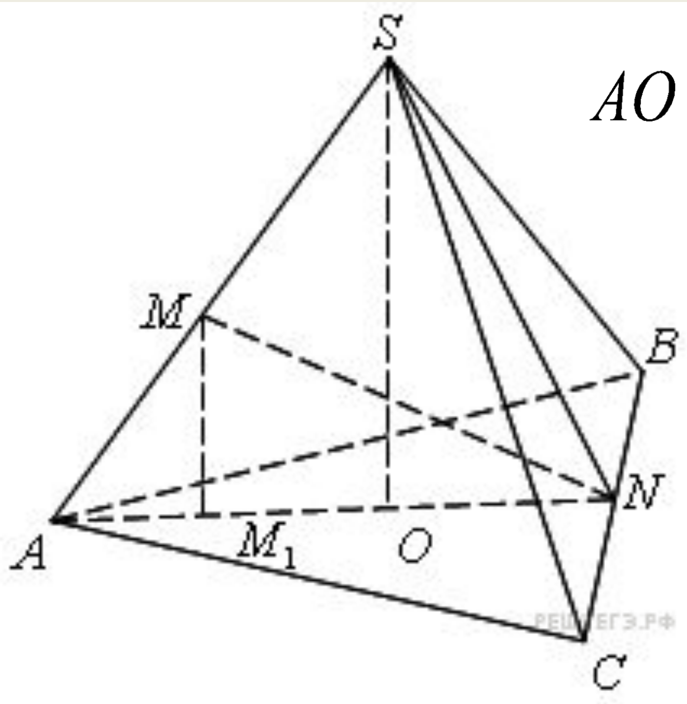


Пусть M и N — середины ребер AS и AN соответственно. AN- медиана правильного треугольника ABC, следовательно, находится по формуле

$$AN = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{21}{2}.$$

Прямая AS проецируется на плоскость основания и прямую AN. Поэтому проекция точки M-точка M_1 лежит на отрезке AN. Значит, прямая AN является проекцией прямой MN, следовательно, угол MNM_1 искомый.

Поскольку MM_1 параллелен SO, где O- центр основания, MM_1 средняя линия треугольника SAO



$$AO = CO = \frac{2}{3} \cdot AN = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 24 \cdot \sqrt{3} = 24.$$

$$NM_1 = \frac{2}{3} \cdot AN = 24$$

$$MM_1 = \frac{1}{2} SO = \frac{1}{2} \sqrt{SC^2 - CO^2} = \frac{7}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника MM_1N находим

$$tg \angle M_1NM = \frac{MM_1}{NM_1} = \frac{7}{48}.$$

$$Ответ : arctg \frac{7}{48}.$$

Спасибо за внимание!