

Решение задач №19

Проценты

Для справки

В некоторых задачах можно использовать формулу суммы n -первых членов геометрической прогрессии:

$$1 + (1 + a) + (1 + a)^2 + (1 + a)^3 + (1 + a)^4 + \dots$$

$$\text{где } b_1 = 1, \quad q = 1 + a$$

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1(1 - (1 + a)^n)}{1 - (1 + a)} = \frac{1 - (1 + a)^n}{-a} = \frac{(1 + a)^n - 1}{a}$$

Степан хочет взять в кредит 1,2 млн. рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Степан взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 290 тысяч рублей?

Решение.

	Рубли	%
Сумма кредита:	1,2 млн. руб.	100%

Сумма кредита после 1 года:	x_1 млн. руб.	110%
-----------------------------	-----------------	------

$$x_1 = 1,2 \cdot 110 : 100 = 1,2 \cdot 1,1 = 1,32 \text{ млн. руб.}$$

После первого платежа в 0,29 млн. руб. остаток составит:

$$1,32 - 0,29 = 1,03 \text{ млн. руб.}$$

Остаток кредита:	1,03 млн. руб.	100%
------------------	----------------	------

Сумма кредита после 2 года:	x_2 млн. руб.	110%
-----------------------------	-----------------	------

$$x_2 = 1,03 \cdot 1,1 = 1,133 \text{ млн. руб.}$$

После второго платежа в 0,29 млн. руб. остаток составит:

$$1,133 - 0,29 = 0,843 \text{ млн. руб.}$$

Степан хочет взять в кредит 1,2 млн. рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Степан взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 290 тысяч рублей?

Решение.

	<i>Рубли</i>	<i>%</i>
Остаток кредита:	<i>0,41103 млн. руб.</i>	<i>100%</i>
Сумма кредита после 5 года:	<i>x_5 млн. руб.</i>	<i>110%</i>
	<i>$x_5 = 0,41103 \cdot 1,1 = 0,452133$ млн. руб.</i>	
После пятого платежа в 0,29 млн. руб. остаток составит:	<i>$0,452133 - 0,29 = 0,162133$ млн. руб.</i>	

Остаток кредита:	<i>0,162133 млн. руб.</i>	<i>100%</i>
Сумма кредита после 6 года:	<i>x_6 млн. руб.</i>	<i>110%</i>
	<i>$x_6 = 0,162133 \cdot 1,1 = 0,1783463$ млн. руб.</i>	

Шестого платежа достаточно для погашения кредита полностью.

Ответ: 6.

№2 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.

	<i>Рубли</i>	<i>%</i>
Сумма кредита:	$4,29$ млн. руб.	100%
Сумма кредита после 1 года:	$?$ млн. руб.	$114,5\%$
	$?$	$= 4,29 \cdot 1,145$ млн. руб.
После первого платежа в X млн. руб. остаток составит:	$(4,29 \cdot 1,145 - X)$ млн. руб.	
Остаток кредита:	$(4,29 \cdot 1,145 - X)$ млн. руб.	100%
Сумма кредита после 2 года:	$?$ млн. руб.	$114,5\%$
	$?$	$= (4,29 \cdot 1,145 - X) \cdot 1,145$ млн. руб.

Это и есть второй платеж в X млн. руб. Получим уравнение:

$$(4,29 \cdot 1,145 - X) \cdot 1,145 = X \text{ млн. руб.}$$

31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.

$$(4,29 \cdot 1,145 - X) \cdot 1,145 = X$$

$$4,29 \cdot 1,145^2 - 1,145 X = X$$

$$4,29 \cdot 1,145^2 = (1,145 + 1) X$$

$$X = 4,29 \cdot 1,145^2 : (1,145 + 1)$$

$$X = 4,29 : (1,145 + 1) \cdot 1,145^2$$

$$X = 2 \cdot 1,145^2$$

$$X = 2,62205$$

Ответ: 2 622 050 руб.

31 декабря 2014 года Сергей взял в банке 6 944 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая-31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение.

	<i>Рубли</i>	<i>%</i>
Сумма кредита:	<i>6 944 000 руб.</i>	<i>100%</i>
Сумма кредита после 1 года:	<i>? руб.</i>	<i>112,5%</i>
	<i>? = 6 944 000 · 1,125 руб.</i>	
После первого платежа в X руб. остаток составит:	<i>(6 944 000 · 1,125 – X) руб.</i>	
Остаток кредита:	<i>(6 944 000 · 1,125 – X) руб.</i>	<i>100%</i>
Сумма кредита после 2 года:	<i>? руб.</i>	<i>112,5%</i>
	<i>? = (6 944 000 · 1,125 – X) · 1,125 руб.</i>	

31 декабря 2014 года Сергей взял в банке 6 944 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая-31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение.

	<i>Рубли</i>	<i>%</i>
<i>Остаток кредита:</i>	$(6\,944\,000 \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125$ руб.	100%
<i>Сумма кредита после 3 года:</i>	? руб.	112,5%
	$? = 6\,944\,000 \cdot 1,125$ руб.	

После третьего платежа в X руб. остаток составит:
 $((6\,944\,000 \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125$ руб.

Это и есть третий платеж в X млн. руб. Получим уравнение:
 $((6\,944\,000 \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125 = X$

№3

31 декабря 2014 года Сергей взял в банке 6 944 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая-31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение.

$$((6\,944\,000 \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125 = X$$

$$(6\,944\,000 \cdot 1,125^2 - 1,125 X - X) \cdot 1,125 = X$$

$$6\,944\,000 \cdot 1,125^3 - 1,125^2 X - 1,125 X = X$$

$$6\,944\,000 \cdot 1,125^3 = 1,125^2 X + 1,125 X + X$$

$$6\,944\,000 \cdot 1,125^3 = (1,125^2 + 1,125 + 1) X$$

$$X = 6\,944\,000 \cdot 1,125^3 : (1,125^2 + 1,125 + 1)$$

$$X = \frac{6\,944\,000 \cdot 1,125^3}{1,125^2 + 1,125 + 1}$$

$$X = 2\,916\,000$$

Ответ: 2 916 000 руб.

№4

31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6902000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение.

	<i>Рубли</i>	<i>%</i>
<i>Сумма кредита:</i>	<i>6 902 000 руб.</i>	<i>100%</i>
<i>Сумма кредита после 1 года:</i>	<i>? руб.</i>	<i>112,5%</i>
	<i>? = 6 902 000 · 1,125 руб.</i>	
<i>После первого платежа в X руб. остаток составит:</i>	<i>(6 902 000 · 1,125 – X) руб.</i>	
<i>Остаток кредита:</i>	<i>(6 902 000 · 1,125 – X) руб.</i>	<i>100%</i>
<i>Сумма кредита после 2 года:</i>	<i>? руб.</i>	<i>112,5%</i>
	<i>? = (6 902 000 · 1,125 – X) · 1,125 руб.</i>	

№4

31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6902000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение.

	Рубли	%
Остаток кредита:	$(6\ 902\ 000 \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125$ руб.	100%
Сумма кредита после 3 года:	? руб.	112,5%
	$? = 6\ 902\ 000 \cdot 1,125$ руб.	

После третьего платежа в X руб. остаток составит:
 $((6\ 902\ 000 \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125$ руб.

Остаток кредита:	$((6\ 902\ 000 \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125$ руб.	100%
Сумма кредита после 4 года:	? руб.	112,5%
	$? = (((6\ 902\ 000 \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125$ руб.	

№4

31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6902000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение.

Это и есть четвертый платеж в X млн. руб. Получим уравнение:

$$(((6\ 902\ 000 \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125 = X$$

$$((6\ 902\ 000 \cdot 1,125^2 - 1,125 X - X) \cdot 1,125 - X) \cdot 1,125 = X$$

$$(6\ 902\ 000 \cdot 1,125^3 - 1,125^2 X - 1,125 X - X) \cdot 1,125 = X$$

$$6\ 902\ 000 \cdot 1,125^4 - 1,125^3 X - 1,125^2 X - 1,125 X = X$$

$$X = 6\ 902\ 000 \cdot 1,125^4 : (1,125^3 + 1,125^2 + 1,125 + 1)$$

$$X = \frac{6\ 902\ 000 \cdot 1,125^4}{1,125^3 + 1,125^2 + 1,125 + 1}$$

$$X = 2\ 296\ 350$$

Ответ: 2 296 350 руб.

№5 31 декабря 2014 года Родион взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Родион переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 674 100 рублей, то за 2 года. Под какой процент Родион взял деньги в банке?

Решение.

Рассмотрим кредит на два года:

	Рубли	%
Сумма кредита:	x руб.	100%
Сумма кредита после 1 года:	? руб.	$100+a\%$
	$? = x \cdot (100 + a) : 100 = x \cdot (1 + 0,01a)$ руб.	
После первого платежа в 2 674 100 руб. остаток составит:	$(x \cdot (1 + 0,01a) - 2\,674\,100)$ руб.	
Остаток кредита:	$(x \cdot (1 + 0,01a) - 2\,674\,100)$ руб.	100%
Сумма кредита после 2 года:	? руб.	$100+a\%$
	$? = (x \cdot (1 + 0,01a) - 2\,674\,100) \cdot (1 + 0,01a)$ руб.	
Это и есть второй платеж в 2 674 100 руб.		

Получим первое уравнение:

$$2\,674\,100 = (x \cdot (1 + 0,01a) - 2\,674\,100) \cdot (1 + 0,01a)$$

№5 31 декабря 2014 года Родион взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Родион переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 674 100 рублей, то за 2 года. Под какой процент Родион взял деньги в банке?

Решение.

Рассмотрим кредит на четыре года:

Рубли %

Сумма кредита: x руб. 100%

Сумма кредита после 1 года: ? руб. $100+a\%$

$$? = x \cdot (100 + a) : 100 = x \cdot (1 + 0,01a) \text{ руб.}$$

После первого платежа в 1 464 100 руб. остаток составит:

$$(x \cdot (1 + 0,01a) - 1\,464\,100) \text{ руб.}$$

Остаток кредита: $(x \cdot (1 + 0,01a) - 1\,464\,100)$ руб. 100%

Сумма кредита после 2 года: ? руб. $100+a\%$

$$? = (x \cdot (1 + 0,01a) - 1\,464\,100) \cdot (1 + 0,01a) \text{ руб.}$$

После второго платежа в 1 464 100 руб. остаток составит:

$$((x \cdot (1 + 0,01a) - 1\,464\,100) \cdot (1 + 0,01a) - 1\,464\,100) \text{ руб.}$$

№5 31 декабря 2014 года Родион взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Родион переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 674 100 рублей, то за 2 года. Под какой процент Родион взял деньги в банке?

Решение.

$$\begin{cases} 2764100 = (x \cdot (1 + 0,01a) - 2764100) \cdot (1 + 0,01a) \\ 1464100 = (((x \cdot (1 + 0,01a) - 1464100) \cdot (1 + 0,01a) - 1464100) \cdot (1 + 0,01a) - 1464100) \cdot (1 + 0,01a) \end{cases}$$

Пусть $(1 + 0,01a) = y$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} 2764100 = (x \cdot y - 2764100) \cdot y \\ 1464100 = (((x \cdot y - 1464100) \cdot y - 1464100) \cdot y - 1464100) \cdot y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2764100 = (x \cdot y - 2764100) \cdot y \\ 1464100 = xy^4 - 1464100y^3 - 1464100y^2 - 1464100y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2764100 = (xy - 2764100) \cdot y \\ 1464100 = y(xy^3 - 1464100y^2 - 1464100y - 1464100) \end{cases}$$

№5 31 декабря 2014 года Родион взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Родион переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 674 100 рублей, то за 2 года. Под какой процент Родион взял деньги в банке?

Решение.

$$\begin{cases} 2764100 = (xy - 2764100) \cdot y \\ 1464100 = y(xy^3 - 1464100y^2 - 1464100y - 1464100) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2764100 = xy^2 - 2764100y \\ 1464100 = xy^4 - 1464100y^3 - 1464100y^2 - 1464100y \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy^2 = 2764100(1 + y) \\ xy^4 = 1464100y^3 + 1464100y^2 + 1464100y + 1464100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy^2 = 2764100(1 + y) \\ xy^4 = 1464100(y^3 + y^2 + y + 1) \end{cases}$$

№5 31 декабря 2014 года Родион взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Родион переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 674 100 рублей, то за 2 года. Под какой процент Родион взял деньги в банке?

Решение.

$$\begin{cases} x = \frac{2764100(1+y)}{y^2} \\ xy^4 = 1464100(y^2(y+1) + (y+1)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2764100(1+y)}{y^2} \\ \frac{2764100(1+y)}{y^2} y^4 = 1464100(y^2+1)(y+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2764100(1+y)}{y^2} \\ \frac{2764100(1+y)}{y^2} y^4 = 1464100(y^2+1)(y+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2764100(1+y)}{y^2} \\ 2764100y^2 = 1464100(y^2+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2764100(1+y)}{y^2} \\ (2764100 - 1464100)y^2 = 1464100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2764100(1+y)}{y^2} \\ y^2 = 1,21 \end{cases}$$

$$y = 1,1$$

$$1 + 0,01a = 1,1$$

$$a = 10\%$$

Ответ: 10%.

В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 7000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 2000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение.

До продажи ценной бумаги ее стоимость увеличивается ровно на 2000 руб. в год.

Продавать надо тогда, когда 10% от текущей стоимости акции окажутся больше, чем 2000 руб.

После 1 года процент от продажи равен: $(7000 + 2000) : 100\% \cdot 10\% = 900$ руб.

После 2 года – $(7000 + 2000 + 2000) : 100\% \cdot 10\% = 1100$ руб.

После 3 года – $(7000 + 2000 \cdot 3) : 100\% \cdot 10\% = 1300$ руб.

После 4 года – $(7000 + 2000 \cdot 4) : 100\% \cdot 10\% = 1500$ руб.

После 5 года – $(7000 + 2000 \cdot 5) : 100\% \cdot 10\% = 1700$ руб.

После 6 года – $(7000 + 2000 \cdot 6) : 100\% \cdot 10\% = 1900$ руб.

После 7 года – $(7000 + 2000 \cdot 7) : 100\% \cdot 10\% = 2100$ руб.

Т.е. в течении 7 лет Алексей должен хранить ценную бумагу, а в начале 2008-го года продать.

Ответ: 2008.

- №7** 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
- Известно, что за последние 12 месяцев нужно выплатить банку 1597,5 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Решение.

Пусть взяли в кредит 15 января x рублей, тогда

1-го февраля долг вырос на 1% и составил $1,01x$ руб.

Со 2-го по 14-е февраля нужно выплатить долг “на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца” $x/24 + 0,01x$ руб.

После чего сумма долга на конец февраля составит

$$1,01x - x/24 - 0,01x = 23x/24 \text{ руб.}$$

В марте с учетом процентной ставки долг равен $23x/24 \cdot 1,01$ руб.

К оплате со 2-го по 14-е марта сумма долга такова $x/24 + 23x/24 \cdot 1,01$ руб.

После чего сумма долга после 15 марта составит

$$23x/24 - (x/24 + 23x/24 \cdot 1,01) = 22x/24 \text{ руб.}$$

И так далее ...

- №7** 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
- Известно, что за последние 12 месяцев нужно выплатить банку 1597,5 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Решение.

Общая сумма выплат за 24 месяца составляет:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(x/24 + 0,01x) + (x/24 + 23x/24 \cdot 1,01) + (x/24 + 22/24x \cdot 1,01) + \dots + (x/24 + 13/24x \cdot 1,01)}_{\text{(за первый год обслуживания кредита)}} \\ & + \underbrace{(x/24 + 12x/24 \cdot 1,01) + (x/24 + 11x/24 \cdot 1,01) + (x/24 + 10/24x \cdot 1,01) + \dots + (x/24 + 1/24x \cdot 1,01)}_{\text{(за второй год обслуживания кредита)}} = \\ & = x + 0,01x/24 \cdot (24 + 23 + 22 + \dots + 12 + 11 + 10 + \dots + 2 + 1) \end{aligned}$$

За последние 12 месяцев сумма всех выплат равна 1597,5 рублей, а с другой стороны

$$0,5x + 0,01x/24 \cdot (12 + 11 + 10 + \dots + 2 + 1) = 0,5x + 0,01x/24 \cdot 78 = 0,5325x$$

Приравнявая, получим уравнение

$$0,5325x = 1597,5$$

$$x = 3000$$

