Лекция 4.

4. Системы дифференциальных уравнений.

4.1. Общие определения. Нормальные системы дифференциальных уравнений.

- Существуют процессы, где одной функции недостаточно для описания процесса. Далее t - независимая переменная; $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ (или $x(t),\, y(t),\, z(t)$ если функций не больше трех) - неизвестные функции.

Определение. Системой дифференциальных уравнений называют совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимые переменные, искомые функции и их производные.

Примеры.

- 1) $\begin{cases} x' = 2x + y + t + 1, \\ y' = 3x - 4y + 6t. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} tx_1'' + 3x_2' - 2x_1x_3 = 0, \\ 2x_2'' + x_3'' - 2tx_1 = 0, \\ x_3' + 2x_1 + tx_2 = 0. \end{cases}$
- Решением системы дифференциальных уравнений называют совокупность функций $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$, которая при подстановке в уравнения превращает их в тождества.
- **Определение.** Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система уравнений вида

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Многие системы дифференциальных уравнений можно привести к нормальной системе.

- **Пример.** $$\begin{cases} x' + 2y' - x = 0, \\ x' - 3y' + y = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}\left(3x - 2y + 2t\right), \\ y' = \dfrac{1}{5}\left(x + y - t\right). \end{cases}$$

- Некоторые системы дифференциальных уравнений нельзя привести к нормальной системе. Их рассматривать не будем.
- **Пример.** $$\begin{cases} x' + y' - tx = 0, \\ x' + y' + y = 0. \end{cases}$$

Система дифференциальных уравнений, содержащая производные высших порядков, может быть приведена к нормальной системе.

- **Пример.** $\begin{cases} x_1'' + tx_2 = 0, \\ x_2'' + 2x_1' - x_2 = 0. \end{cases}$
- Введем дополнительные функции $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4. \end{cases}$
- Тогда

$$\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \\ x_3' = -tx_2, \\ x_4' = x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

- Одно дифференциальное уравнение n - го порядка может быть сведено к нормальной системе дифференциальных уравнений.
- **Пример.** $x''' = f\left(t, x, x', x''\right).$

$$y = x', \; z = y' = x''.$$

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = f\left(t, x, y, z\right). \end{cases}$$

Нормальная система дифференциальных уравнений, обычно, может быть заменена одним дифференциальным уравнением, порядок которого равен числу уравнений системы.

- **Пример** $\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = x - y + z. \end{cases}$ $x'' = y' = z,\ x''' = z' = x - y + z,\ \Rightarrow$ $\Rightarrow x''' = x - x' + x''.$

$$r^3 - r^2 + r - 1 = \left(r^2 + 1\right)\left(r - 1\right) = 0.$$

$r_{1,2} = \pm i,\ \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 1.$ $r_3 = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 0,\ s = 1.$

$$x = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t.$$

$$y = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t,\ z = C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t.$$

Обратный случай, когда система дифференциальных уравнений не может быть сведена к одному дифференциальному уравнению.

- **Пример**

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = z, \\ z' = y. \end{cases}$$

- Первое уравнение не зависит от остальных.

$$x' = x, \; y'' = z' = y.$$

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \; z = y' = C_1 e^t - C_2 e^{-t}, \; x = C_3 e^t.$$

Теорема.

- Общее решение нормальной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$ имеет вид $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_1, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(t, C_1, \dots, C_n), \end{cases}$ где $C_1, \dots, C_n$ - произвольные постоянные.
- $C_1, \dots, C_n$ могут входить не во все уравнения.
- Задание начальных условий $x_1\big|_{t=t_0} = x_{10}, \dots, \; x_n\big|_{t=t_0} = x_{n0}$

дает частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0, C_1, \dots, C_n) = x_{10}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(t_0, C_1, \dots, C_n) = x_{n0}. \end{cases}$$

Теорема.

- Если правые части нормальной системы дифференциальных уравнений непрерывны вместе со своими частными производными в окрестности значений $t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$, то в достаточно малом интервале $\left[t_0 - h, t_0 + h\right]$ существует единственная система функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, являющаяся решением системы и удовлетворяющая начальным условиям.

4.2. Системы линейных дифференциальных уравнений.

- Однородная система линейных дифференциальных уравнений $$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n, \end{cases}$$
- где $a_{ij}(t)$ - непрерывные функции.

- 1) Если известно частное решение системы линейных дифференциальных уравнений $x_{11}(t), \ldots, x_{n1}(t)$, то $C_1x_{11}(t), \ldots, C_1x_{n1}(t)$ тоже является решением системы, где C_1 - произвольная постоянная.

2) Если известны два частных решения системы линейных дифференциальных уравнений $x_{11}(t),...,x_{n1}(t)$ и $x_{12}(t),...,x_{n2}(t),$ то $x_{11}(t)+x_{12}(t),...,x_{n1}(t)+x_{n2}(t)$ тоже является решением системы.

- 3) Если известны n частных решений системы $x_{11}(t),...,x_{n1}(t);\ \ldots;\ x_{1n}(t),...,x_{nn}(t),$ то

$$\begin{cases} x_1 = C_1 x_{11} + ... + C_n x_{n1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = C_1 x_{1n} + ... + C_n x_{nn} \end{cases} \qquad (*)$$

  тоже является решением системы линейных дифференциальных уравнений.

- Совокупность *n* линейно независимых решений образует фундаментальную систему решений.
- Решение (*) является общим решением однородной системы линейных дифференциальных уравнений.

Общее решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

есть сумма общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.

•

- При заданных начальных условиях

$$x_1\big|_{t=t_0} = x_{10},\ x_n\big|_{t=t_0} = x_{n0}$$

можно получить частное решение системы линейных дифференциальных уравнений. Для этого необходимо подставить начальные условия в общее решение системы (*). Получим алгебраическую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 x_{110} + \ldots + C_n x_{n10} = x_{10}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 x_{1n0} + \ldots + C_n x_{nn0} = x_{n0}. \end{cases}$$

- Решая систему, получим частное решение системы линейных дифференциальных уравнений. Для того, чтобы система алгебраических уравнений имела единственное решение, необходимо, чтобы определитель

$$W = \begin{vmatrix} x_{110} & \ldots & x_{n10} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n0} & \vdots & x_{nn0} \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

- Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \qquad a_{ij} = const.$$

- Систему можно свести к одному дифференциальному уравнению n - го порядка. Будем искать частные решения в виде $x_1 = k_1 e^{rt}, \ldots, x_n = k_n e^{rt}$,
где $k_1, \ldots, k_n, r$ - неопределенные постоянные.

Дифференцируя, получим $$\begin{cases} k_1 r e^{rt} = a_{11} k_1 e^{rt} + \ldots + a_{1n} k_n e^{rt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_n r e^{rt} = a_{n1} k_1 e^{rt} + \ldots + a_{nn} k_n e^{rt}. \end{cases}$$

- Отсюда $$\begin{cases} (a_{11} - r) k_1 + \ldots + a_{1n} k_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} k_1 + \ldots + (a_{nn} - r) k_n = 0. \end{cases}$$

- Чтобы система однородных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, определитель системы равнялся нулю

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - r) & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{nn} - r) \end{vmatrix} = 0.$$

- Раскрыв определитель, получим характеристическое уравнение.

Предположим, что корни действительные и простые.

Рассмотрим решение на примере системы трех уравнений.

Пусть корень равен r_1

$$\begin{cases} (a_{11}-r_1)k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0, \\ a_{21}k_1 + (a_{22}-r_1)k_2 + a_{23}k_3 = 0, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + (a_{33}-r_1)k_3 = 0. \end{cases}$$

- Определитель системы равен нулю. Примем, что если r_1 - простой корень, то, по крайней мере, один из миноров 2-го порядка не равен нулю. Тогда одно из уравнений следует из остальных. Решение системы зависит от одной произвольной постоянной.
- Пусть первые два уравнения линейно независимы. Тогда одно из решений будет

$$k_1^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{12} & C_1 \\ a_{22}-r_1 & C_2 \end{vmatrix},\ k_2^{(1)} = \begin{vmatrix} C_1 & a_{22}-r_1 \\ C_2 & a_{12} \end{vmatrix},\ k_3^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11}-r_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-r_1 \end{vmatrix}.$$

- Все остальные решения получаются умножением чисел $k_1^{(1)},\ k_2^{(1)},\ k_3^{(1)}$ на одну и ту же произвольную постоянную.

Поступая так со всеми корнями характеристического уравнения, найдем три системы функций, каждая из которых является решением системы линейных дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
k_1^{(1)} e^{r_1 t},\ k_2^{(1)} e^{r_1 t},\ k_3^{(1)} e^{r_1 t};\\
k_1^{(2)} e^{r_2 t},\ k_2^{(2)} e^{r_2 t},\ k_3^{(2)} e^{r_2 t};\\
k_1^{(3)} e^{r_3 t},\ k_2^{(3)} e^{r_3 t},\ k_3^{(3)} e^{r_3 t}.
\end{gathered}
$$

- Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений имеет вид

$$
\begin{aligned}
x_1 &= C_1 k_1^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 k_1^{(2)} e^{r_2 t} + C_3 k_1^{(3)} e^{r_3 t},\\
x_2 &= C_1 k_2^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 k_2^{(2)} e^{r_2 t} + C_3 k_2^{(3)} e^{r_3 t},\\
x_3 &= C_1 k_3^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 k_3^{(2)} e^{r_2 t} + C_3 k_3^{(3)} e^{r_3 t}.
\end{aligned}
$$

Примеры

4. Найти решение задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 7y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 4y \end{cases} \qquad x(0) = -3,\ y(0) = -1$$

<u>Решение</u>: Перепишем системы в механических обозначениях:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 7y \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases}$$

Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k - 15 = 0 \Rightarrow k_1 = -5,\ k_2 = 3.$

Запишем общее решение: $x(t) = C_1e^{-5t} + C_2e^{3t}$

Выразив из 1-го уравнения y и подставив в него x(t), получим решение y(t)

$$y(t) = \frac{\dot{x} - 2x}{7} = \frac{-5C_1e^{-5t} + C_2e^{3t} - 2C_1e^{-5t}\,2C_2e^{3t}}{7} = -C_1e^{-5t} + \frac{C_2}{7}e^{3t}$$

Найдем из начальных условий C_1 и C_2.

$$x(0) = -C_1 + C_2 = -3$$

$$y(0) = -C_1 + \frac{C_2}{7} = -1 \Rightarrow \frac{8}{7}C_2 = -4 \Rightarrow C_2 = -\frac{7}{2},\ C_1 = 1 + \frac{C_2}{7} = \frac{1}{2}$$

Ответ:

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-5t} - \frac{7}{2}C_2e^{3t}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-5t} - \frac{1}{2}e^{3t}$$

5. Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 2y - e^{2t} \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$$

Перепишем систему в механических обозначениях:

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y - e^{2t} \\ \dot{y} = 3x + 6y \end{cases}$$

Решим систему методом исключения, для чего продифференцируем второе уравнение системы (как более простое).

$\ddot{y} = 3\dot{x} + 6\dot{y}$ (1) и выразим из него же x:

$$x = \frac{\dot{y} - 6y}{3} \quad (2)$$

Подставим в (1)

$$\ddot{y} = 3(5x + 2y - e^{2t}) + 6(3x + 6y) = 15x + 6y - 3e^{2t} + 18x + 36y =$$
$$= 33x + 42y - 3e^{2t}$$

Подставим вместо x выражение (2):

$$\ddot{y} = 11(\dot{y} - 6y) + 42y - 3e^{2t}$$

Раскроем скобки и перенесем: $\ddot{y} - 11\dot{y} + 24y = -3e^{2t}$

Решаем полученное линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 11k + 24 = 0,\ k_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2},\ k_1 = 8,\ k_2 = 3$$

$$y_{oo} = C_1 e^{8t} + C_2 e^{3t}$$

Найдем $y_{чн}$ в виде: $y_{чн} = Ae^{2t}$

$$\begin{array}{r|l} 24 & y_{чн} = Ae^{2t} \\ -11 & y'_{чн} = 2Ae^{2t} \\ 1 & y''_{чн} = 4Ae^{2t} \end{array} \qquad \begin{gathered} 24A - 22A + 4A = -3 \\ 6A = -3 \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \end{gathered}$$

$$y_{он}(t) = C_1e^{8t} + C_2e^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$x(t) = \frac{\dot{y} - 6y}{3} = \frac{8C_1e^{8t} + 3C_2e^{3t} - e^{2t} - 6C_1e^{8t} - 6C_2e^{3t} + 3e^{2t}}{3} = \frac{2}{3}C_1e^{8t} - C_2e^{3t} + \frac{2}{3}e^{2t}$$

$$\text{Ответ:}\begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{3}C_1e^{8t} - C_2e^{3t} + \dfrac{2}{3}e^{2t} \\ y(t) = C_1e^{8t} + C_2e^{3t} - \dfrac{1}{2}e^{2t} \end{cases}$$