§2. Использование равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Теорема 1. (О непрерывности предела равномерно сходящейся функциональной последовательности)

Пусть $C \subset R^n, \varphi_k : C \to R$ непрерывны $\forall k \in N$,

пусть последовательность $\{\varphi_k\}_{k \in N}$ сходится к функции φ равномерно: $\varphi_k \overset{C}{\rightrightarrows} \varphi$, при $k \to \infty$.

Тогда функция $\varphi : C \to R$ непрерывна.

Доказательство. (Докажем на доске).

Замечание. Если равномерной сходимости нет, то φ может быть разрывна.

Теорема 2. (О почленном интегрировании функциональной последовательности.)

Пусть $C \in L(R^n)$, $f_k : C \to R$ – суммируемы, $\forall k \in N$,

$\mu_n C < +\infty$, $f_k \overset{C}{\rightrightarrows} f$, $k \to \infty$.

Тогда $f : C \to R$ – суммируема,

$$\int_C f d\mu_n = \lim_{k\to\infty} \int_C f_k d\mu_n.$$

Доказательство. (Докажем на доске).

Теорема 3. Пусть $\forall k \in N$ последовательность функций $f_k : [a;b] \to R$, такова, что f_k суммируемы на $[a;b]$, причем последовательность $\{f_k\}_{k \in N}$ сходится к функции f равномерно: $f_k \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$, $k \to \infty$.

Тогда $$\int_a^t f_k(x)dx \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} \int_a^t f(x)dx, k \to \infty.$$

Доказательство. (Докажем на доске).

Замечание 1. В теореме 3 требование конечности меры С ($\mu_n C < +\infty$) убрать нельзя! (контрпример приведем на лекции).

Замечание 2. Теорема Б. Леви и теорема Лебега о мажорируемой сходимости не требуют $\mu_n C < +\infty$, но налагают дополнительные условия на $(f_k)_{k \in N}$. Какой теоремой пользоваться – зависит от задачи.

Теорема 4. (О почленном дифференцировании функциональной последовательности).

Пусть функции $f_k:[a;b]\to R$ – дифференцируемы на [a;b], и $\exists x_0\in[a;b]$ такая, что в ней числовая последовательность $\{f_k(x_0)\}_{k\in N}$ сходится.

Пусть последовательность производных сходится к некоторой функции g равномерно: $\left(f_k^{'}\right)\overset{[a;b]}{\rightrightarrows} g$; $k\to\infty$.

Тогда существует функция $f:[a;b]\to R$, дифференцируемая на [a;b] такая, что

$$\left(f_k\right)\overset{[a;b]}{\rightrightarrows} f, \text{ причем } f'=g.$$

Доказательство. (Докажем на доске).

Аналоги приведенных теорем для функциональных рядов сформулировать и доказать самим!

Приведем аналог для теоремы 4:

Теорема 4*. Пусть $f_k : [a;b] \to R$ – дифференцируемы, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a;b]$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ сходится равномерно на $[a;b]$.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится равномерно к $S : [a;b] \to R$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k' = S'(x) \quad \forall x \in [a;b].$$