§ Кривые второго порядка

Кривые второго порядка различают

1) ***вырожденные*** и 2) ***невырожденные***

Вырожденные кривые второго порядка

это прямые и точки, которые задаются уравнением второго порядка. Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка плоскости, то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную кривую (мнимую кривую второго порядка).

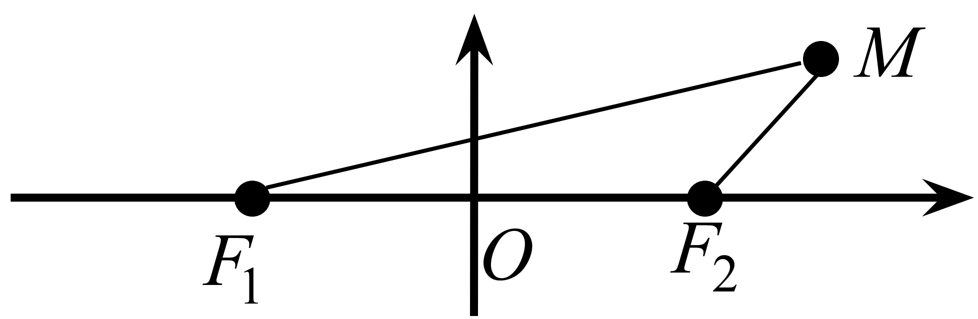
Невырожденными кривыми второго порядка являются эллипс, окружность, гипербола и парабола.

1. Эллипс и окружность

ОПР. ***Эллипсом*** *называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости* F_1 *и* F_2 *есть величина постоянная и равная* $2a$ $(2a > |F_1F_2|)$.

Точки F_1 и F_2 называют ***фокусами*** эллипса.

Выберем декартову систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от O.



В такой системе координат:

$$F_1(-c;0) \quad \text{и} \quad F_2(c;0),$$

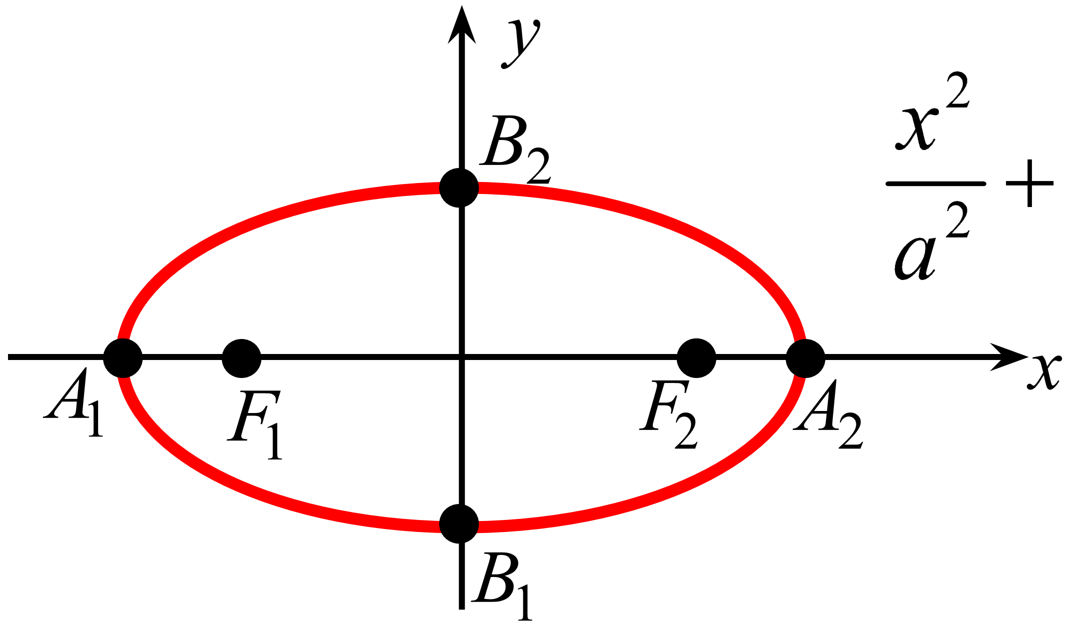
где $|OF_1| = |OF_2| = c$.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

называется ***каноническим уравнением эллипса***.

Система координат, в которой эллипс имеет такое уравнение, называется его ***канонической системой координат***.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются ***вершинами эллипса***.

Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются ***большой*** (***фокальной***) ***осью***, отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ – ***малой осью***.

Величины a и b называются ***большой*** и ***малой полуосью*** соответственно.

Длина отрезка F_1F_2 (равная $2c$) называется ***фокусным расстоянием***. Если M – произвольная точка эллипса, то отрезки MF_1, MF_2 и их длины r_1, r_2 называются ***фокальными радиусами точки*** M

СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1) Эллипс лежит внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = \pm a,\ y = \pm b$.

2) Эллипс имеет центр симметрии (начало координат) и две оси симметрии (оси Ox и Oy). Центр симметрии эллипса называют ***центром эллипса***.

ОПР. *Величина* ε , *равная отношению фокусного расстояния эллипса к его большой оси, называется* ***эксцентриситетом*** *эллипса,* т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Так как $c = \sqrt{a^2 - b^2} < a$, то $0 < \varepsilon < 1$.

Величина ε характеризует форму эллипса: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Знаая эксцентриситет эллипса, можно найти фокальные радиусы точки $M(x;y)$:

$$r_1 = \left| MF_1 \right| = a + \varepsilon x, \qquad r_2 = \left| MF_2 \right| = a - \varepsilon x.$$

Пусть в уравнении эллипса $a = b = r$. Для этой кривой

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0, \qquad \Rightarrow \quad F_1 = F_2 = O, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = 0.$$

Геометрически, это означает, что точки кривой равноудалены (на расстояние r) от ее центра O, т.е. кривая является ***окружностью***.

Каноническое уравнение окружности принято записывать в виде $x^2 + y^2 = r^2$,

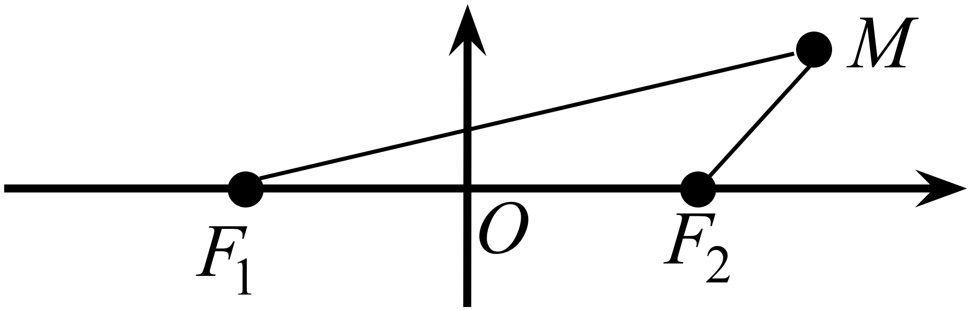
где r – расстояние от любой точки окружности до ее центра; r называют ***радиусом окружности***.

2. Гипербола

ОПР. ***Гиперболой*** *называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости* F_1 *и* F_2 *есть величина постоянная и равная* $2a$ $(2a < |F_1F_2|)$.

Точки F_1 и F_2 называют ***фокусами*** гиперболы.

Выберем декартову систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от O.



В такой системе координат:

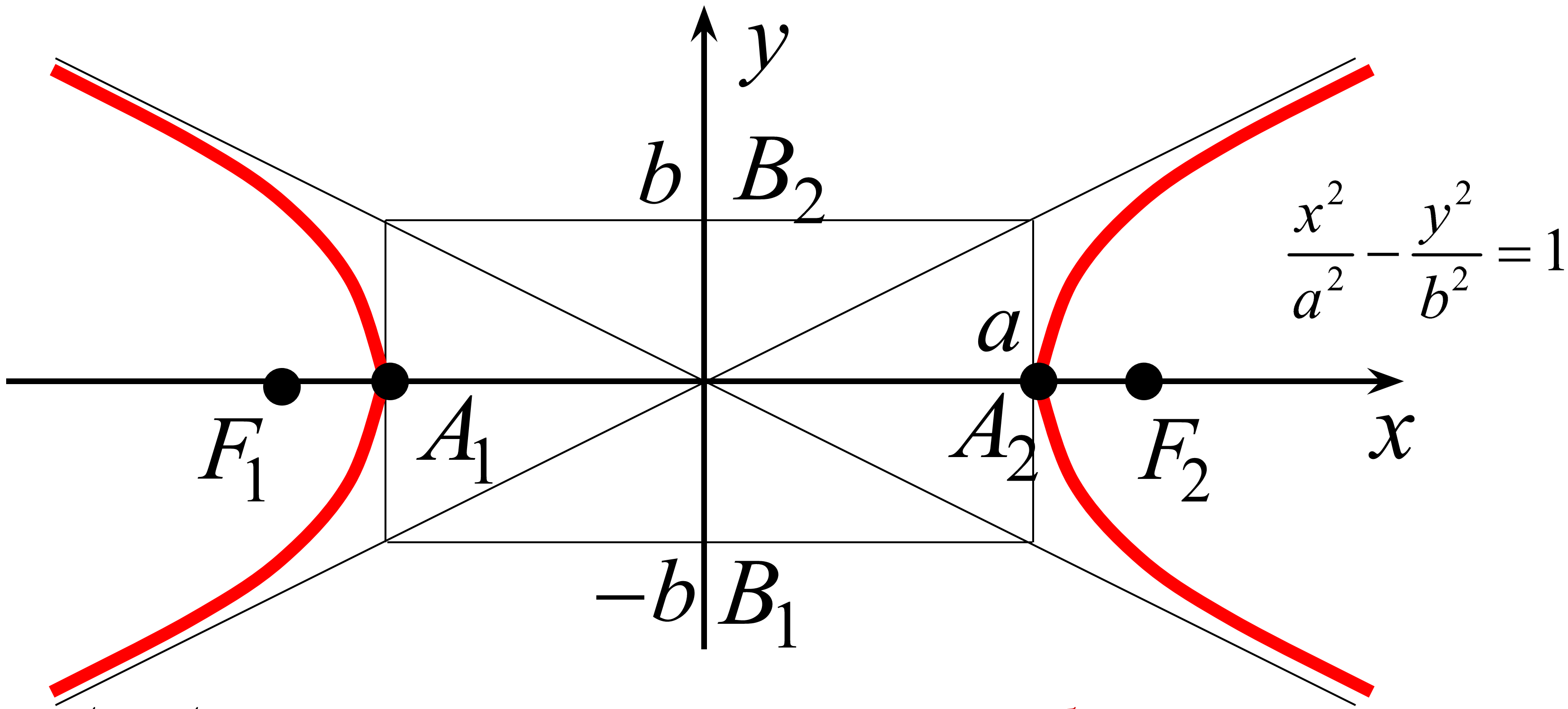
$$F_1(-c;0) \quad \text{и} \quad F_2(c;0)\,,$$

где $|OF_1| = |OF_2| = c$.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

называется ***каноническим уравнением гиперболы***.
Система координат, в которой гипербола имеет такое уравнение, называется ее ***канонической системой координат***.



Точки A_1, A_2 называются ***вершинами гиперболы***.
Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются ***действительной*** (***фокальной***) ***осью***, отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ – ***мнимой осью***.
Величины a и b называются ***действительной*** и ***мнимой полуосью*** соответственно.
Длина отрезка F_1F_2 (равная $2c$) называется ***фокусным расстоянием***. Если M – произвольная точка гиперболы, то отрезки MF_1, MF_2 и их длины r_1, r_2 называются ***фокальными радиусами точки*** M

СВОЙСТВА ГИПЕРБОЛЫ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

1) Точек гиперболы нет внутри полосы, ограниченной прямыми $x = \pm\ a$.

2) Гипербола имеет центр симметрии (начало координат) и две оси симметрии (оси Ox и Oy).

Центр симметрии гиперболы называют ***центром гиперболы***. Ось симметрии гиперболы, проходящую через фокусы (ось Ox) называют ***действительной*** (или ***фокальной***) ***осью*** симметрии, а вторую ось (ось Oy) – ***мнимой осью***.

ОПР. *Величина* ε *, равная отношению фокусного расстояния гиперболы к ее действительной оси, называется* ***эксцентриситетом*** *гиперболы,* т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Так как $c = \sqrt{a^2 + b^2} > a$, то $\varepsilon > 1$.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Величина ε характеризует форму гиперболы:

Зная эксцентриситет гиперболы, можно найти фокальные радиусы точки $M(x;y)$. Если точка M лежит на правой ветке гиперболы (т.е. $x > 0$), то

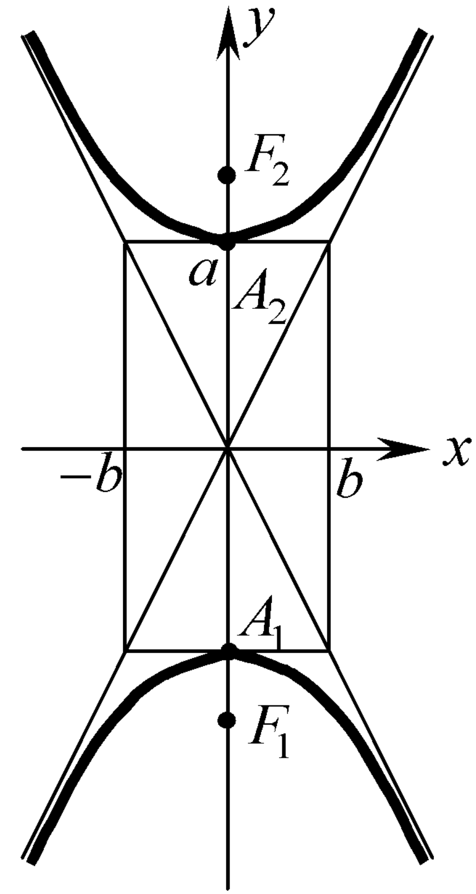
$$r_1 = \left| MF_1 \right| = a + \varepsilon x, \qquad r_2 = \left| MF_2 \right| = -a + \varepsilon x.$$

Если M лежит на левой ветке гиперболы (т.е. $x < 0$), то

$$r_1 = \left| MF_1 \right| = -(a + \varepsilon x), \qquad r_2 = \left| MF_2 \right| = -(-a + \varepsilon x).$$

2) Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 были на одинаковом расстоянии от $O(0;0)$, но лежали на Oy, то уравнение гиперболы будет иметь вид

$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



Для этой гиперболы:

действительная ось – ось Oy,

мнимая ось – ось Ox,

$F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$ (где $c=\sqrt{a^2+b^2}$)

Асимптоты:

$$y=\pm\frac{a}{b}x$$

3. Парабола

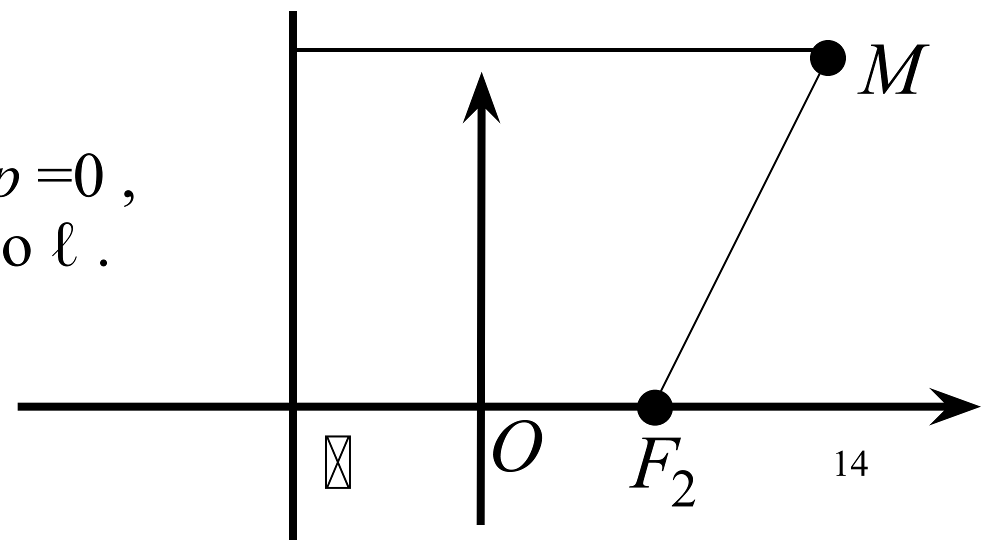
Пусть ℓ – некоторая прямая на плоскости,
F – некоторая точка плоскости, не лежащая на прямой ℓ..

ОПР. ***Параболой*** *называется геометрическое место точек плоскости, расстояние от которых до фиксированной прямой* ℓ *и до фиксированной точки* F (*не лежащей на прямой* ℓ) *одинаковое*.

Точку F называют ***фокусом параболы***,
прямую ℓ – ***директрисой***.

Выберем декартову систему координат так, чтобы директриса параболы ℓ была перпендикулярна оси Ox, фокус F на оси Ox имел положительную абсциссу и расстояние от O до F и до ℓ было одинаковым.

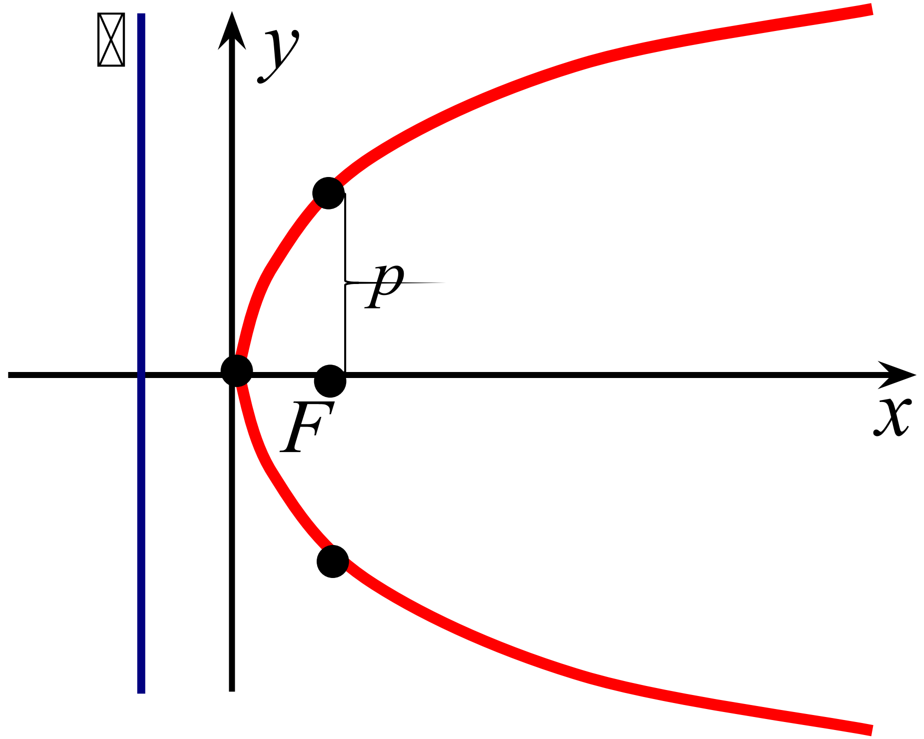
В такой системе координат:
$F(0{,}5p;0)$ и $\ell\colon x + 0{,}5p = 0$,
где p – расстояние от F до ℓ .



Уравнение $y^2 = 2px$

называется ***каноническим уравнением параболы***.

Система координат, в которой парабола имеет такое уравнение, называется ее ***канонической системой координат***.



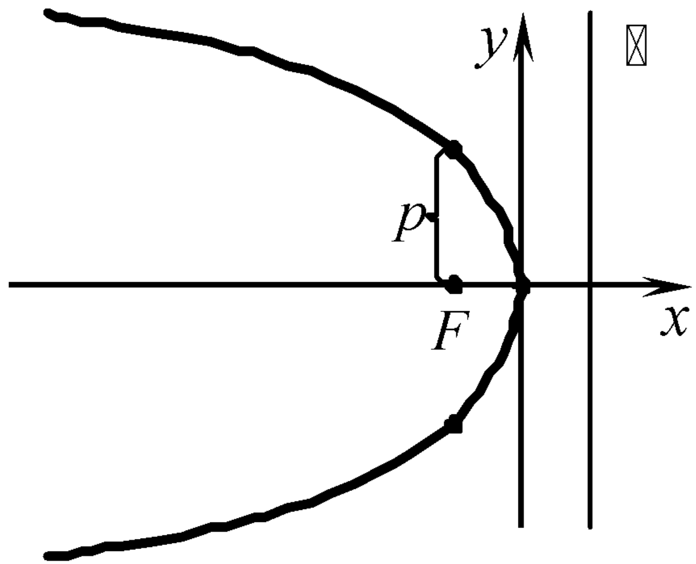
$$y^2 = 2px$$

Точка, в которой парабола пересекает свою ось, называется ***вершиной параболы***,

Число p называется ***параметром параболы***.

Если M – произвольная точка параболы, то отрезок MF и его длина называются ***фокальными радиусами точки*** M.

Замечание. Введем систему координат так, чтобы фокус F параболы лежал на отрицательной части оси Ox, директриса была перпендикулярна Ox, и расстояние от O до F и до директрисы было одинаково.



Тогда получим для параболы уравнение

$y^2 = -2px,$

а для директрисы и фокуса:

$F(-0{,}5p;0)$ и $\ell : x - 0{,}5p = 0.$

Выберем систему координат так, чтобы директриса была перпендикулярна Oy, фокус лежал на положительной (отрицательной) части оси Oy и O была на одинаковом расстоянии от F и от директрисы (рис. 2 и рис. 3):

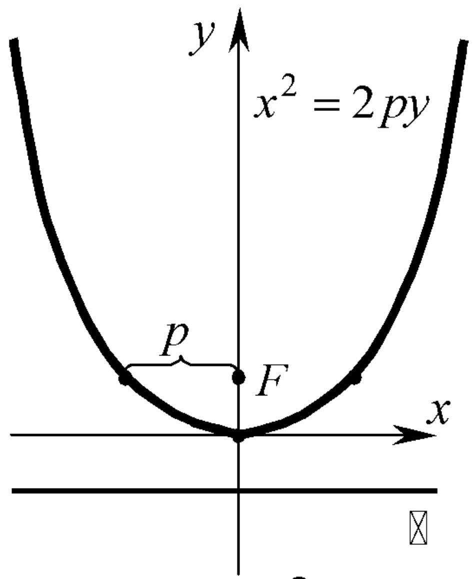


рис. 2

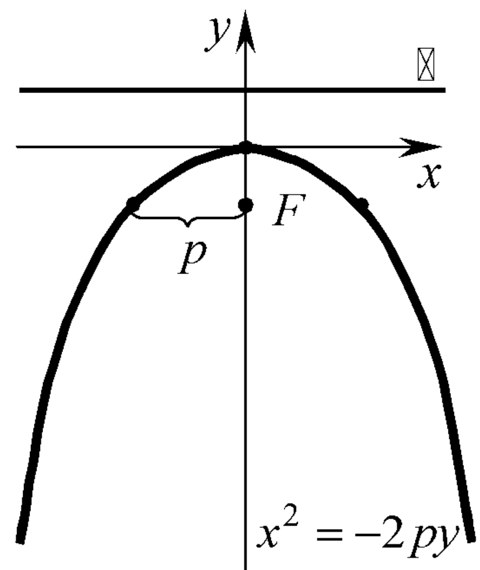


рис. 3

Тогда уравнение параболы будет иметь вид

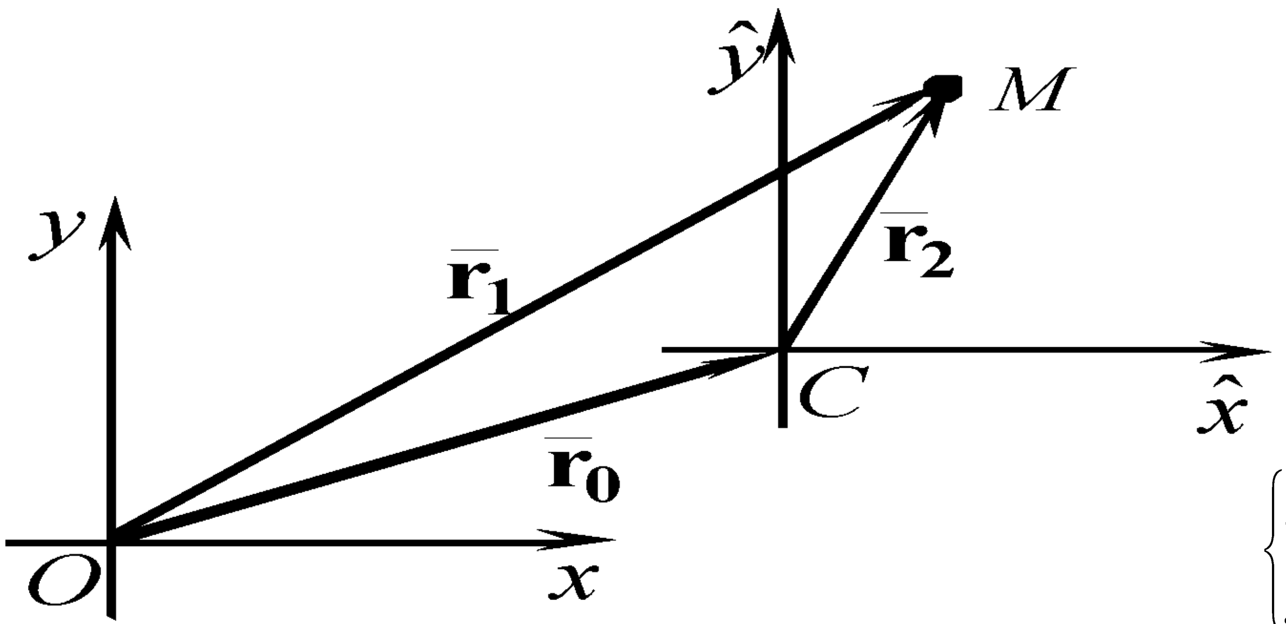
$$x^2 = \pm 2py,$$

а для директрисы и фокуса получим:

$$F(0; \pm\, 0{,}5p) \quad \text{и} \quad \ell : y \pm 0{,}5p = 0.$$

4. Координаты точки в разных системах координат

Пусть заданы декартовы прямоугольные системы координат xOy и $\hat{x}C\hat{y}$ такие, что $Ox \uparrow\uparrow C\hat{x}$, $Oy \uparrow\uparrow C\hat{y}$ («параллельные системы координат»).



$$\begin{cases} \hat{x} = x - x_0, \\ \hat{y} = y - y_0 \end{cases}$$

Формулу называют ***формулой преобразования координат точки при параллельном переносе начала координат в точку*** $C(x_0;y_0)$.

5. Общее уравнение кривой второго порядка

Рассмотрим уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

С помощью элементарных преобразований это уравнение может быть приведено к виду:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1) при } AC \neq 0: & \dfrac{(x-x_0)^2}{\alpha} + \dfrac{(y-y_0)^2}{\beta} = 1; \\ \text{2) при } C = 0: & (x-x_0)^2 = \alpha(y-y_0) \\ \text{3) при } A = 0: & (y-y_0)^2 = \alpha(x-x_0). \end{array}\right\}$$

ВЫВОД: Уравнения определяют кривые второго порядка, каноническая система координат которых параллельна заданной, но имеет начало в точке $C(x_0,y_0)$.

Каждое уравнение определяет кривую второго порядка

со смещенным центром (вершиной), а уравнение называют *каноническим уравнением кривой со смещенным центром (вершиной)*.

Замечание. Приводить уравнение общее уравнение кривой к каноническому виду необходимо,
если требуется построить кривую.
Тип кривой можно определить из следующих соображений:
Пусть $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$
тогда

1) если $AC = 0,$ то кривая является параболой;

2) если $AC < 0,$ то кривая является гиперболой;

3) если $AC > 0,$ $A \neq C$– эллипсом;

4) если $AC > 0,$ $A = C$ – окружностью.

6. Общее определение эллипса, гиперболы и параболы

ОПР. *Прямые* $\ell_{1,2} : x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ *называются* ***директрисами***

эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *и гиперболы* $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Пусть M – произвольная точка эллипса или гиперболы.

$$r_i = |MF_i|, \qquad d_i = d(M,\ell_i)$$

ТЕОРЕМА. *Для любой точки* M *эллипса (гиперболы) имеет место равенство*

$$\frac{r_i}{d_i}=\varepsilon$$

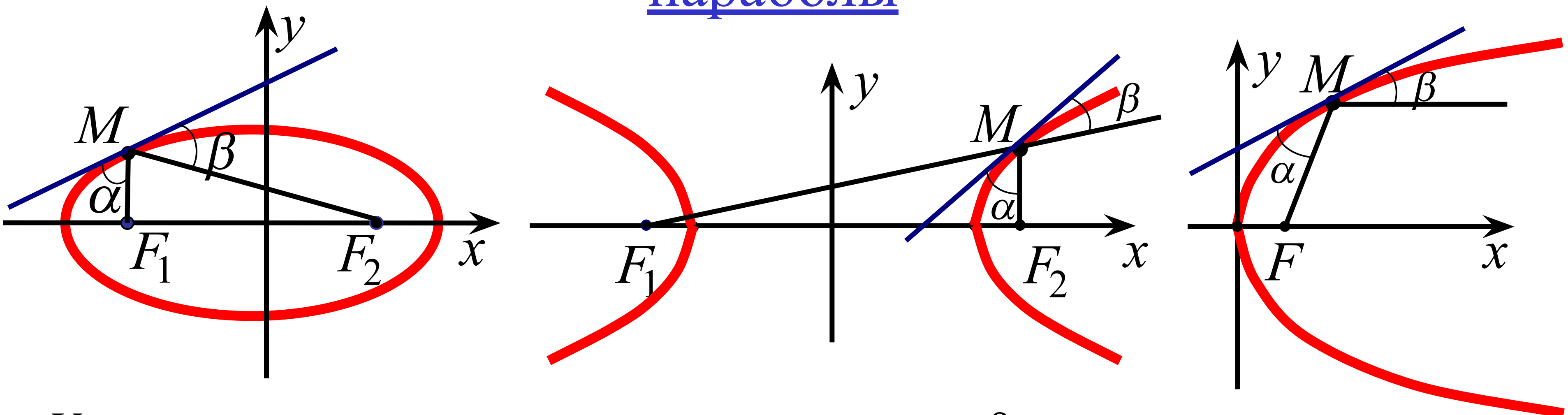
ЗАМЕЧАНИЕ. По определению параболы r = d $\Rightarrow$ параболу можно считать кривой, у которой эксцентриситет ε = 1.

ОПР. *Геометрическое место точек, для которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная и равная ε , называется*

1) *эллипсом, если* ε<1 ; 2) *гиперболой, если* ε>1;

3) *параболой, если* ε = 1.

7. Оптическое свойство эллипса, гиперболы и параболы



Угол падения луча равен углу его отражения: $\alpha = \beta$.

С физической точки зрения это означает:

1) Если источник света находится в одном из фокусов эллиптического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе.
2) Если источник света находится в одном из фокусов гиперболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут далее так, как если бы они исходили из другого фокуса.
3) Если источник света находится в фокусе параболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут далее параллельно оси.

Полярная система координат

Полярная система координат состоит из некоторой точки O, называемой **полюсом**, и исходящего из нее луча OE, называемого **полярной осью**. Кроме этого задается единица масштаба для измерения длин отрезков.

$\rho -$ это расстояние от точки M до полюса O,

$\varphi -$ угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с лучом OM.

Полярные и декартовы координаты точки связаны соотношениями:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Чтобы получить изображение кривой в полярной системе координат, постройте лучи, выходящие из полюса 0 под углами φ к полярной оси. На каждом луче отложите длину вычисленного Вами полярного радиуса ρ. Если $\rho -$ отрицательное число, то для построения соответствующей точки нужно отложить модуль ρ на луче, повёрнутом на 180° вокруг полярной оси, то есть отложить от полярной оси угол $(\varphi + 180^\circ)$. Соедините построенные Вами точки плавной линией.

Кривые, уравнения которых в полярной системе координат имеют вид $\rho = a\sin k\varphi$, $\rho = a\cos k\varphi$, называют розами. Причем, если k – четное, то лепестков у розы $2k$, а если число k – нечетное, то у розы k лепестков.

§ Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек в пространстве, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x,y,z) = 0$,

где $F(x,y,z)$ – многочлен второй степени.

$\Rightarrow$ в общем случае уравнение поверхности 2-го порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0 .$$

Поверхности второго порядка делятся на

1) ***вырожденные*** и 2) ***невырожденные***

Вырожденные поверхности второго порядка это плоскости и точки, которые задаются уравнением второго порядка. Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка пространства, то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную поверхность (мнимую поверхность второго порядка).

Невырожденными поверхности второго порядка подразделяются на пять типов.

1. Эллипсоид

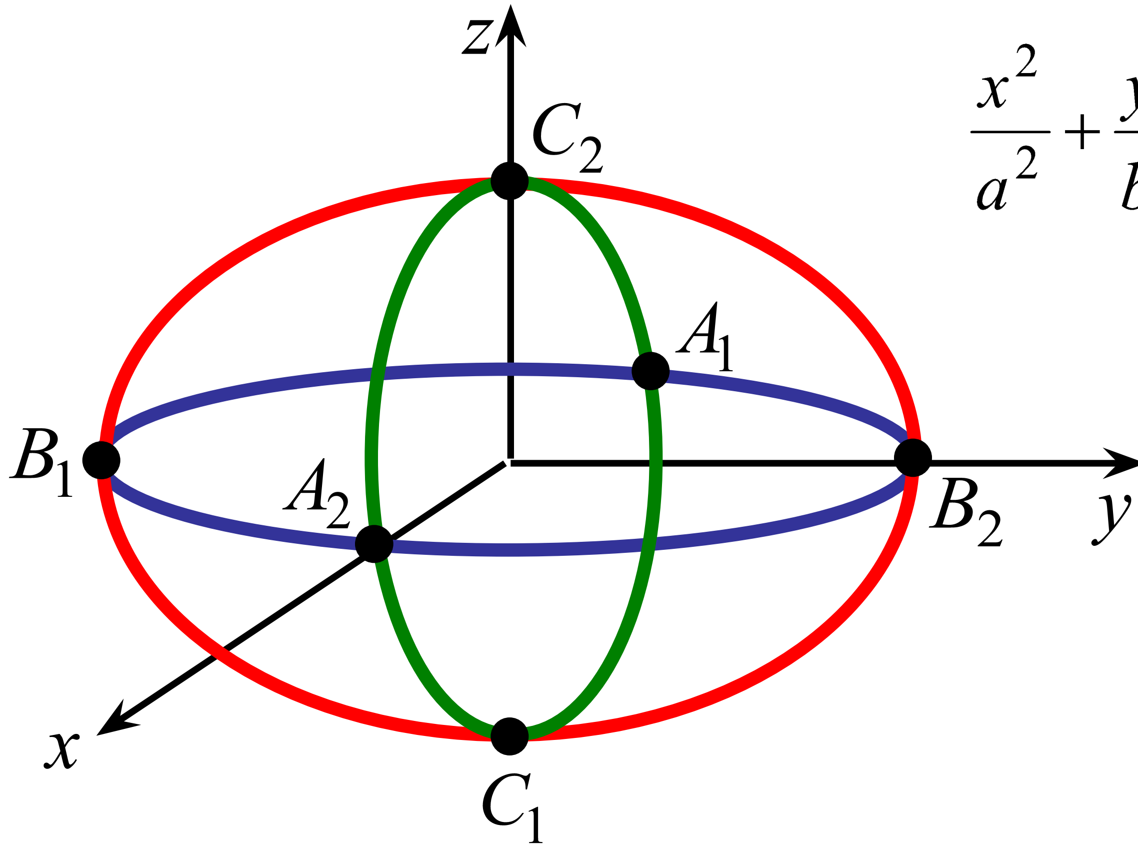
ОПР. ***Эллипсоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой эллипсоид имеет такое уравнение называется его ***канонической системой координат***,

а уравнение – ***каноническим уравнением эллипсоида***.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Величины a, b и c называются *полуосями* эллипсоида.

Если все они различны, то эллипсоид называется ***трехостным***.

Если две из трех полуосей равны, эллипсоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения эллипса вокруг одной из своих осей.

Эллипсоид, у которого все три полуоси равны, называют ***сферой***.

Каноническое уравнение сферы принято записывать в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

где r – величина полуосей, которая называется ***радиусом сферы***.

С*фера – геометрическое место точек пространства, равноудаленных* (на расстояние r) *от некоторой фиксированной точки (*называемой *центром)*.

В канонической системе координат

центр сферы– начало координат.

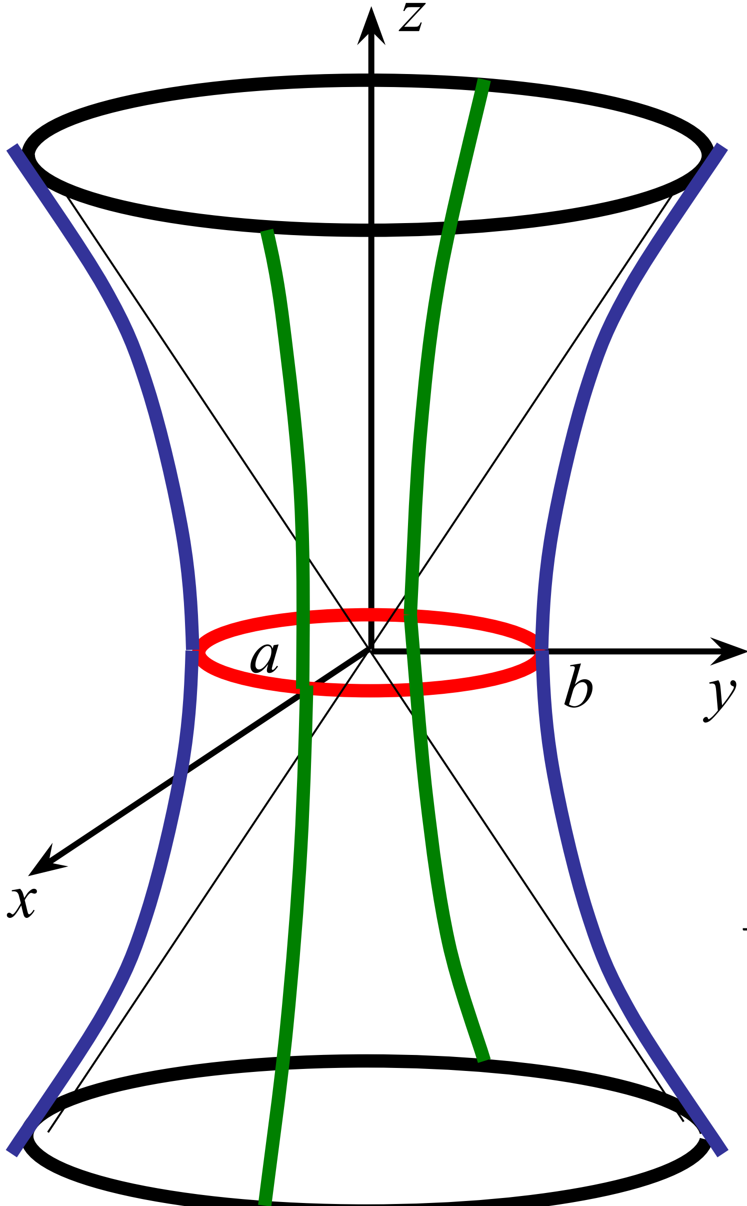
2. Гиперболоиды

ОПР. ***Однополостным гиперболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой однополостный гиперболоид имеет такое уравнение, называется его ***канонической системой координат***, а уравнение – ***каноническим уравнением однополостного гиперболоида***.



Величины a, b и c называются ***полуосями*** однополостного гиперболоида.

Если $a = b$, то однополосный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

вокруг своей мнимой оси.

Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

тоже определяют однополостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

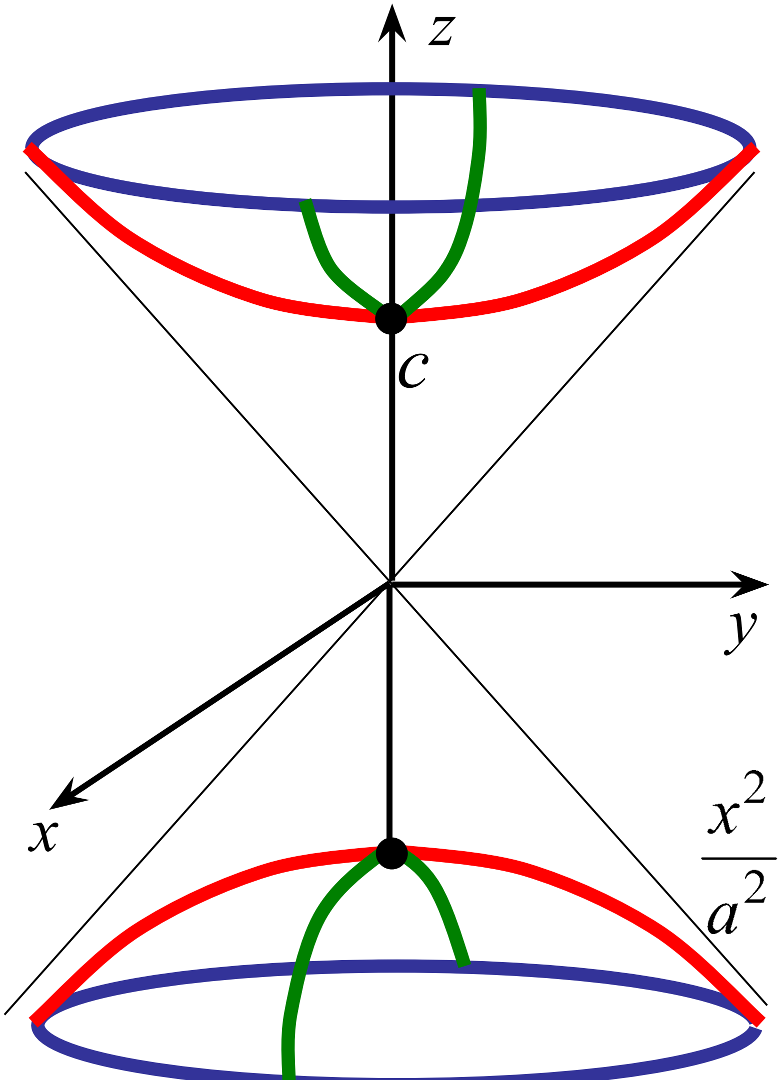
ОПР. ***Двуполостным гиперболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой двуполостный гиперболоид имеет такое уравнение, называется его ***канонической системой координат***,

а уравнение – ***каноническим уравнением двуполостного гиперболоида***.



Величины a, b и c называются ***полуосями*** двуполостного гиперболоида.

Если $a = b$, то двуполостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения гиперболы

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг своей действительной оси.

Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

тоже определяют двуполостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

3. Конус

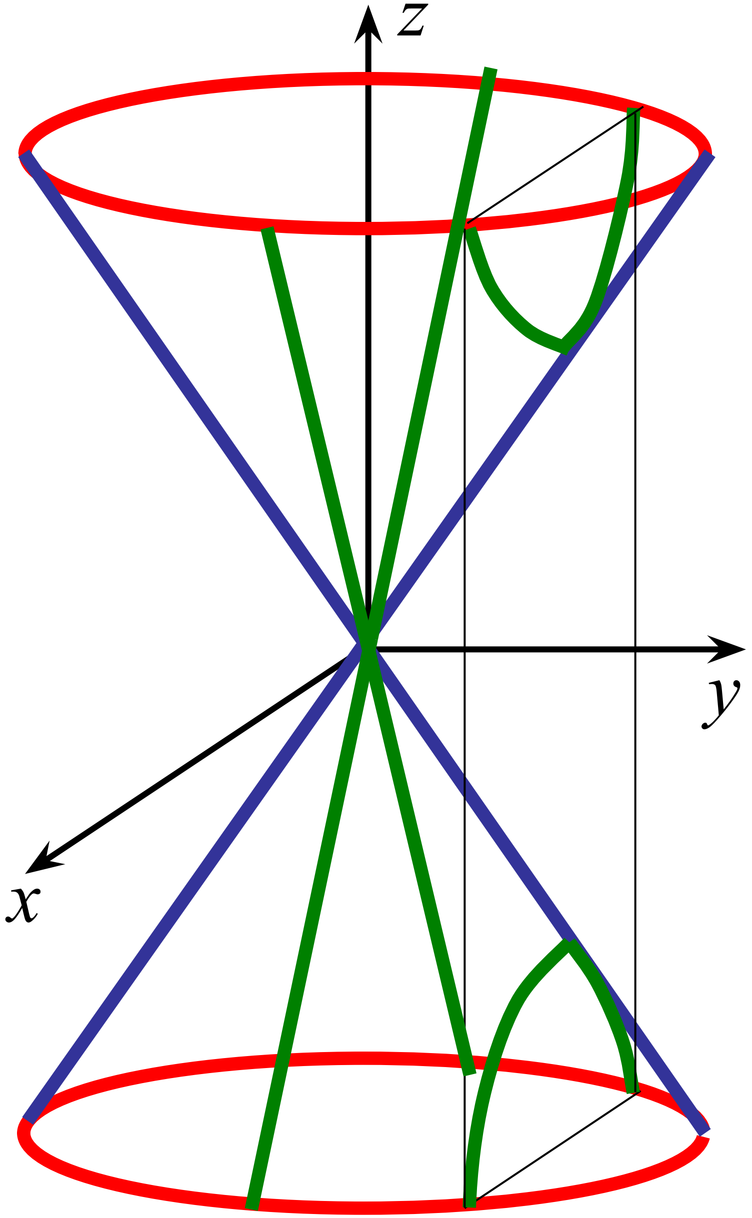
ОПР. ***Конусом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

где a, b, c – *положительные константы.*

Система координат, в которой конус имеет такое уравнение, называется его ***канонической системой координат***,

а уравнение – ***каноническим уравнением конуса***.



Величины a, b и c называются ***полуосями*** конуса. Центр симметрии O называется ***вершиной конуса***.

Если $a=b$, то конус является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения прямой

$$z = \frac{c}{b} y$$

вокруг оси Oz .

Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

тоже определяют конусы, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

4. Параболоиды

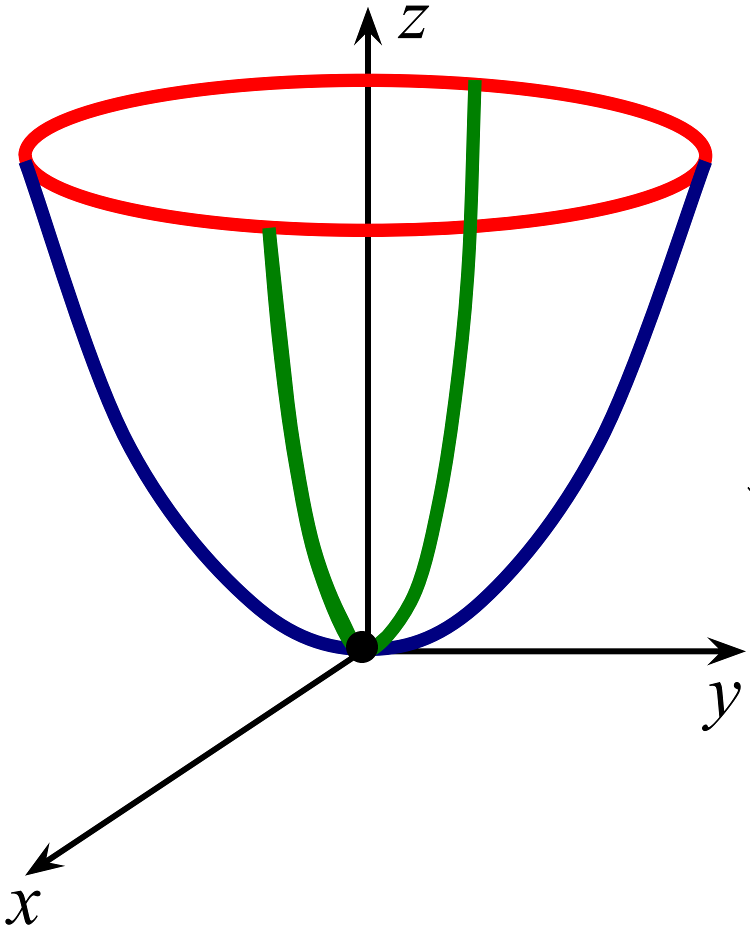
ОПР. ***Эллиптическим параболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z,$$

где a, b – положительные константы.

Система координат, в которой эллиптический параболоид имеет такое уравнение, называется его ***канонической системой координат***,

а уравнение – ***каноническим уравнением эллиптического параболоида***.



Величины a и b называются *параметрами* параболоида. Точка O называется *вершиной параболоида*.

Если $a = b$, то параболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения параболы $y^2 = 2b^2 z$ вокруг оси Oz.

Замечания: 1) Уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -2z$ тоже определяет эллиптический параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 2y \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 2x$$

определяют эллиптические параболоиды, с осями симметрии Oy и Ox соответственно.

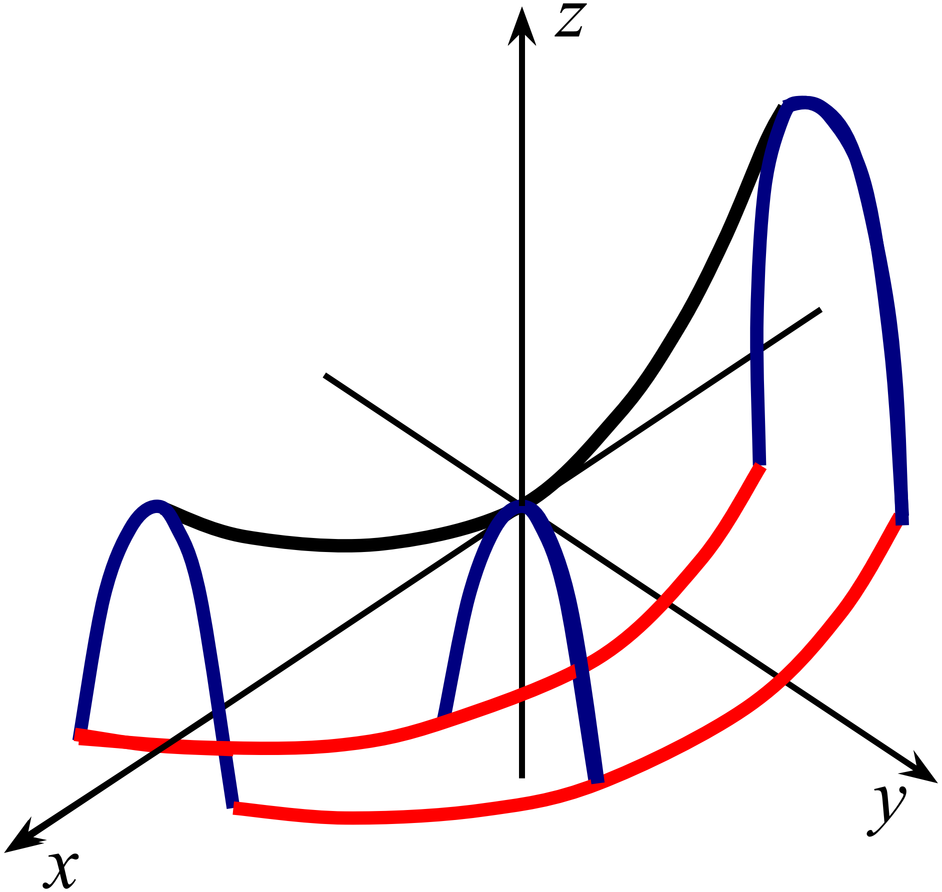
Эллиптический параболоид это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в одну сторону).

ОПР. ***Гиперболическим параболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

где a, b *– положительные константы.*

Система координат, в которой гиперболический параболоид имеет такое уравнение, называется его ***канонической системой координат***,
а уравнение – ***каноническим уравнением гиперболического параболоида***.



Величины a и b называются ***параметрами*** параболоида.

Замечания: 1) Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-2z$$

тоже определяет параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\pm 2y \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 2x$$

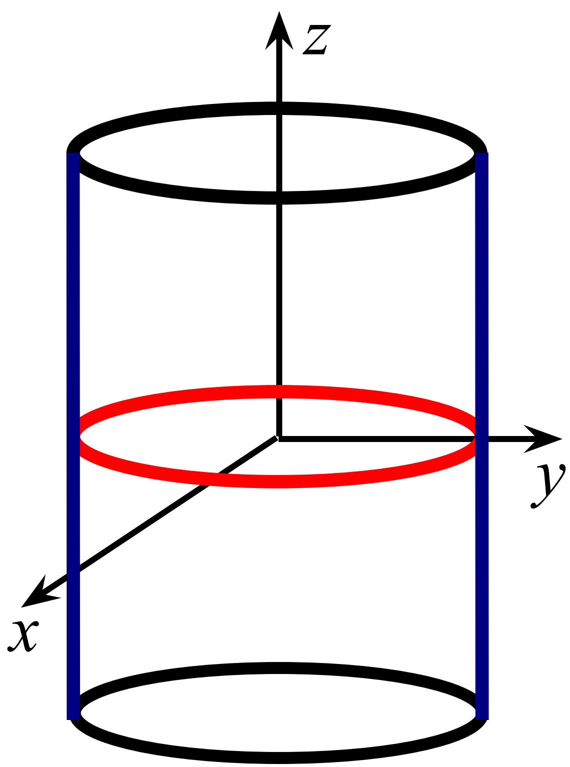
определяют параболоиды, «вытянутые» вдоль осей Oz и Oy соответственно.

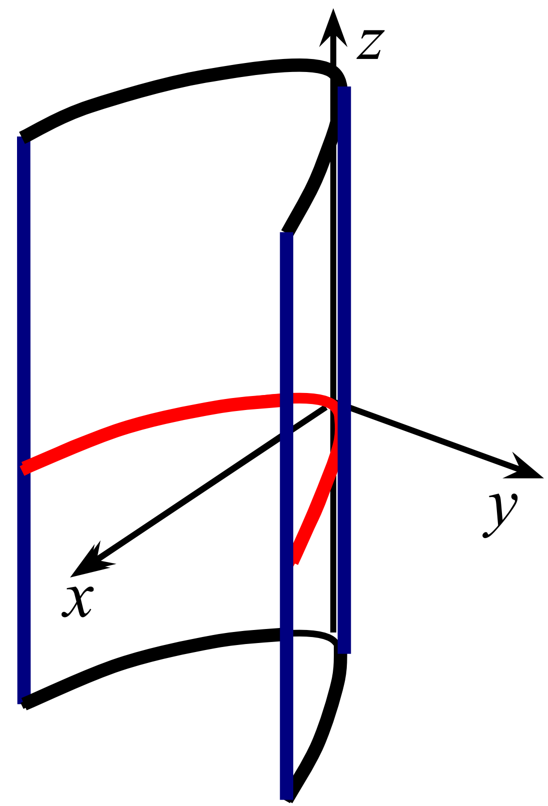
Гиперболический параболоид это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в разные стороны).

5. Цилиндры

ОПР. ***Цилиндрической поверхностью*** (***цилиндром***) *называется поверхность, которую описывает прямая (называемая* ***образующей****), перемещающаяся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой (называемой* ***направляющей****)* .

Цилиндры называют по виду направляющей: круговые, эллиптические, параболические, гиперболические.





Цилиндр

в некоторой декартовой системе координат

задается уравнением,

в которое не входит одна из координат.

Кривая,

которую определяет это уравнение

в соответствующей координатной плоскости, является направляющей цилиндра;

а образующая – параллельна оси отсутствующей координаты.

- **Полярная система координат**

на плоскости — это совокупность точки ***O***, называемой **полюсом**,

и полупрямой , называемой **полярной осью**.

На полярной оси выбирается **орт-вектор** , приложенный к точке ***O***,

который задает положительное направление

на полярной оси

и единицу измерения.

Связь декартовых и полярных координат

Положение точки M в полярной системе координат определяется расстоянием r (**полярным радиусом**) от точки M до полюса (т.е. $r = |\overrightarrow{OM}|$)и углом φ (**полярным углом**) между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$. Полярный радиус и полярный угол составляют **полярные координаты** точки M, что записывается в виде $M(r, \varphi)$. Полярный угол измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси:

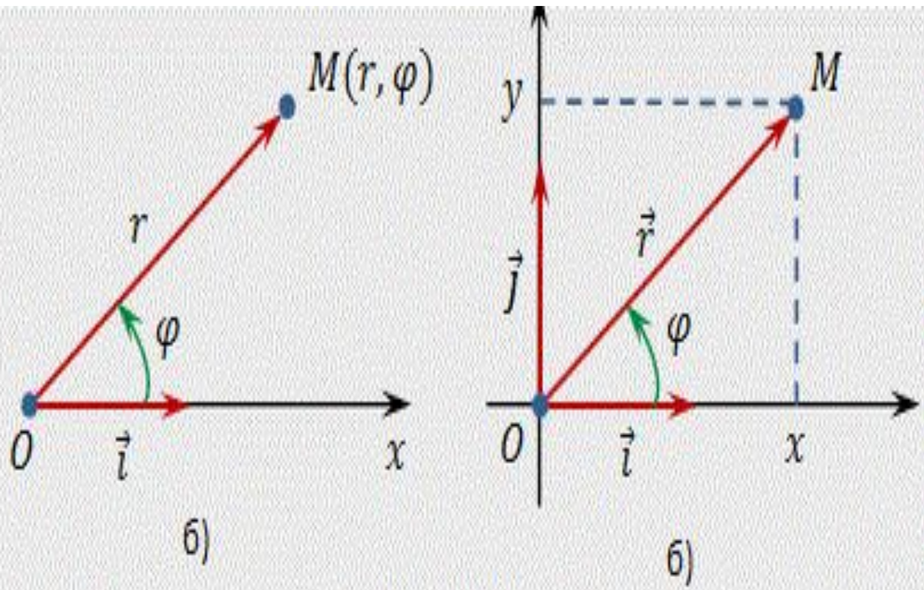


Рис. 2.28

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \varphi = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

На практике удобнее пользоваться такой системой полярных координат, в которой полярный радиус ***r*** может принимать и отрицательные значения.

Система полярных координат, в которой полярный радиус ***r*** может принимать любые значения (положительные, отрицательные и равные нулю), называется **обобщенной системой полярных координат**.