

Решение неравенств второй степени с одной переменной





*«С тех пор как существует мирозданье,
Такого нет, кто б не нуждался в знанье.
Какой мы ни возьмем язык и век,
Всегда стремится к знанью человек »*

персидско-таджикский поэт Рудаки

Найдите число корней уравнения $ax^2+bx+c=0$
и знак коэффициента a по рисунку.

1)



2)



3)



4)



5)



6)



Решение неравенств второй степени с одной переменной

Неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ и } ax^2 + bx + c < 0,$$

$$(ax^2 + bx + c \geq 0; ax^2 + bx + c \leq 0)$$

где x – переменная, a , b и c – некоторые числа и $a \neq 0$, называют неравенствами второй степени с одной переменной







Решение неравенства

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ или } ax^2 + bx + c < 0$$

$$(ax^2 + bx + c \geq 0; ax^2 + bx + c \leq 0)$$

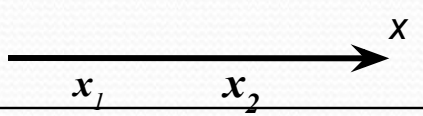


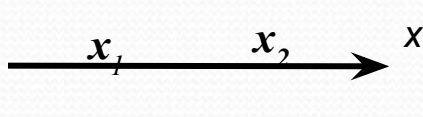
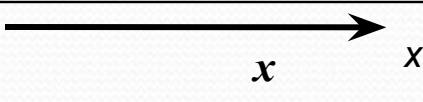

можно рассматривать как нахождение промежутков, в которых функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные или отрицательные значения

Для этого достаточно проанализировать, как расположен график функции $y = ax^2 + bx + c$ в координатной плоскости: куда направлены ветви параболы и пересекает ли парабола ось x

D>0	D=0	D<0	
<p>1</p> 	<p>2</p> 	<p>3</p> 	<p>a>0</p>
<p>4</p> 	<p>5</p> 	<p>6</p> 	<p>a<0</p>

Поэтому существует 12 различных случаев неравенств второй степени $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$
 Решения занесены в таблицу 1.

Таблица 1

1	a > 0	D > 0	1) $ax^2 + vx + c > 0$		$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
			2) $ax^2 + vx + c < 0$		$(x_1; x_2)$
2		D = 0	1) $ax^2 + vx + c > 0$		$(-\infty; x) \cup (x; +\infty)$
			2) $ax^2 + vx + c < 0$		решений нет
3		D < 0	1) $ax^2 + vx + c > 0$		x – любое число
			2) $ax^2 + vx + c < 0$		решений нет
4	a < 0	D > 0	1) $ax^2 + vx + c > 0$		$(x_1; x_2)$
			2) $ax^2 + vx + c < 0$		$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
5		D = 0	1) $ax^2 + vx + c > 0$		решений нет
			2) $ax^2 + vx + c < 0$		$(-\infty; x) \cup (x; +\infty)$
6		D < 0	1) $ax^2 + vx + c > 0$		решений нет
			2) $ax^2 + vx + c < 0$		x – любое число

Алгоритм решения квадратного неравенства

Рассмотреть функцию $y=ax^2 + bx + c$

- . Найти нули функции (решить уравнение)**
- . Определить направление ветвей параболы**
- . Схематично построить график функции.**
- . Учитывая знак неравенства, выписать ответ.**

№1. Решить неравенство

$$5x^2+9x-2>0$$

Найдем корни
квадратного
трехчлена

$$5x^2+9x-2=0$$

$$x_1 = 1/5; x_2 = -2$$

Отметим точки

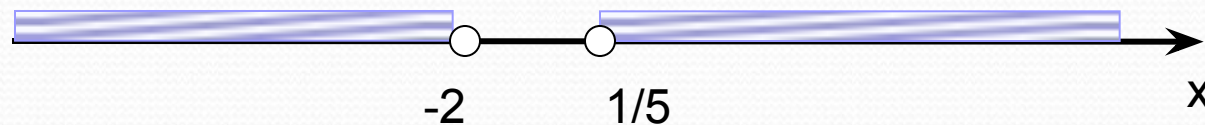
$$x_1 = 1/5; x_2 = -2$$

на оси Ox

Изобразим
схематически
график функции
 $y = 5x^2+9x-2$

Найдем
промежутки, в
которых $y > 0$
(имеет знак +)

$$y = 5x^2+9x-2$$



Заштрихуем эти
промежутки

$y > 0$ на промежутках
 $(-\infty; -2) \cup (1/5; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1/5; +\infty)$

В Табл. 1 это
пример 1.1

№1 а

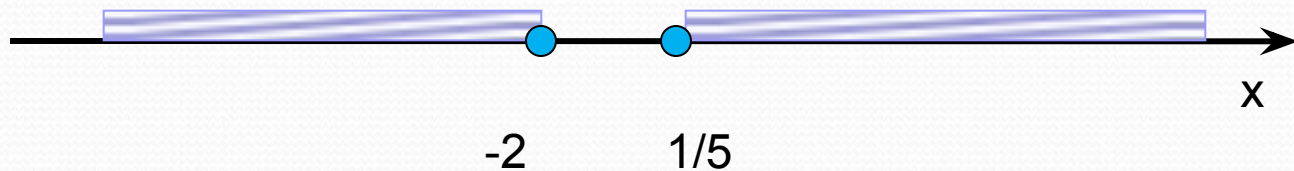
$$5x^2+9x-2 \geq$$

0

Выясним, чем отличается данное неравенство от предыдущего

$$y = 5x^2 + 9x - 2$$

Неравенство нестрогое, корни квадратного трехчлена $1/5$ и -2 входят в промежуток, точки $1/5$ и -2 на оси Ox будут заштрихованы



$$y \geq 0$$

на промежутках
 $(-\infty; -2] \cup [1/5; +\infty)$

Решение отличается от предыдущего только записью ответа

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [1/5; +\infty)$

№2

$$5x^2 + 9x - 2 <$$

0

$$5x^2 + 9x - 2 = 0$$

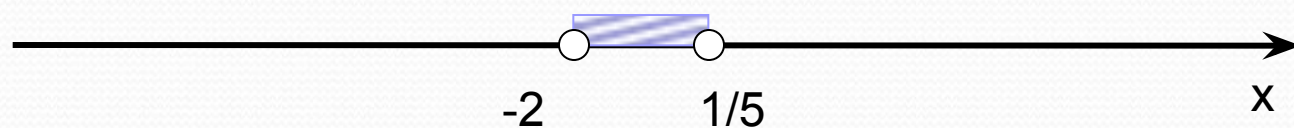
$$x_1 = 1/5$$

$$x_2 = -2$$

$$y = 5x^2 + 9x - 2$$

$$y < 0$$

на промежутке
(-2; 1/5)



Ответ: (-2; 1/5)

В Табл.1 это
пример 1.2

№3

$$-5x^2+9x+2 <$$

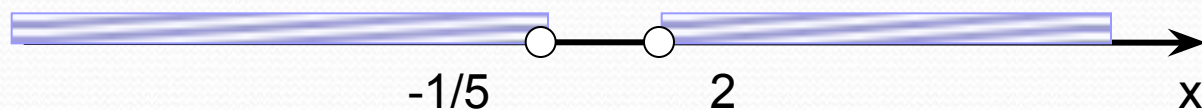
$$0 \quad 5x^2+9x+2=0$$

$$x_1 = -1/5$$

$$x_2 = 2$$

$$y < 0$$

на промежутках
 $(-\infty; -1/5) \cup (2; +\infty)$



$$y = -5x^2 + 9x + 2$$

Ответ: $(-\infty; -1/5) \cup (2; +\infty)$

В Табл.1
пример 4.2

№4

$$-5x^2 + 9x + 2 >$$

$$0$$
$$-5x^2 + 9x + 2 = 0$$

$$x_1 = -1/5$$

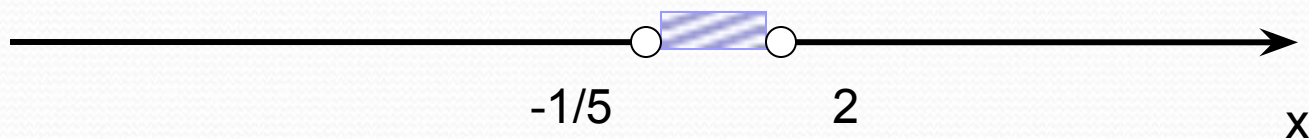
$$x_2 = 2$$

$y > 0$

на промежутке $(-1/5; 2)$

Ответ: $(-1/5; 2)$

В Табл.1
пример 4.1



$$y = -5x^2 + 9x + 2$$

№5

$$x^2 - 8x + 16 > 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = 4$$

$$y = x^2 - 8x + 16$$

+

$$y > 0$$

на промежутках
 $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$



Ответ: $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$

В Табл.1
пример 2.1

№6

$$x^2 - 8x + 16 < 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = 4$$

$$y = x^2 - 8x + 16$$

$y < 0$:

таких промежутков
нет



Ответ: решений нет

В Табл.1
пример 2.2

№6a

$$x^2 - 8x + 16 \leq 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = 4$$

$$y = x^2 - 8x + 16$$

$$y \leq 0 :$$

$$x = 4$$

Ответ: 4



№7

$$-x^2+8x-16<0$$

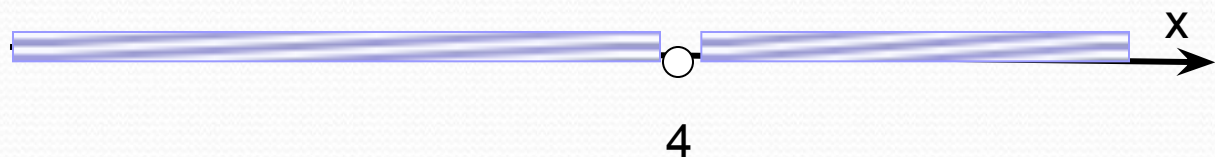
$$-x^2+8x-16=0$$

$$x=4$$

$$y<0$$

на промежутках

$$(-\infty;4) \cup (4;+\infty)$$



$$y = -x^2 + 8x - 16$$

Ответ: $(-\infty;4) \cup (4;+\infty)$

В Табл.1
пример 5.2

№8

$$-x^2+8x-16>0$$

$$-x^2+8x-16=0$$

$$x=4$$

$y>0$:

таких промежутков нет

Ответ: решений нет

$$y = -x^2 + 8x - 16$$

В Табл.1
пример 5.1



№9

$$x^2 - 3x + 4 < 0$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

решений нет

Нет точек пересечения
параболы $y = x^2 - 3x + 4$
с осью Ox

$$y = x^2 - 3x + 4$$

$y < 0$:
таких промежутков нет

решений нет

Ответ: решений нет

В Табл.1
пример 3.2



№10

$$x^2 - 3x + 4 > 0$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

решений нет,
нет точек
пересечения
параболы с
осью Ox

$$y = x^2 - 3x + 4$$

+

+



$$y > 0:$$

при *любом* x

Ответ: $(-\infty; +\infty)$

В Табл.1
пример 3.1

№11

$$-x^2 - 3x - 4 > 0$$

$$-x^2 - 3x - 4 = 0$$

решений нет

Нет точек
пересечения

параболы

$$y = -x^2 - 3x - 4$$

с осью Ox

$$y > 0:$$

таких промежутков

нет

Ответ: решений нет

В Табл.1

пример 6.1



$$y = -x^2 - 3x - 4$$

№12

$$-x^2-3x-4 < 0$$

$$-x^2-3x-4=0$$

решений нет,
нет точек
пересечения
параболы
с осью Ox



$$y < 0:$$

при *любом* x

-

-

$$y = -x^2 - 3x - 4$$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$

В Табл.1
пример 6.2



Домашняя работа
п.2.1,2.2,№84(а),
85(2 строчка),90(б,з)