Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Система m линейных алгебраических уравнений с n переменными (СЛАУ) имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

где a_{ij} — коэффициенты при переменных, b_i — свободные члены уравнений,

x_j — переменные (неизвестные).

Определение:

Решением системы уравнений называется упорядоченная совокупность n чисел C_1, C_2, C_3, …, C_n, подстановка которых вместо x_1, x_2, x_3, …, x_n соответственно, т.е. $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, $x_3 = C_3$, …, $x_n = C_n$ обращает в тождество каждое из уравнений этой системы.

Определение:

Система линейных алгебраических уравнений называется

- *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение;
- *несовместной*, если она не имеет решений.

Определение:

Система линейных алгебраических уравнений называется

- *определённой*, если она совместна и имеет единственное решение;
- *неопределённой*, если она совместна и имеет более одного решения.

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать

в матричном виде: $\boxed{A \cdot X = B}$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — основная матрица системы (составлена из коэффициентов при переменных),

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — матрица неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ — матрица свободных членов уравнений

или с помощью расширенной матрицы: $\boxed{\overline{A} = (A|B),}$ то есть

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} & b_1 \\ A & b_2 \\ & \dots \\ & b_m \end{array}\right)$$

Исследование систем линейных алгебраических уравнений

Теорема Кронекера-Капелли

Теорема Кронекера-Капелли *Критерий совместности* (Кронекер Леопольд (1823 – 1891) — немецкий математик)	Для того чтобы система m линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных x_1, x_2, x_3, …, x_n была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы заданной системы и ранг расширенной матрицы заданной системы были равны, т.е. $R(A) = R(\overline{A}) = r$.

Алгоритм исследования системы линейных алгебраических уравнений

Найти ранг основной матрицы A и ранг расширенной матрицы $\overline{A}$:

1.	если ранги не равны $R(A) \neq R(\overline{A})$, то система несовместна;
2.	если ранги равны $R(A) = R(\overline{A}) = r$ и $r = n$ (n — число неизвестных), то заданная система имеет единственное решение;
3.	если ранги равны $R(A) = R(\overline{A}) = r$ и $r < n$, то система имеет множество решений, зависящих от $(n - r)$ свободных переменных.

Нахождение единственного решения систем линейных алгебраических уравнений

1. *Метод Крамера*

Если определитель основной матрицы системы линейных алгебраических уравнений отличен от нуля, то система имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ — определитель основной матрицы системы,

Δ_k — определитель, полученный заменой в определителе основной матрицы столбца из коэффициентов при неизвестной x_k столбцом свободных членов заданной системы, $k = \overline{1; n}$.

Алгоритм решения СЛАУ методом Крамера

1.	Используя теорему Кронекера-Капелли проверить СЛАУ на совместность;
2.	если система совместна, найти определитель основной матрицы системы, а затем вспомогательные определители;
3.	воспользоваться формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \ldots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$

Замечание 1:

Метод Крамера подходит для СЛАУ с квадратной матрицей A.

Замечание 2:

1. Если главный определитель $\Delta \neq 0$, то система уравнений *имеет единственное решение*;
2. если $\Delta = 0$ и хотя бы один из $\Delta_i \neq 0$, то система уравнений *не имеет решений*;
3. если $\Delta = 0$ и все $\Delta_i = 0$, то система уравнений имеет бесконечное множество решений.

2. *Метод обратной матрицы*

Алгоритм решения СЛАУ методом обратной матрицы

1.	Используя теорему Кронекера-Капелли исследовать систему линейных алгебраических уравнений на совместность;
2.	если система совместна, записать ее в матричном виде: $A \cdot X = B$
3.	найти обратную матрицу для основной матрицы A;
4.	найти решение по формуле $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} — обратная матрица к матрице A,

Замечание 1:

Метод обратной матрицы подходит только для СЛАУ с квадратной матрицей A.

Замечание 2:

Если определитель матрицы A равен нулю, то СЛАУ может быть несовместной или неопределенной.

3. *Метод последовательного исключения неизвестных* (*метод Гаусса*)

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса

1.	Используя теорему Кронекера-Капелли проверить СЛАУ на совместность;
2.	если система совместна, составить расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований привести ее к ступенчатому виду (прямой ход);
3.	по полученной матрице записать новую систему уравнений и решить её методом исключения переменных: начиная с последних (по номеру) переменных найти все остальные (обратный ход);

Замечание:

Метод Гаусса подходит для решения любых СЛАУ.

Пример:

Исследовать систему уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9; \\ x_1 - x_2 \ + 3x_3 = 2; \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25. \end{cases}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 3 & 4 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Ранги основной и расширенной матриц равны $R(A) = R(A) = 3$, система совместна, а т.к. количество неизвестных $n = 3$, то система совместна и определена (имеет единственное решение)

Пример:

Исследовать систему уравнений:

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5; \\ 3x_1 + 7x_2 - 22x_3 = 4. \end{cases}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -22 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & -10 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

т.е. $R(A) = 2$; $R(\overline{A}) = 3$, следовательно, система несовместна (решений нет)

Пример:

Исследовать систему уравнений:

в) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 5; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 8. \end{cases}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & -11 & -1 \\ 0 & 9 & 5 & -13 & -11 \\ 0 & 7 & 5 & -11 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & -11 & -1 \\ 0 & 9 & 5 & -13 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{68}{7} \end{array}\right).$$

Ранги основной и расширенной матриц равны $R(A) = R(\overline{A}) = 3$, система совместна, а т.к. количество неизвестных $n = 4 \neq 3$, то система совместна и неопределенна (имеет множество решений).

Пример:

Решить систему уравнений методом Крамера $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

Найдем значения определителя основной матрицы системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$.

Составим вспомогательные определители: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 15$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 5$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 10$, тогда по формулам Крамера $x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$

$x_1 = \dfrac{15}{5} = 3$, $x_2 = \dfrac{5}{5} = 1$, $x_3 = \dfrac{10}{5} = 2$.

Решение исходной системы: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Пример:

Решить систему уравнений матричным методом $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -6; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

Запишем систему в матричном виде $A \cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Тогда $X = A^{-1}B$.

Найдем обратную матрицу к матрице A методом союзной матрицы:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 10 \\ -8 & -7 & 18 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 10 \\ -8 & -7 & 18 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Пример:

Решить систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$

1. Прямой ход метода Гаусса (запишем расширенную матрицу $\overline{A} = (A|B)$, и приведем ее к ступенчатому виду):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & -4 & 0 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -11 & -3 & -5 \\ 0 & -8 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 11 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 11 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

2. Обратный ход метода Гаусса (запишем из расширенной матрицы систему и решим ее снизу вверх):

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1; \\ \qquad 11x_2 + 3x_3 = 5; \\ \qquad\qquad -x_3 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 1; \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение исходной системы: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Нахождение общего решения систем линейных алгебраических уравнений

Определение:

Базисными переменными совместной системы линейных алгебраических уравнений, ранг основной матрицы которой равен r, называются r переменных, коэффициенты при которых образуют базисный минор.

Определение:

Остальные переменные системы линейных алгебраических уравнений называются *свободными*.

Определение:

Общим решением системы линейных уравнений называется упорядоченная совокупность n чисел, в которой базисные переменные выражены через свободные переменные.

Определение:

Если в общем решении свободным неизвестным придать какие-нибудь числовые значения, то получим решение данной системы, называемое *частным*.

Пример:

Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4; \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

1. Запишем расширенную матрицу $\overline{A} = (A|B)$, и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Получаем, $R(A) = R(\overline{A}) = 2 = r$, n=5, то есть $r < n$. Значит, по теореме Кронекера-Капелли СЛАУ имеет бесконечное множество решений, зависящих от (n – r)=5–2=3 свободных переменных.

2. Запишем из расширенной матрицы систему и решим ее снизу вверх:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ \quad -4x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$$

Пусть *свободными переменными* будут неизвестные x_3, x_4, x_5, тогда *базисными переменными* будут x_1, x_2.

Получим *общее решение СЛАУ*:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}s + \frac{3}{4}v - t + \frac{5}{4}; \\ x_2 = \frac{7}{4}s + \frac{7}{4}v - \frac{1}{4}; \\ x_3 = s; \\ x_4 = v; \\ x_5 = t. \end{cases}$$

Обозначим $s = 4$, $v = -4$, $t = 1$, получим *частное решение СЛАУ*:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{4}; \\ x_2 = -\frac{1}{4}; \\ x_3 = 4; \\ x_4 = -4; \\ x_5 = 1. \end{cases}$$