ТЕОРИЯ ГРАФОВ

- История теории графов
- Основные понятия
- Представление графов в компьютере
- Виды графов
- Связность
- Планарность
- Род и толщина графа
- Независимость и покрытия
- Раскраска графа

ИСТОРИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Задача о Кенигсбергских мостах

- На рисунке представлен схематический план центральной части города Кенигсберг, включающий два берега реки Перголя, два острова в ней и семь соединяющих их мостов. Задача состоит в том, чтобы найти маршрут, проходящий по всем четырем участкам суши по одному разу. При этом через каждый из мостов можно проходить только по одному разу, а конец и начало пути должны совпадать. Эта задача была решена (показано, что решения не существует) в 1736 году математиком Леонардом Эйлером.

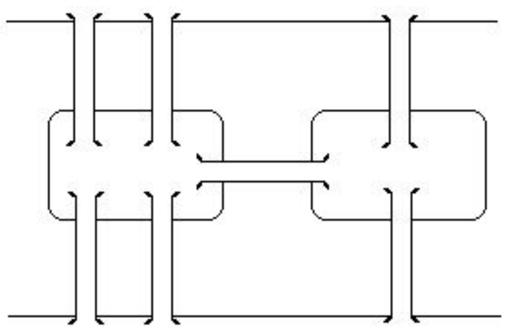
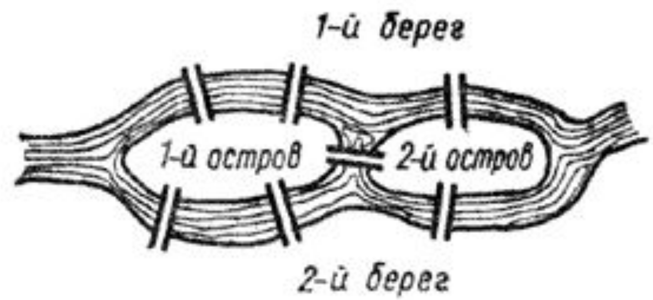


Рис.1. Задача о Кенигсбергских мостах



ИСТОРИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Задача о трех домах и трех колодцах

- Имеется три дома и три колодца, каким-то образом расположенные на плоскости. Провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались. Эта задача была решена (показано, что решения не существует) Куратовским в 1930 году.

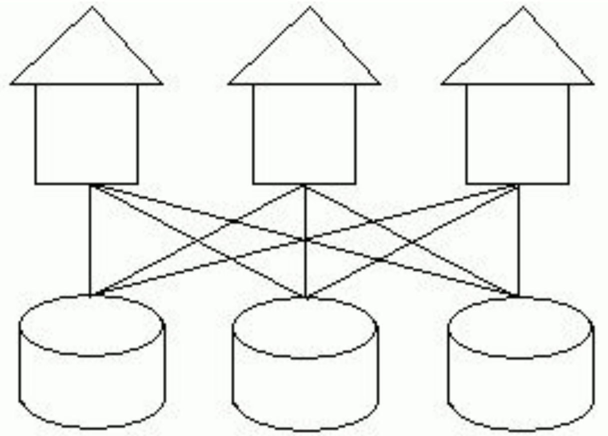


Рис.2. Задача о трех домах и колодцах

ИСТОРИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Задача о четырех красках

- Разбиение плоскости на непересекающиеся плоскости называется *картой*. Области на карте называются соседними, если они имеют общую границу. Задача состоит в раскрашивании карты таким образом, чтобы никакие две соседние области на были закрашены одним цветом. С конца позапрошлого века известна гипотеза, что для этого достаточно четырех красок. В 1976 году Аппель и Хейкен опубликовали решение этой задачи, которое базировалось на переборе вариантов с помощью компьютера.

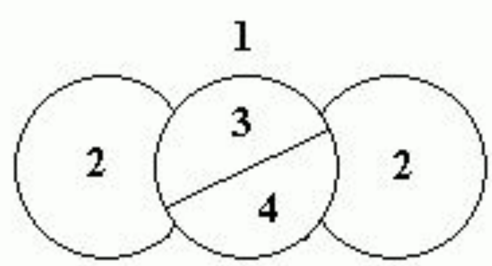
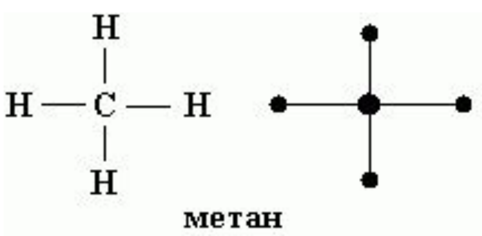
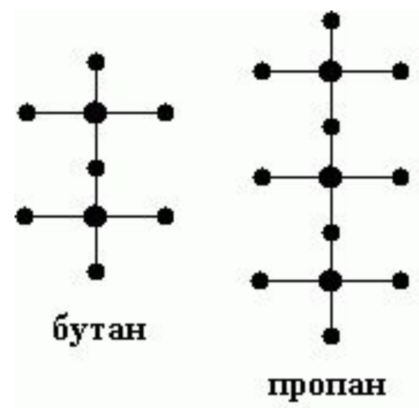


Рис. 3. Задача о четырех красках

ИСТОРИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

- В 1847 году Кирхгоф разработал **теорию деревьев** для решения систем линейных алгебраических уравнений, которая позволила ему найти ток в каждом проводнике в каждом контуре. От цепей он перешел к графам. Кирхгоф показал, что не надо рассматривать весь граф, а рассматривать простые циклы графа, которые образуются остовным графом.
- В 1957 году ученый Келли разработал теорию перечисления деревьев в попытке найти изомер углеводорода.





ГРАФ (ОТ ГРЕЧ. ГРАФΩ - ПИШУ)

- ***Графом G(V, E)*** называется совокупность двух множеств –
  - непустого множества V (множества вершин) и
  - множества E - двухэлементных подмножеств множества V, состоящих из различных элементов множества V, - (множества ребер).

$$G(V, E) = \langle V; E\rangle, \quad V \neq \varnothing,$$

$$E = \{\, e=\{a,b\} \mid a,b \in V \;\&\; a \neq b \;\&\; e \neq \varnothing \;\&\; \forall e \in E \;\; |e|=2 \,\}$$

Множество двухэлементных подмножеств определяет симметричное бинарное отношение на множестве вершин: $E \subset V \times V, \qquad E = E^{-1}.$

ГРАФ

- Вершины, которые не принадлежат ни одному ребру называются ***изолированными***.

- Ребро можно обозначить
  не только *как множество* $\{v1, v2\}$,
  но и *как пару* $(v1, v2)$.

Число вершин графа G обозначим ***p,*** а *число ребер* - ***q***:

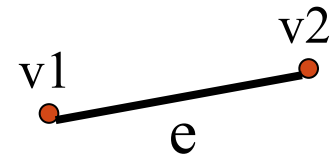
$$p = p(G) = |\, V\,|, \qquad q = q(G) = |\, E\,|.$$

- Если хотят явно упомянуть числовые характеристики графа, то говорят

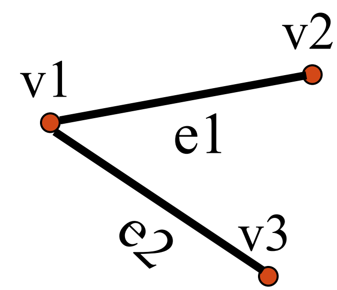
p, q - граф.

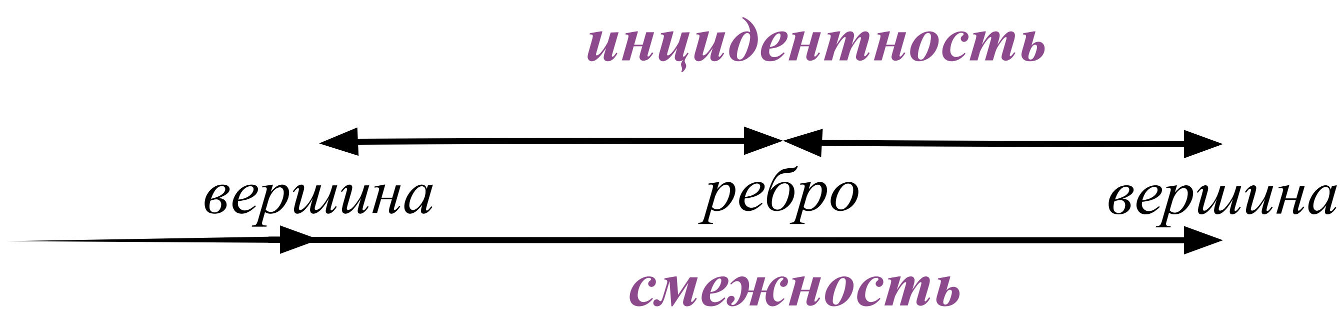
СМЕЖНОСТЬ

- Пусть *v1, v2* - вершины, *e*={*v1,v2*} - соединяющее их ребро, тогда *вершина v1* и *ребро e* ***инцидентны***, *ребро e* и *вершина v2* также *инцидентны*.



- *Два ребра*, инцидентные одной вершине, называются ***смежными*** (ребро *e1* и *e2*).
- *Две вершины*, инцидентные одному ребру, также называются ***смежными*** (вершины ***v1*** и ***v2***, ***v1*** и ***v3***).





СМЕЖНОСТЬ

- Множество вершин, смежных с вершиной v, называется ***множеством смежности*** вершины v и обозначается $\Gamma^+(v)$: $\Gamma^+(v)=\{ u \in V \mid (u,v) \in E \}$,

$$\Gamma^*(v) = \Gamma^+(v) + \{ v \}.$$

Если не оговорено противное, то подразумевается Γ^+ и обозначается просто Γ.

Очевидно, что $u \in \Gamma(v) \Leftrightarrow v \in \Gamma(u)$.

- Если $A \subset V$ (A - некоторое подмножество вершин графа), то $\Gamma(A)$ - множество всех вершин, смежных с вершинами из множества A: $\Gamma(A) = \{ u \in V \mid \exists\, v \in A \;\; u \in \Gamma(v) \} = \bigcup\limits_{v \in A} \Gamma(v)$.

ДИАГРАММЫ

- Граф изображают ***диаграммой***:

  вершины - точками (или кружками), ребра - линиями.

На рис.4 *диаграмма графа*, имеющего 4 вершины и 5 ребер.

Вершины v_1 и v_2, v_2 и v_3, v_3 и v_4, v_4 и v_1, v_2 и v_4 *смежные*, а вершины v_1 и v_3 *не смежные*.

Смежные ребра: e_1 и e_2, e_2 и e_3, e_3 и e_4, e_4 и

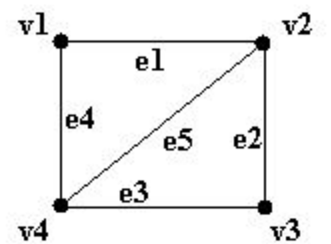


Рис. 4. Диаграмма графа

и e_5, e_3 и e_5, e_4 и e_5.

Несмежные ребра: e_1 и e_3, e_2 и e_4.

Множества смежности вершины v_1:

$\Gamma^+(v_1) = \{v_2, v_4\}$

$\Gamma^*(v_1) = \{v_1, v_2, v_4\}$

Множество смежности множества вершин A=$\{v_1, v_2\}$:

$\Gamma(A) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

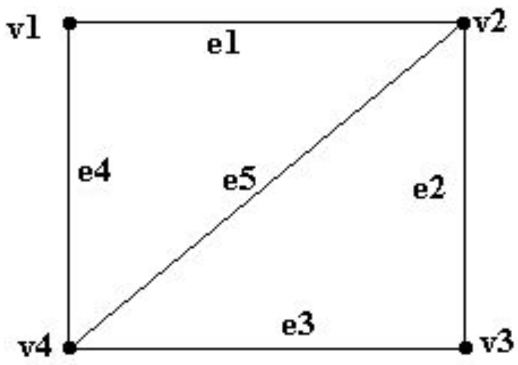
СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

Способы представления графов в памяти компьютера различаются *объемом* занимаемой *памяти* и *скоростью* выполнения *операций* над графами.

Представление выбирается, исходя из потребностей конкретной задачи.

- Четыре наиболее часто используемых представления с указанием характеристики *n(p, q)* - объема памяти для каждого представления.
  1. **матрица смежности**, $n(p, q) = O(p^2)$.
  2. **матрица инциденций**, $n(p, q) = O(p*q)$.
  3. **списки смежности**, $n(p, q) = O(p + 2q)$ [$n(p, q) = O(p + q)$].
  4. **массив ребер (или дуг)**, $n(p, q) = O(2q)$.

Представление иллюстрируются на примерах графа *G* и орграфа *D*, диаграммы которых представлены на рис.10:



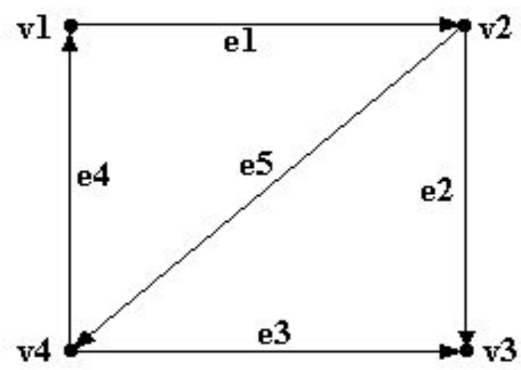


Рис.10. Диаграммы графа (слева) и орграфа (справа) используемых в качестве примеров в данной главе

МАТРИЦА СМЕЖНОСТИ

- Представление графа с помощью квадратной булевой матрицы *M* : ***array*** *[1..p, 1..p]* ***of*** *0..1,* отражающей смежность вершин, называется ***матрицей смежности***, где

$$M[i,j] = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_i \text{ смежна с вершиной } v_j, \\ 0, \text{ если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ не смежны.} \end{cases}$$

- Для матрицы смежности $n(p, q) = O(p^2)$.

Пример:

$$G: \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad D: \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- Матрица смежности графа симметрична относительно главной диагонали, поэтому достаточно хранить только верхнюю (или нижнюю) треугольную матрицу.

МАТРИЦА ИНЦИДЕНЦИЙ

- Представление графа с помощью матрицы

H :***array*** *[1..p, 1..q]* ***of*** *0..1* (для орграфов *H* :***array*** *[1..p, 1..q]* ***of*** *-1..1*), отражающей инцидентность вершин и ребер, называется ***матрицей инциденций***, где

для неориентированного графа

$$H[i,j]=\begin{cases}1, \text{ если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j\\ 0, \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

для ориентированного графа

$$H[i,j]=\begin{cases}1, \text{ если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j \text{ и является его концом,}\\ 0, \text{ если вершина } v_i \text{ и ребро } e_j \text{ не инцидентны,}\\ -1, \text{ если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j \text{ и является его началом.}\end{cases}$$

- Для матрицы инциденций $n(p, q) = O(p \cdot q)$.

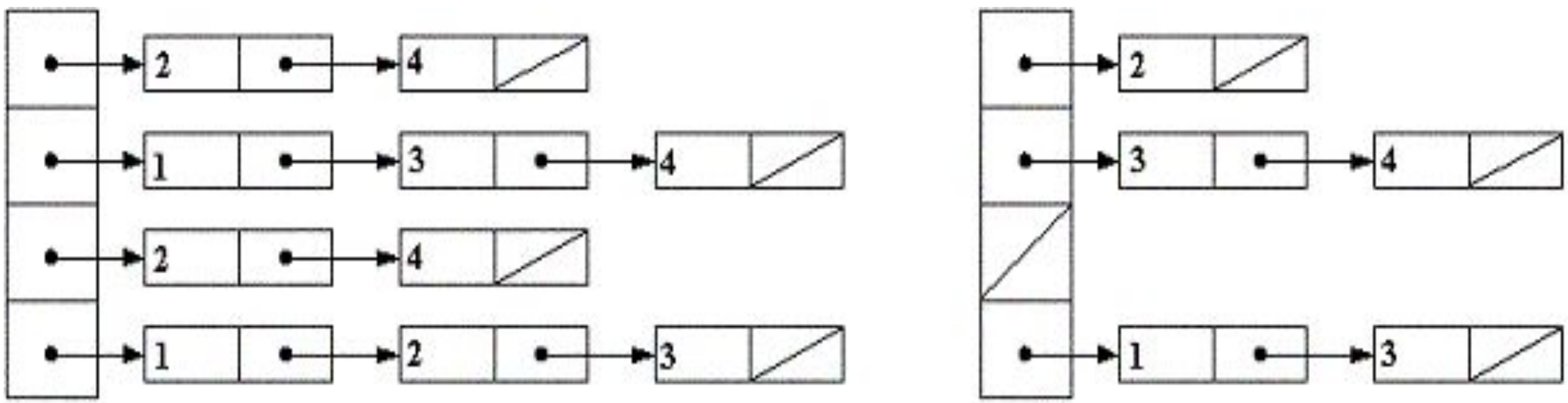
Пример:

$$G:\quad \begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} \qquad D:\quad \begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

Списки смежности

- Представление графа с помощью списочной структуры, отражающей *смежность вершин* и состоящей из массива указателей $Г$: ***array*** *[1..p]* ***of*** $\uparrow N$ на списки смежных вершин, где элемент списка представлен структурой N : ***record*** *v : 1..p; n :* $\uparrow N$ ***end record***, называется ***списком смежности***.
- В случае представления неориентированных графов списками смежности $n(p, q) = O(p + 2q)$, а в случае ориентированных графов $n(p, q) = O(p + q)$.

Пример:



Списки смежности для графа G (слева) и орграфа D (справа)

МАССИВ ДУГ (РЕБЕР)

- Представление графа с помощью массива структур *E : **array** [1..q] **of record** b, e : 1..p **end record***, отражающего список пар смежных вершин, называется ***массивом ребер*** (или, для орграфов, ***массивом дуг***).
- Для массива ребер (или дуг) $n(p, q) = O(2q)$.

Пример:

b	e	b	e
1	2	1	2
1	4	2	3
2	3	2	4
2	4	4	1
3	4	4	3

Представлние графа и орграфа с помощью массива ребер (дуг)

ВИДЫ ГРАФОВ

- Граф, состоящий из *одной* вершины, называется ***тривиальным***.
- Граф, состоящий из одних *изолированных* вершин, называется ***нуль-графом*** ($\mathbf{O_p}$).
- Граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром, называется ***полным*** ($\mathbf{K_p}$).

Полный граф с *p* вершинами имеет максимально возможное число ребер: $q(K_p) = p\,(p - 1)\,/\,2$

- Если элементами множества *E* являются *упорядоченные* пары (на ребрах задано направление или порядок), то граф $G(V,E)$ называют ***ориентированным*** (***орграфом***), где V- множество ***узлов*** графа, а *E* - множество его ***дуг***.

ВИДЫ ГРАФОВ

- Если элементом множества *E* может быть пара *одинаковых* элементов *V*, то такой элемент множества *E* называется ***петлей***, а граф называется *графом с петлями* (***псевдографом***).
- Если *E* является не множеством, а *набором*, содержащим несколько одинаковых элементов, то эти элементы называются *кратными ребрами*, а граф называется ***мультиграфом***.
- Если элементами множества *E* являются не обязательно 2-элементные, а любые подмножества множества V, то такие элементы множества E называются *гипердугами*, а граф называется ***гиперграфом***.

ВИДЫ ГРАФОВ

- Если задана функция $f: V \to M$ и/или $f: E \to M$, то множество M называется множеством *пометок*, а граф, называется ***помеченным*** (или *нагруженным*)

В качестве множества пометок используются *буквы* или *целые числа*.

- Если функция f инъективна, то есть разные вершины (ребра) имеют разные пометки, то граф называют ***нумерованным***.
- Если у графа помечены ребра - это ***реберно-помеченный*** граф.

Выражение "граф $G(V, E)$" означает неориентированный непомеченный граф без петель и кратных ребер с множеством вершин V и множеством ребер E.

ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

Графы рассматриваются с *точностью до изоморфизма*, то есть рассматриваются классы эквивалентности по отношению изоморфизма.

Пример:

Три внешне различные диаграммы, приведенные на рисунке снизу, являются диаграммами одного и того же графа $\mathbf{K}_{3,3}$.

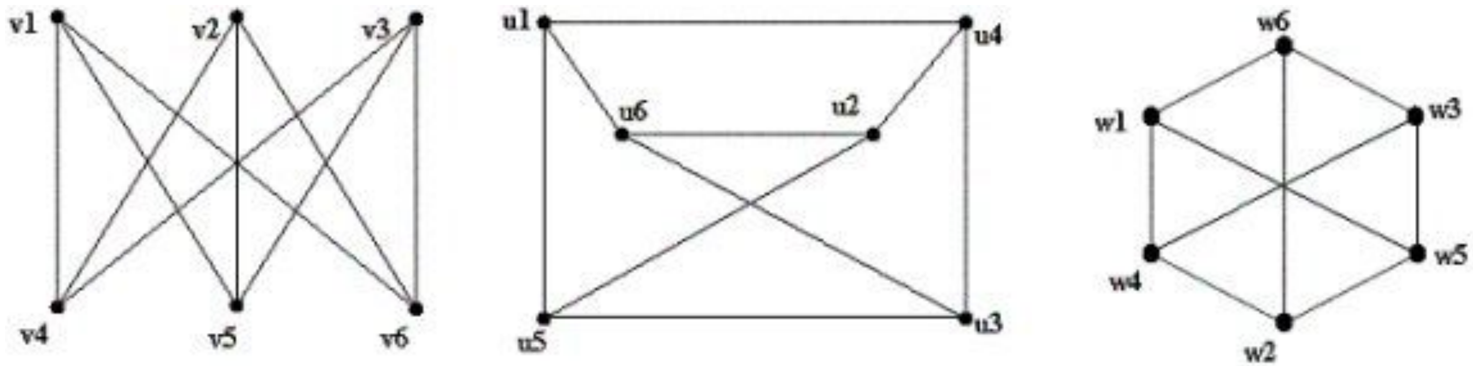


Рис. 5. Диаграммы изоморфных графов

- Числовая характеристика, одинаковая для всех изоморфных графов, называется ***инвариантом*** графа.

Так, *p(G)* и *q(G)* - инварианты графа G. Не известно никакого набора инвариантов, определяющих граф с точностью до изоморфизма.

ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

Пример:

Количество вершин, ребер и количество смежных вершин для каждой вершины не определяют граф. На рисунке представлены диаграммы графов, у которых указанные инварианты совпадают, но графы при этом не изоморфны.

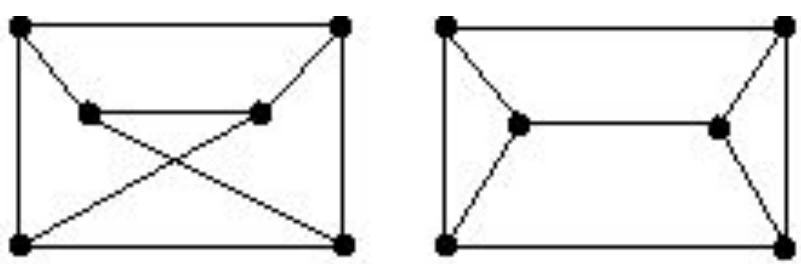


Рис. 6. Диаграммы неизоморфных графов с совпадающими инвариантами

ЧАСТИЧНЫЕ ГРАФЫ. ПОДГРАФЫ

- ***Подграфом*** графа $G(V,E)$ называется граф $G_X(X,E_X)$, в который входит лишь
  - часть вершин (узлов) графа G, образующих множество $X=V'\subset V$,
  - вместе с ребрами (дугами) $E_X=E'\subset E$, соединяющими эти вершины.

- Граф $G_X(X,E_X)$ называется ***собственным*** подграфом графа G, если $X\subset V$ & $E_X\subset E$ & $(V'\neq V \vee E'\neq E)$.
  - Подграф $G_X(X,E_X)$ называется ***остовным*** подграфом графа $G(V, E)$, если G_X содержит все вершины графа G: $X = V$.

  Остовной подграф (или ***фактор***) $G'(V, E')$ графа $G(V, E)$ определяется подмножеством ребер E'.
  - Подграф $G_X(X,E_X)$ называется ***правильным*** подграфом графа $G(V, E)$, если G_X содержит все ребра G:

$$\forall u, v \in X \quad \{u, v\} \in E \Rightarrow \{u, v\} \in E_X.$$

  Правильный подграф $G'(V', E')$ графа $G(V, E)$ определяется подмножеством вершин V'.

- ***Частичным графом*** графа $G(V,E)$ называется граф G_Y, содержащий только часть ребер (дуг) графа G: $G_Y(V_Y,Y)$, где $Y\subseteq E$.

ВАЛЕНТНОСТЬ (СТЕПЕНЬ)

- Количество ребер, инцидентных вершине v, называется ***степенью*** (***валентностью***) вершины v и обозначается $d(v)$[1] :

$$\forall\, v \in V \qquad 0 \le d(v) \le p - 1, \qquad d(v) = |\,\Gamma^{+}(v)\,|$$

(Если не оговаривается особо, то петля учитывается дважды при подсчете $d(v)$)

  - Степень $d\,(v)$ вершины v - это количество смежных с ней вершин.
  - Количество вершин, не смежных с v, обозначим $\Box d(v)$.

Ясно, что $\qquad \forall\, v \in V \quad d(v) + \Box d(v) = p.$

Степень ***изолированной*** вершины равна нулю (то есть $d(v) = 0$).

- Если степень вершины равна единице (то есть $d(v) = 1$), то вершина называется ***концевой*** или ***висячей***.

- Обозначим ***минимальную*** степень вершины графа G – $\delta(G)$, а ***максимальную*** – через $\Delta(G)$:

$$\delta(G(V, E)) = \min d(v)\,, \qquad \Delta(G(V, E)) = \max d(v).$$

[1] Используют также обозначение deg v.

ВАЛЕНТНОСТЬ (СТЕПЕНЬ)

- Если степени всех вершин графа равны *k,* то граф называется ***регулярным*** графом степени *k*: $\delta(G) = \Delta(G) = k$.
- **Степень регулярности** является *инвариантом* графа и обозначается *r(G)*.

Для нерегулярных графов *r(G)* не определено.

Пример:

На рис.6. приведены диаграммы двух регулярных, но неизоморфных графов степени 3.

На рис.7. приведена диаграмма регулярного графа степени 3.

Рис. 6. Диаграммы неизоморфных графов с совпадающими инвариантами

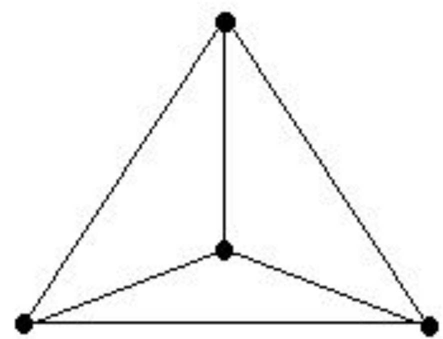


Рис. 7. Диаграмма регулярного графа степени 3

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

ТЕОРЕМА (Эйлера). *Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер:* $\Sigma\, d(v) = 2q$.

Доказательство:

При подсчете суммы степеней вершин каждое ребро учитывается два раза: для одного конца ребра и для другого.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Число вершин нечетной степени четно.*

Доказательство:

По теореме Эйлера сумма степеней всех вершин - четное число. Сумма степеней вершин четной степени четна, значит, сумма степеней вершин нечетной степени также четна, следовательно, их четной число.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Сумма полустепеней узлов орграфа равна удвоенному количеству дуг:* $\Sigma\, d^{+}(v) + \Sigma\, d^{-}(v) = 2q$.

Доказательство:

Сумма полустепеней узлов орграфа равна сумме степеней вершин графа, полученного из орграфа забыванием ориентации дуг.

МАРШРУТЫ И ЦЕПИ

- ***Маршрутом*** $M(v_0, v_k)$ в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер v_0, e_1, v_1, e_2, v_2,..., e_k, v_k, в которой любые два соседних элемента инцидентны.
  - Если $v_0 = v_k$, то маршрут ***замкнут***, иначе ***открыт***.
- Если все ребра различны, то маршрут называется ***цепью***.
  - Если все вершины (а значит, и ребра) различны, то маршрут называется ***простой цепью***.
  - В цепи v_0, e_1,..., e_k, v_k вершины v_0 и v_k называют ***концами*** цепи. Говорят, что цепь с концами *u*, *v* ***соединяет*** вершины *v* и *u*. *Цепь*, соединяющая вершины *u* и *v*, обозначается **<*u*, *v*>.**

Очевидно, что если есть цепь, соединяющая вершины *u* и *v*, то есть и простая цепь, соединяющая эти вершины.

ЦИКЛЫ

- *Замкнутая цепь* называется ***циклом***.

Число циклов в графе G обозначается $z(G)$.

  - *Замкнутая простая цепь* называется ***простым циклом***.

- Граф без циклов называется ***ациклическим***.
- Для ориентированных графов *цепь* называется ***путем***, а *цикл* - ***контуром***.
- Граф, состоящий из простого цикла с k вершинами, обозначается C_k.

Пример: C_3 - треугольник.

МАРШРУТЫ, ЦЕПИ, ЦИКЛЫ

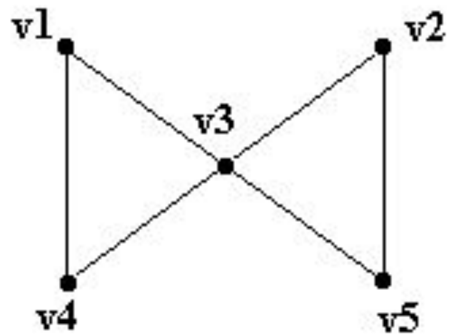


Рис. 8. Маршруты, цепи, циклы

Пример:

v_1, v_3, v_1, v_4 - маршрут, но не цепь;

$v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4$ - цепь, но не простая цепь;

v_1, v_4, v_3, v_2, v_5 - простая цепь;

$v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4$ - цикл, но не простой цикл;

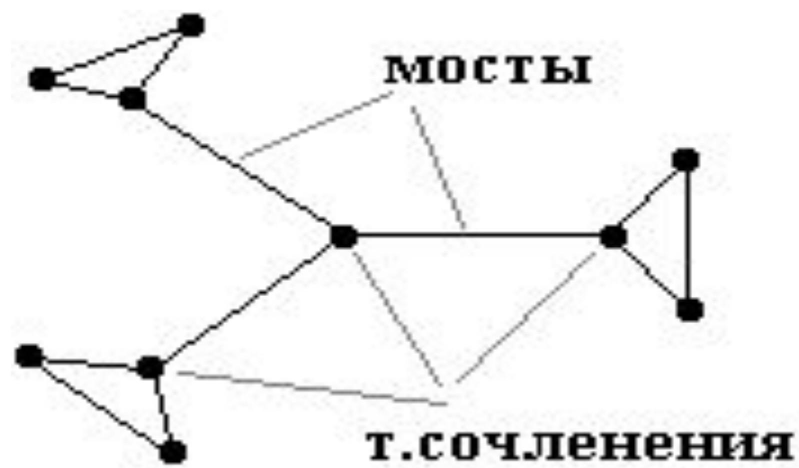
v_1, v_3, v_4, v_1 - простой цикл.

СВЯЗНОСТЬ

- Две вершины в графе ***связаны***, если существует соединяющая их (простая) цепь.
- Граф, в котором *все вершины связаны*, называется ***связным***.
- Отношение связанности вершин является *эквивалентностью*.
- *Классы эквивалентности* по отношению связанности называются ***компонентами связности*** графа. Число компонент связности графа G обозначается k(G).
- Граф G является связным тогда и только тогда, когда k(G) = 1.

СВЯЗНОСТЬ

- Если $k(G) > 1$, то G - ***несвязный*** граф.
- Граф, состоящий только из изолированных вершин (в котором $k(G)=p(G)$ и $r(G) = 0$), называется ***вполне несвязным***.
- ***Точка сочленения / мост*** – это вершина / ребро, удаление которой /которого приводит к нарушению связности компонент данного графа.



СВЯЗНОСТЬ

ТЕОРЕМА. *Если граф G имеет p-вершин и k-компонент связности, то максимально возможное количество ребер в нем* ***N(p, k) = ½(p - k + 1)(p - k)***

Связность характеризуется:

1. ***Числом вершинной связности*** *(числом связности) χ(G)* - наименьшим количеством вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. ***Числом реберной связности*** *λ(G)* - минимальным количеством ребер, удаление которых приведет к несвязному графу.

СВЯЗНОСТЬ

В общем случае $\chi(G) \leq \lambda(G) \leq deg_{min}(G)$,

где $deg_{min}(G)$ - минимальная степень вершин в графе.

- **Рассмотрим случай $\lambda(G) \leq deg_{min}(G)$:**
  - Если граф тривиален, следовательно, в нем нет ребер, а значит: $\lambda(G) = deg(G) = 0$.
  - Если G - связный граф, то превратить его в несвязный граф можно следующим образом: найти вершины с минимальной степенью и удалить инцидентные им ребра.
- **Рассмотрим случай $\chi(G) \leq \lambda(G)$:**
  - Для несвязных графов $\chi = \lambda = 0$;
  - Для графа с мостом $\chi = \lambda = 1$.
  - В общем случае $\chi \leq \lambda$, так как удаление вершины ведет за собой удаление всех инцидентных ребер.

РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ВЕРШИНАМИ, ЯРУСЫ И ДИАМЕТР ГРАФА

- ***Длиной маршрута*** называется количество ребер в нем (с повторениями). Если маршрут $M = v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k$, то длина M равна k (обозначается $|M| = k$).
- ***Расстоянием*** между вершинами u и v (обозначается $d(u, v)$) называется длина кратчайшей цепи $\langle u, v \rangle$, а сама кратчайшая цепь называется ***геодезической***.
- Множество вершин, находящихся на одинаковом расстоянии n от вершины v (обозначение $D(v, n)$), называется ***ярусом***: $D(v, n) = \{u \in V \mid d(v, u) = n\}$

Ясно, что всякий граф однозначно разбивается на ярусы относительно данной вершины.

- ***Диаметром*** графа G (обозначается D(G)) называется длина длиннейшей геодезической цепи.
- ***Обхват*** графа - это длина кратчайшего простого цикла.
- ***Окружение*** графа - длина максимального простого цикла.

ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ И ЦЕНТР

- ***Эксцентриситетом*** $e(v)$ вершины v в связном графе G(V, E) называется максимальное расстояние от вершины v до других вершин графа G: $e(v) = max\ d(v, u)$.

Наиболее эксцентричные вершины - это концы диаметра.

- ***Радиусом*** $R(G)$ графа G называется наименьший из эксцентриситетов вершин: $R(G) = min\ e(v)$.
- Вершина v называется ***центральной***, если ее эксцентриситет совпадает с радиусом графа, $e(v) = R(G)$.
- Множество центральных вершин называется ***центром*** и обозначается C(G): $C(G) = \{ v \in V \mid e(v) = R(G)\}$.

ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ И ЦЕНТР

Пример:

На рис.9. указаны эксцентриситеты вершин и центры двух графов. Вершины, составляющие центр, выделены.

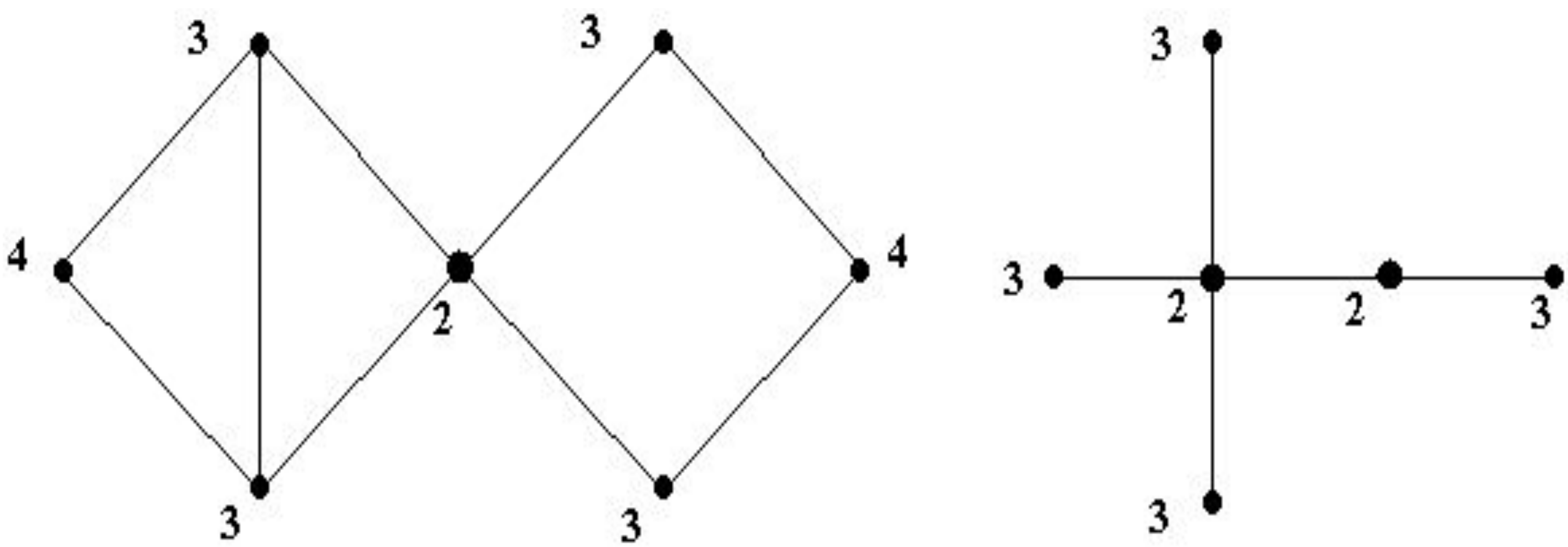
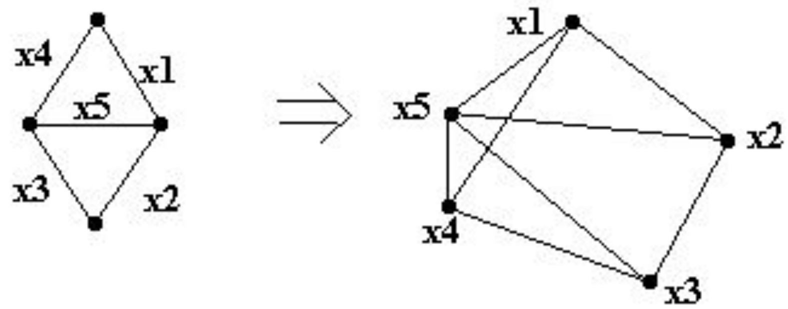


Рис. 9. Эксцентриситеты вершин и центры графов

СМЕЖНОСТНЫЕ ГРАФЫ

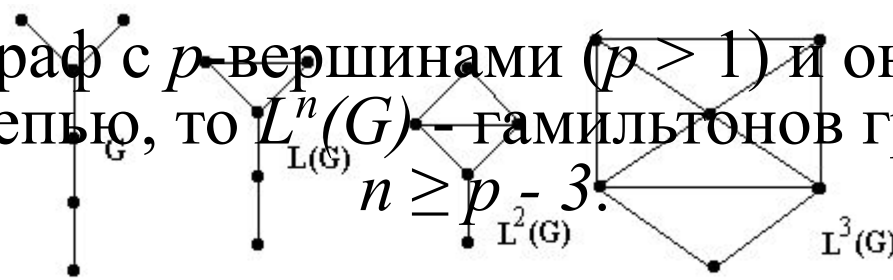


Построение смежностного графа

- Смежностный граф обозначается *L(G)*.
- В смежностном графе количество вершин равно количеству ребер в исходном графе - *q*. Количество ребер в смежностном графе равно $\frac{1}{2}\sum_{i=1}(\deg(V_i)^2) - q$
- $L(G) = (\, q, \frac{1}{2}\sum_{i=1}(\deg(V_i)^2) - q \,)$

СВОЙСТВА СМЕЖНОСТНЫХ ГРАФОВ

- Связный граф *G* изоморфен своему смежностному графу, если он - простой цикл длиной 3.
- Если имеется эйлеров граф, то смежностный ему граф - эйлеров и гамильтонов.
- Если имеется гамильтонов граф, то смежностный ему граф - тоже гамильтонов.
- Если *G* - граф с *p*-вершинами ($p > 1$) и он не является простой цепью, то $L^n(G)$ - гамильтонов граф для всех $n \geq p - 3$.



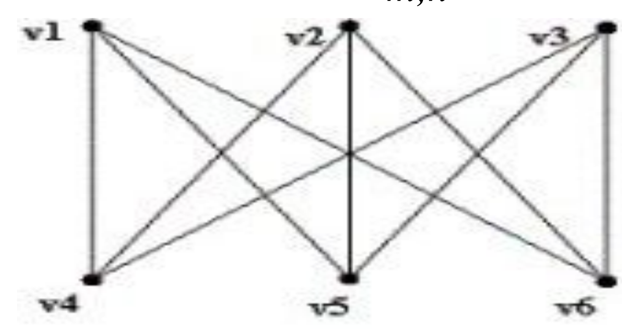
ДВУДОЛЬНЫЕ ГРАФЫ

- ***Двудольный*** граф (или *биграф*, или *четный граф*) - это граф $G(V, E)$, такой что
  - множество V разбито на два непересекающихся множества V_1 и V_2,
  - причем всякое ребро из E инцидентно вершине из V_1 и вершине V_2 (то есть соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2).
- Множества V_1 и V_2 называются ***долями*** двудольного графа.
- Если двудольный граф содержит все ребра, соединяющие множества V_1 и V_2, то он называется ***полным двудольным графом***.

Если $|V_1| = m$ и $|V_2| = n$, то полный двудольный граф – $K_{m,n}$.

Пример:

На рис. приведена диаграмма графа $K_{3,\ 3}$



ДВУДОЛЬНЫЕ ГРАФЫ

- **ТЕОРЕМА**. *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы имеют четную длину.*

Доказательство:

[Необходимость.] От противного.
Пусть $G(V_1, V_2; E)$ - двудольный граф, и $v_1, v_2, ..., v_{2k+1}, v_1$ - простой цикл нечетной длины. Пусть $v_1 \in V_1$,тогда $v_2 \in V_2,..., v_{2k+1} \in V_1$. Имеем: v_1, $v_{2k+1} \in V_1$ и $(v_1, v_{2k+1}) \in E$, что противоречит двудольности.

[Достаточность.] Не ограничивая общности, можно считать, что G - связный граф, поскольку каждую компоненту связности можно рассматривать отдельно. Разобьем множество V на V_1 и V_2.
Далее от противного. Пусть есть две вершины в одной доле, соединенные ребром. Пусть для определенности $u, w \in V_2$ и $(u, w) \in E$. Рассмотрим геодезические $<v, u>$ и $<v, w>$. Тогда длины $|<v, u>|$ и $|<v, w>|$ нечетны. Эти геодезические имеют общие вершины (по крайней мере вершину v). Рассмотрим наиболее удаленную от v общую вершину геодезических $<v, u>$ и $<v, w>$ и обозначим ее v' (может оказаться так, что $v = v'$). Имеем: $|<v', u>| + |<v', w>| = |<v, u>| + |<v, w>| - 2|<v, v'>|$ - четно, и $v',...,u, w,...,v'$ - простой цикл нечетной длины, что противоречит условию.

ДВУДОЛЬНЫЕ ГРАФЫ

- ***Совершенным паросочетанием*** из одного множества в другое в двудольном графе G называется <u>взаимно однозначное соответствие</u> между данными множествами, обладающие тем свойством, что соответствующие вершины в исходном графе смежны.

- **ТЕОРЕМА** (о свадьбах). *Пусть некоторый граф $G(V_1, V_2)$ - двудольный и для каждого подмножества $A \subset V_1$, обозначим через $\varphi(A) \subset V_2$ множество вершин, которые смежны хотя бы с одной вершиной в множестве A. Тогда совершенное паросочетание существует тогда и только тогда, когда*

$$| A | \leq | \varphi(A) |$$

ДЕРЕВЬЯ

- Граф без циклов называется ***ациклическим*** (или ***лесом***).
- ***Дерево*** - это связный ациклический граф. (обозначается T_n, где n - количество вершин)

Дерево можно построить путем добавления ребер в его вершинах. Простейшее дерево состоит из 2 вершин, соединенных ребром. При добавлении очередного ребра, добавляется еще одна вершина.

- Граф G - ***дерево***, если это связанный граф и $p=q+1$, где p, q - количество вершин и ребер соответственно.
- Граф G - ***дерево***, если это ациклический граф такой, что если между двумя его вершинами провести ребро, в нем получится ровно 1 простой цикл.
- Граф G - ***дерево***, если любые 2 его вершины соединены простой цепью.

ДЕРЕВЬЯ

- При введении в графе операции удаления ребра, причем такой операции, которая не приводит к нарушению связности графа, можно получить ее последовательным применением (пока возможно) ***остовное дерево***.
- Если имеем граф с характеристиками (p, q)-граф, то для получения дерева надо удалить $q - p + 1$ ребро. Данное число называется ***циклическим рангом*** графа или ***цикломатическим числом*** $v(G) = q - p + 1$.
- Число $v^*(G) = p - 1$ ребер любого остова графа G называется ***коциклическим рангом*** графа G.

  $v(T_n) = 0$, $v(C_n) = 1$ - простой цикл,

  $v(G^k) = q - p + k$, $v^*(G^k) = p - k$,

где G^k - несвязный граф состоящий из k-компонент связности.

ДЕРЕВЬЯ

ТЕОРЕМА. *Центр свободного дерева состоит из одной вершины или из двух смежных вершин:*

$$z(G) = 0 \quad \& \quad k(G) = 1 \Rightarrow C(G) = K_1 \vee C(G) = K_2.$$

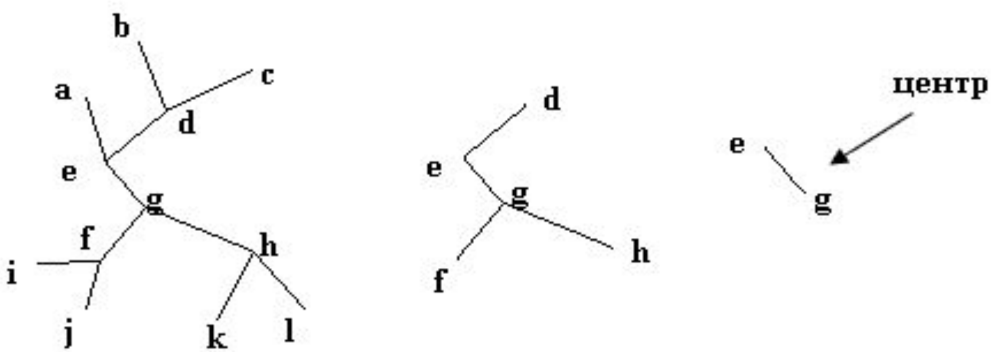
Доказательство:

Для деревьев K_1 и K_2 утверждение теоремы очевидно.

Пусть теперь $G(V, E)$ - некоторое свободное дерево, отличное от K_1 и K_2. Рассмотрим граф $G'(V', E')$, полученный из G удалением всех висячих вершин. Заметим, что G' - дерево, поскольку ацикличность и связность при удалении висячих вершин сохраняется.

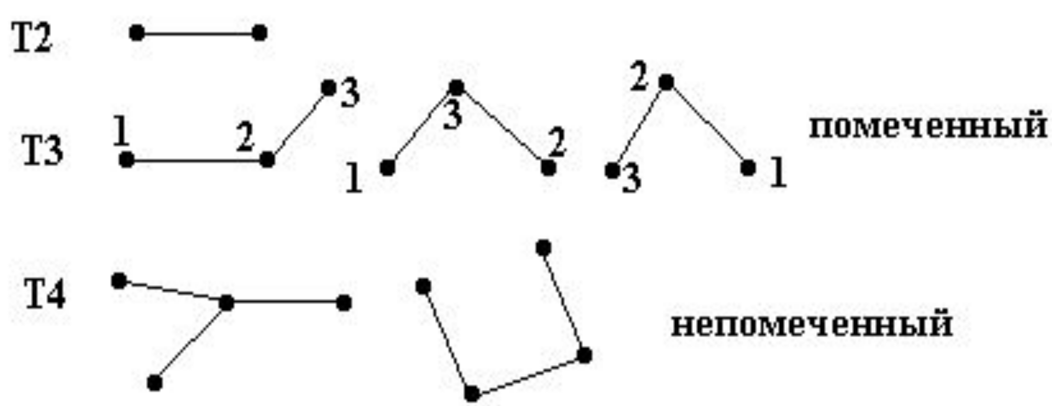
Далее, если эксцентриситет $e_G(v) = d(v, u)$, то u - висячая вершина в дереве G. Поэтому $\forall v \in V' \quad e_G(v) = e_{G'}(v) + 1$ и при удалении висячих вершин эксцентриситеты оставшихся уменьшаются на 1. Следовательно, при удалении висячих вершин центр не меняется, $C(G) = C(G')$.

Поскольку дерево G конечно, то удаляя на каждом шаге все висячие вершины, в конце концов за несколько шагов придем к K_1 или K_2.



ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ДЕРЕВЬЕВ

- Теория перечисления деревьев занимается разработкой методов подсчета неизоморфных графов, обладающих данными свойствами.
- Основной вопрос теории перечисления деревьев - сколько существует деревьев T_n неизоморфных друг другу.
- Данная задача была решена ученым Келли. Он доказал, что всего может быть $\boldsymbol{n^{n-2}}$ помеченных неизоморфных деревьев. Данная теория применяется для решения задач при создании кратчайшей связной цепи.



ОСТОВНОЕ ДЕРЕВО МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

Пример:

Пусть необходимо построить сеть железных дорог, связывающую n городов таким образом, чтобы из каждого города можно было попасть в любой город и количество рельсов при этом должно быть минимальным.

<u>Формальная постановка задачи:</u>

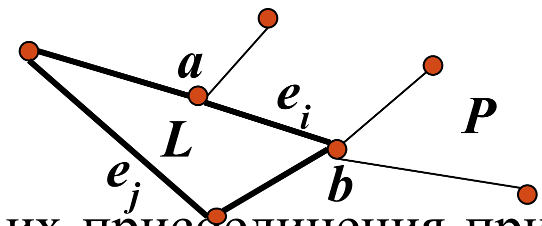
Имеется n городов a_1, a_2,…,a_n, которые нужно соединить сетью дорог. Для каждой пары городов (a_i, a_j) известна стоимость строительства дороги $d(a_i, a_j)$. Требуется найти самый дешевый вариант строительства. То есть, нужно найти на взвешенном полном графе из n вершин остовное дерево наименьшей длины.

ПОСТРОЕНИЕ ОСТОВА МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

- Алгоритм Г.Штейнгауза:
  - Выбрать любой город и соединить его с ближайшим. И повторить это действие для всех остальных городов.
  - Если вместо единого дерева получился лес, то необходимо выбрать одно из деревьев леса и соединить его кратчайшим ребром с другим деревом. И повторить такое связывание деревьев пока не будет получено одно дерево.
- Алгоритм Краскала
  - Соединить 2 вершины графа наиболее коротким ребром.
  - Последовательно добавлять самое короткое ребро из оставшихся так, чтобы не образовывалось циклов.
  - Остовное дерево графа, построенное по данному алгоритму называется ***экономическим***.

ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ДЕРЕВО

ТЕОРЕМА. *Экономическое дерево имеет минимальную длину в графе.*



Доказательство:

Пусть **P** – остовное дерево минимальной длины;
Q – экономическое дерево.

Пусть ребра $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ занумерованы в порядке их присоединения при построении экономического дерева **Q**, т.е. $d(e_k) \le d(e_{k+1})$.

Если **P** ≠ **Q**, то имеется хотя бы 1 ребро $e_i \notin$ **P**, соединяющее некоторые вершины a и b в графе **Q**.

Пусть L(a,b) – цепь графа **P**, соединяющая в нем эти вершины a и b.

Если ребро e_i добавить к графу **P**, получится цикл. А так как граф **Q** циклов не имеет, то в полученный цикл должно входить 1 ребро не из графа **Q** – ребро e_j. Удалив его из **P**, получим дерево **P'** с тем же числом вершин, что и в графе **P**, длина которого равна $d(\mathbf{P'})=d(\mathbf{P})+d(e_i)-d(e_j)$.

Так как граф **P** имеет наименьшую длину, то $d(e_j) \le d(e_i)$, но e_i – ребро наименьшей длины, при добавлении которого к ребрам $e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}$ по алгоритму построения экономического дерева **Q** не получается циклов.

При добавлении ребра e_j к этим ребрам также не получается циклов, то $d(e_i)=d(e_j)$, и, следовательно, **P'** имеет также как и **P** наименьшую длину и одним общим ребром больше с экономическим деревом **Q**, чем **P**.

Повторяя эту операцию несколько раз, получим дерево наименьшей длины, совпадающее с экономическим деревом.

ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

- ***Эйлеров граф*** - это связный граф, если в нем существует замкнутая цепь, проходящая ровно 1 раз через каждое ребро.
- Если снять ограничение на замкнутость, то получим ***полу-Эйлеров граф***.

ЛЕММА. *Если степень каждой вершины графа не меньше 2, то он содержит цикл.*

Лемма является очевидной, так как построение такого маршрута возможно, если нет висячих вершин (степень которых меньше 2).

ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

ТЕОРЕМА. *Для связанного графа G следующие утверждения эквивалентны:*

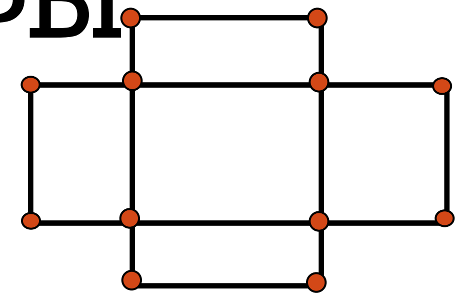
1. *G - эйлеров граф;*
2. *каждая вершина графа G имеет четную степень;*
3. *множество ребер графа можно разбить на простые циклы.*

Доказательство:

2. Надо доказать, что из 1) следует 2).

Так как по определению Эйлерова графа - это граф, в котором есть маршрут, содержащий ровно 1 раз каждое ребро графа, следовательно, рассматривая данный маршрут, данную вершину будем проходить несколько раз (при обходе графа, как минимум, по 1 разу входим в вершину и 1 раз уходим из нее, следовательно, ее степень кратна 2, т.е. четна);

ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

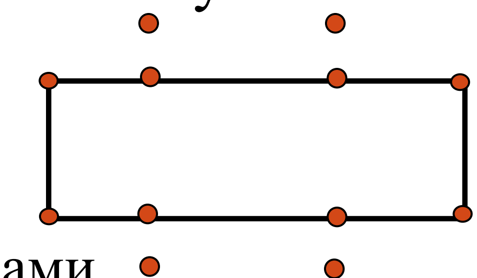


2. Надо доказать, что из 2) следует 3).

Так как G - связный и нетривиален,

то степень каждой вершины не меньше двух, следовательно, (по лемме) в графе G имеется цикл. Удалим этот цикл из графа.

Так как все вершины имеют четную степень, то полученный граф обладает теми же свойствами.



В этом графе все вершины имеют

- четную степень (также 0),
- либо являются отдельно стоящими вершинами,
- либо существует компонента связности с четной степенью,

следовательно, есть цикл.

Удаляем циклы из графа, пока весь граф не будет представлен множеством тривиальных графов;

ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

3. Надо доказать, что из 3) следует 1).

Допустим z_1 - некоторый цикл, принадлежащий G.
Если G состоит только из z_1, следовательно, эквивалентность при 3) $\Rightarrow$ 1) доказана, граф Эйлеров.
В противном случае, если есть еще z_2, то эти два простых цикла имеют одну общую вершину. И как бы мы не строили маршрут, два раза будем проходить через вершину, следовательно это Эйлеров граф.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть G - связный граф, в котором не более двух вершин имеют нечетные степени, тогда в графе G существует незамкнутая цепь, содержащая все ребра. И граф – полу-Эйлеров.*

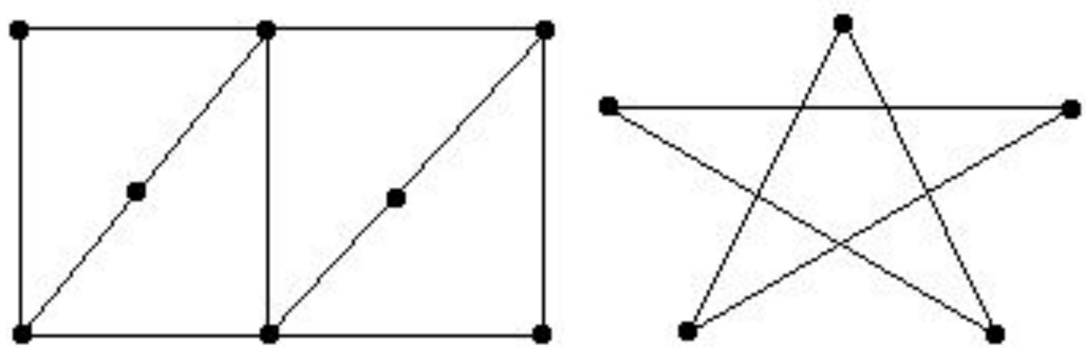
Пример:
Нужно решить задачу: существует план выставки. Нужно так расставить указатели, чтобы посетитель побывал в каждом зале 1 раз и посетил их все.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ЭЙЛЕРОВА ЦИКЛА

- Выбираем любую вершину;
- Идем по ребрам произвольным образом, соблюдая следующие принципы:
  - удаляем ребра по мере прохождения;
  - удаляем изолированные вершины;
  - на каждом этапе идем по мосту лишь тогда, когда нет другой возможности.

ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ

- ***Гамильтонов граф*** - это граф, в котором имеется простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа.
- Этот *цикл* называют ***гамильтоновым***.
- Простую *цепь*, содержащую каждую вершину графа, также называют ***гамильтоновой***.



не гамильтонов граф гамильтонов граф

Нет теоремы, дающей необходимого и достаточного условия определения гамильтонова графа.

ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ

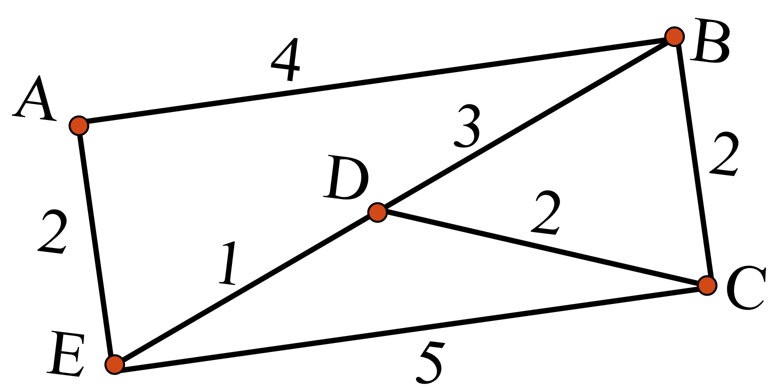
- Достаточные условия наличия в графе гамильтонова цикла:

1. Граф со степенной последовательностью $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ является гамильтоновым, если для всякого k, удовлетворяющего неравенствам $1 \leq k < n/2$, истинна импликация $(d_k \leq k) \Rightarrow (d_{n-k} \geq n - k)$;
2. Если в G с $p>3$ для любой вершины степень не меньше $p/2$, то это гамильтонов граф;
3. Если для любой пары несмежных вершин сумма их степеней больше либо равна p, то это гамильтонов граф.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЁРА

- Имеется n городов, расстояния между которыми известны. Коммивояжер должен посетить все n городов по одному разу, вернувшись в тот, с которого начал. Требуется найти такой маршрут движения, при котором суммарное пройденное расстояние будет минимальным.

Очевидно, что это задача отыскания кратчайшего гамильтонова цикла в нагруженном полном графе.



МЕТОД ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА

Схема решения задачи коммивояжера:

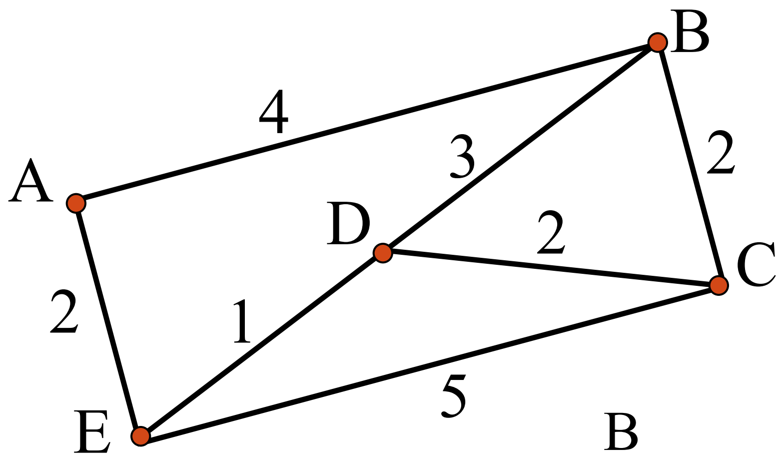
- Сгенерировать все $n!$ возможных перестановок вершин полного графа.
- Подсчитать для каждой перестановки длину маршрута.
- И выбрать из них кратчайший.

Очевидно, такое вычисление потребует не менее $O(n!)$ шагов.

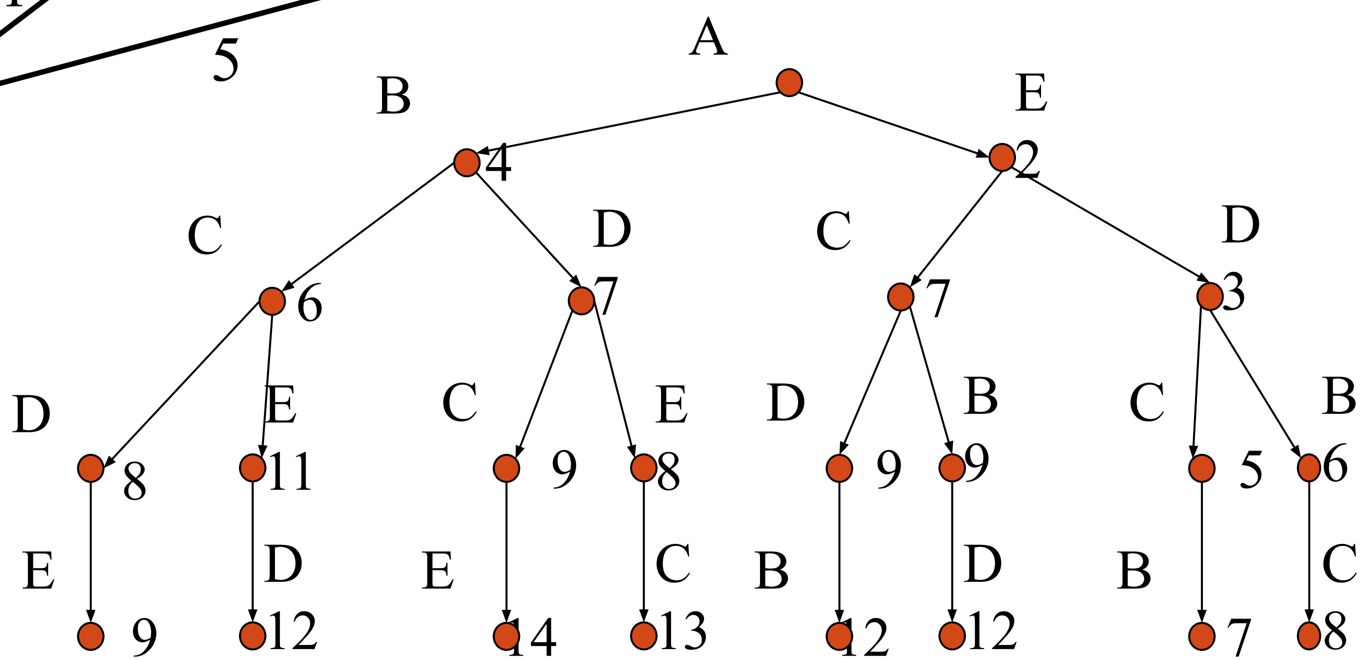
$n!$ - быстро растущая функция. Таким образом, решение задачи коммивояжера методом *полного перебора* оказывается практически неосуществимым даже для сравнительно небольших n.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n!	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800	39916800	479001600	6227020800	87178291200	1,30767E+12

МЕТОД ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА



Дерево решений



A 11 - 16 - 16 - 11 -

МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

1. Выбрать начальную вершину A графа и присвоить ей оценку длины пути 0.
2. Провести все ветви из вершины с минимальной оценкой.
3. Каждой из образовавшихся вершин присвоить соответствующую оценку.
4. *?* Имеется ли среди образовавшихся вершин вершина A (начальная вершина)

Да: 5. Вычислить длину полученного цикла L_m.

6. Отсечь все маршруты, оценки которых $\geq L_m$.

Нет: 7. *?* Есть ли на графе неотсеченные вершины

Да: 2.

Нет: 8. Выписать полученный маршрут L_m.

ЗАДАЧА О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ

Дан неориентированный взвешенный граф $G(V,E)$. Каждому ребру графа приписано число $d(e) \geq 0$, называемое длиной ребра. При этом любая цепь $\mu = <v_0, v_k>$ характеризуется длиной:

$$d(\mu) = \sum_{e \in \mu} d(e).$$

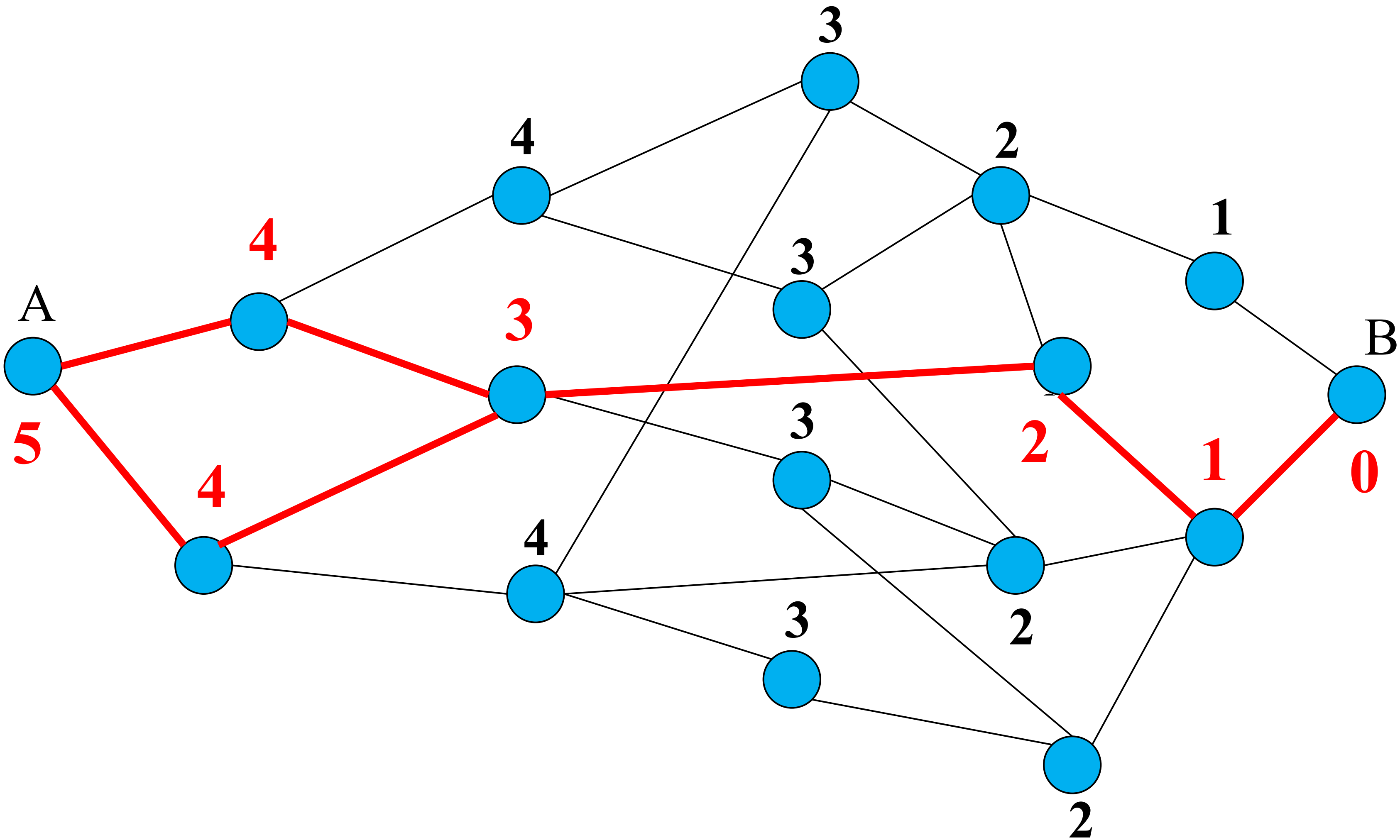
Требуется найти для 2 произвольных вершин a и b графа G путь $<a,b>$, такой, чтобы его длина была наименьшей.

КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ В ГРАФЕ С РЕБРАМИ ЕДИНИЧНОЙ ДЛИНЫ

Правило: каждой вершине v_i приписывают индекс w_i, равный длине кратчайшего пути из данной вершины в конечную.

Порядок приписывания индексов:

1. Конечной вершине b приписывается индекс $w_b=0$.
2. Всем вершинам, смежным с конечной вершиной b, приписывается индекс, равный 1.
3. Всем вершинам, смежным с помеченными вершинами, приписывается индекс на 1 больший, чем у смежной помеченной вершины.
4. Процесс разметки (п.3) продолжается до тех пор, пока не будет помечена начальная вершина a. Ее индекс w_a будет равен искомой длине кратчайшего пути.
5. Кратчайший путь определяется при движении из начальной вершины в направлении уменьшения значений индексов.



A
B
5
4
4
3
2
1
0
3
4
2
1
3
3
3
4
3
2
2

КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ В ГРАФЕ С РЕБРАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Порядок приписывания индексов:

1. Каждая вершина помечается индексом следующим образом:
   - Конечной вершине b приписывается индекс $w_b = 0$;
   - Всем остальным v_i – $w_i = \infty$.
2. Ищем ребро (v_i, v_j), такое, чтобы $(w_j - w_i) > d(v_i, v_j)$ и заменяем индекс w_j индексом $w_j' = w_i + d(v_i, v_j) < w_j$.
3. Процесс разметки (п.3) продолжается до тех пор, пока остается хотя бы 1 ребро (v_i, v_j), для которого можно уменьшить w_i.
4. Кратчайший путь определяется при движении из начальной вершины в направлении уменьшения значений индексов, причем $(w_i - w_j) = d(v_i, v_j)$.

УКЛАДКА ГРАФА

- ***Жордановой кривой*** называют непрерывную спрямленную линию, не имеющую самопересечений.
- *Граф G* ***укладывается*** *в пространство* ***S***, если существует такая *биекция* вершин и ребер графа *G* соответственно в точки и жордановы кривые этого пространства, которая сохраняет *инцидентность* ребер и вершин графа *G*. Изображенный таким образом граф называют ***укладкой графа G в пространство S***.

ТЕОРЕМА ОБ УКЛАДКЕ ГРАФА

ТЕОРЕМА. Каждый граф укладывается в трехмерное (евклидово) пространство.

Доказательство:

Разместим все вершины графа в различных точках оси OX.

Из всех плоскостей, проходящих через эту ось, выберем $|E_G|$ различных плоскостей. Каждое ребро $e \in E_G$ изображаем в отдельной плоскости полуокружностью, соединяющей вершины этого ребра.

Таким образом, получаем укладку графа в евклидовом пространстве, т.к. все ребра лежат в разных плоскостях и не пересекаются.

ПЛОСКИЕ ГРАФЫ

- ***Плоским*** называется граф, который размещен на плоскости или сфере без пересечений.
- ***Планарным*** называется граф, который изоморфен плоскому. Это граф, который укладывается на плоскости, т. е имеет *плоскую укладку*.
- ***Гранью*** графа называется максимальное по включению множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена жордановой кривой, не пересекающей ребра графа.
- ***Границей грани*** является множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани (или цикл, ее образующий).
- Всякий плоский граф имеет одну, и притом единственную, неограниченную грань. Эта грань называется ***внешней*** гранью. Остальные грани графа называются ***внутренними***.

СВОЙСТВА ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ

1. Всякий планарный граф допускает такую плоскую укладку, в которой любая выбранная вершина (ребро) будет принадлежать внешней грани.
2. Граф *G*, полученный путем слияния 2 вершин (ребер), принадлежащих различным планарным графам , является планарным. При этом вершина (ребро) слияния является точкой (ребром) сочленения графа *G*.
3. Всякие 2 вершины, принадлежащие границе некоторой грани плоского графа, можно соединить простой цепью произвольной длины так, что выбранная грань разобьется на 2 грани.
4. Для любого плоского графа каждая точка плоскости, не лежащая на ребре, входит только в одну грань.
5. Для любого плоского графа каждая точка ребра, не являющаяся вершиной, входит только в одну грань, если это ребро является мостом, и точно в 2 грани, если оно не мост.

ПЛАНАРНОСТЬ

ТЕОРЕМА. *Если G - связный плоский граф, имеющий p-вершин и q-ребер и f-граней, то* $\boldsymbol{p + f - q = 2}$.

Доказательство:

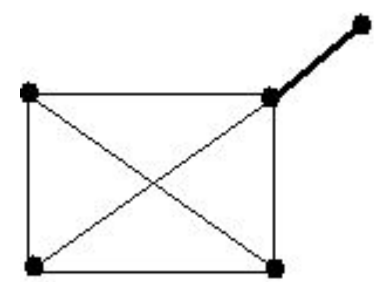
Возьмем тривиальный граф: $p = 1, q = 0, f = 1$. Проверяем $1 + 1 - 0 = 2$.

Возьмем граф $G(2,1)$. Проверим: $2 + 1 - 1 = 2$.

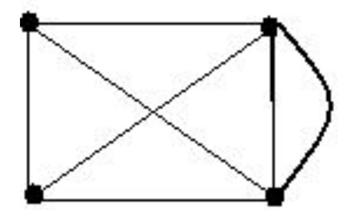
Допустим теорема справедлива для $q = q'$.

Добавляем новое ребро в этот граф, в итоге получается 2 случая:

1. Данное ребро не образует новой грани, следовательно $(p + 1) + f - (q' + 1) = p + f - q$.



2. Данное ребро образует новую грань, следовательно, не образуется новая вершина: $p + f_{+1} - q_{+1} = 2$.



Данная теорема называется ***формулой Эйлера*** для многогранников. Метод доказательства - индуктивный.

ПЛАНАРНОСТЬ

СЛЕДСТВИЯ:

1. Пусть G планарен и у него p-вершин, q-ребер, f-граней и k-компонент связности, тогда

$$p + f - q - k = 1;$$

2. Если G - связный планарный граф, имеющий хотя бы 1 цикл нечетной длины, то $q \le 3p - 6;$
   - Для двудольных графов в этом случае: $p \le 2p - 4.$
3. Число граней любой плоской укладки связного планарного (p,q)-графа постоянно и равно

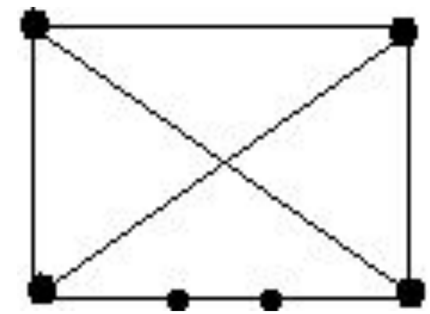
$$q - p + 2.$$

   - Т.е. число граней планарного графа не зависит от способа его укладки на плоскости.

ПЛАНАРНОСТЬ

ТЕОРЕМА (Понтрягина - Куратовского). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа гомеоморфного K_5 и $K_{3,3}$.*

- Графы G_1 и G_2 - ***гомеоморфны***, если они оба могут быть получены из одного и того же графа включением в его ребра новых вершин степени 2.



Решение задач на планарность необходимы в автоматизированном проектировании, когда необходимо, например, произвести трассировку печатной платы.

Вопрос о трассировке печатной платы - это вопрос получения разбиения графа на *n*-планарных подграфов.

АЛГОРИТМ ПЛОСКОЙ УКЛАДКИ ГРАФА. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть построена некоторая плоская укладка подграфа $G^1(V^1,E^1)$ графа $G(V,E)$.

- ***Сегментом S относительно G^1*** называют подграф графа G одного из двух видов:
  1. Ребро $e=(v_i,v_j) \in V: v_i,v_j \in V^1, e \notin E^1$;
  2. Связную компоненту графа $(G - G^1)$, дополненную
     - всеми ребрами графа G, инцидентными вершинам взятой компоненты, и
     - концами этих ребер.
- Вершину a сегмента S относительно G^1 называют ***контактной***, если $a \in V^1$.
- ***Допустимой гранью*** для сегмента S относительно G^1 называют грань графа G^1, содержащую все контактные вершины сегмента S. Обозначим $\Gamma(S)$ – множество допустимых граней для S (оно может быть и пустым).

Алгоритм плоской укладки графа. Основные определения

- Простую цепь сегмента *S*, соединяющую 2 различные контактные вершины, и не содержащую других контактных вершин, называют ***α-цепью***. Всякая *α-цепь* сегмента может быть уложена в любую грань, допустимую для этого сегмента.
- Два сегмента S_1 и S_2 относительно G^1 называют ***конфликтующими***, если
  1. $Q = \Gamma(S_1) \cap \Gamma(S_2) \neq \varnothing$,
  2. существуют 2 *α-цепи* из разных сегментов S_1 и S_2, которые нельзя без пересечений уложить одновременно не в какую грань $\Gamma \in Q$.

  Иные сегменты не конфликтуют.

АЛГОРИТМ ПЛОСКОЙ УКЛАДКИ ГРАФА. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Граф $G(V,E)$

Уложенный подграф графа G - $G^1(V^1,E^1)$

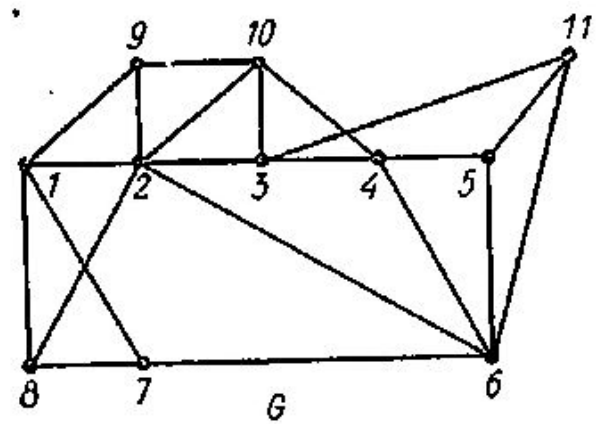
Допустимые грани:

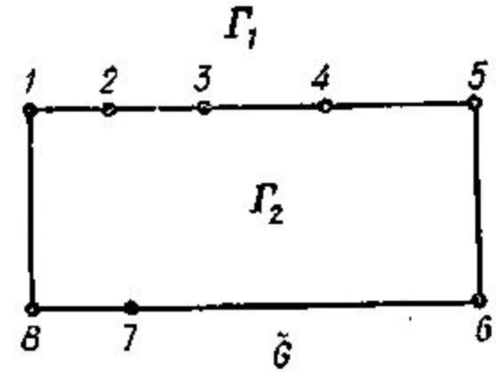
$\Gamma(S_i) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$

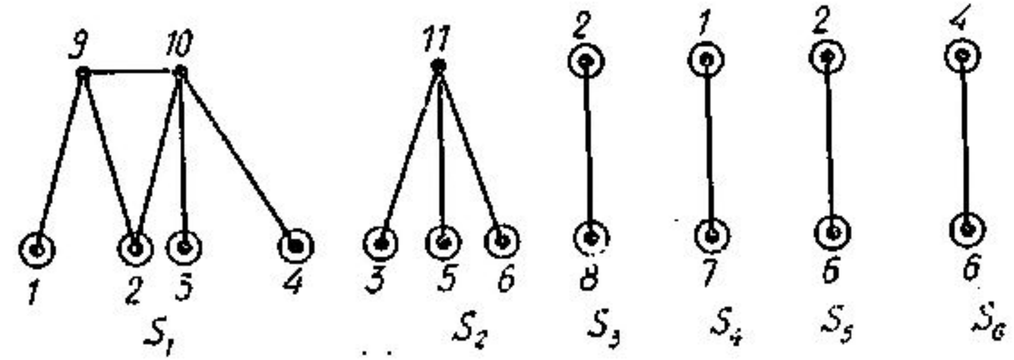
α-цепи S_1:

(1,9,10,4), (1,9,2), (2,9,10,4), (2,10,4), (2,10,3), (3,10,4)

Конфликтующие сегменты: S_1 и S_2, S_3 и S_4; S_2 и S_6







S_i - сегменты относительно G^1

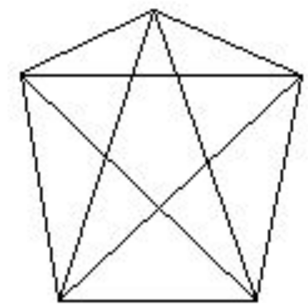
Контактные вершины

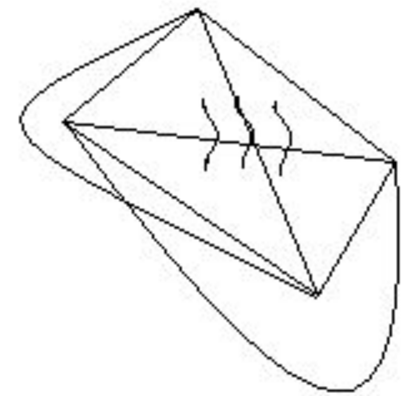
Г-АЛГОРИТМ ПЛОСКОЙ УКЛАДКИ ГРАФА

1. Выберем некоторый простой цикл C графа G и уложим его на плоскости; пусть $G^1 = C$.
2. Найдем грани G^1 и сегменты относительно G^1. Если множество сегментов пусто, то построена плоская укладка графа G – конец.
3. Для каждого сегмента S определяем множество $\Gamma(S)$.
4. Если существует сегмент S, для которого $\Gamma(S) = \varnothing$, то граф не планарен – конец; иначе – п.5.
5. Если существует сегмент S, для которого $|\,\Gamma(S)\,| = 1$, то п.7.; иначе – п.6.
6. Для некоторого сегмента S ($|\,\Gamma(S)\,| > 1$) выбрать произвольную допустимую грань Γ.
7. Поместить произвольную *α-цепь* сегмента **S** в выбранную грань Г; заменить G^1 на (G^1 + *α-цепь*); и перейти на п.2.

РОД И ТОЛЩИНА ГРАФА

- ***Родом*** графа *g(G)* обозначается наименьшее количество ручек, которое необходимо добавить к сфере, чтобы граф был уложен на этой поверхности без пересечений.





Для планарных графов $g = 0$,

для графа K_5 $g = 1$.

Если нужно, чтобы данный на рисунке граф был без пересечений нужна 1 ручка.

Графы K_5, $K_{3,3}$, $K_{4,4}$, K_7 - ***тороидальные*** графы, то есть у них род $g = 1$.

Для любой поверхности имеется конечный набор графов, который ее характеризует, то есть тех графов, которые нельзя уложить на данной поверхности.

РОД И ТОЛЩИНА ГРАФА

Обобщение ТЕОРЕМЫ Эйлера на графы рода *g*.

Пусть дан G(p, q), имеющий f-граней, то для него справедливо:

$$p + f - q = 2 - 2g$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любого связанного графа с p-вершинами и q-ребрами, причем p $\geq$ 4, справедливо:* $g =]\ (q - 3p + 1)/6\ [$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для полных графом справедливо*

$$g(K_p) =]\ (p - 3)(p - 4)/12\ [$$

- ***Толщина графа*** - это минимальное количество планарных подграфов графа *G*, таких что их объединение дает граф *G*.

Известно, что толщина полных графов равна $\theta\,(K_p) = \begin{cases} 1, & p = 3, 4 \\ 2, & p = 5..8 \\ 3, & p \geq 9 \end{cases}$

РОД И ТОЛЩИНА ГРАФА

- Так как в планарном графе $q = 3p - 6$, то $\theta(G) \geq \frac{q}{3p-6}$
- Так как в полном графе $q = p(p - 1)/2$, то $\theta(K_p) \geq \frac{p(p-1)}{6(p-2)}$

ТЕОРЕМА (о степенях вершин в планарном графе). *В любом планарном графе существует вершина, степень которой не больше 5.*

Доказательство:

Допустим, такой вершины нет, тогда степень каждой вершины не меньше 6, следовательно,

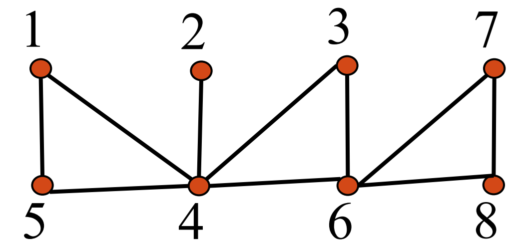
$$6p \leq 2q, \quad \text{то есть} \quad q \geq 3p.$$

Но для планарных графов $q \leq 3p - 6$.

Получили противоречие.

ВНУТРЕННЯЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

- Подмножество вершин графа $G(V,E)$ называется ***независимым*** (*внутренне устойчивым*), если никакие 2 вершины из этого множества не смежны.



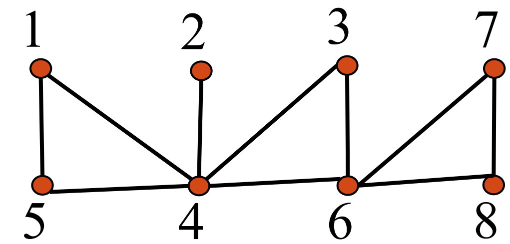
{1, 2, 3}, {1, 2}, {2, 3, 7}, {2, 5, 6}

Т.е. если $S \subseteq V$ и S независимо в G, то подграф $G(S)$ – пустой. И если при этом $S' \subset S$, то S' – также независимое множество.

- Независимое множество ***максимально***, если оно не является собственным подмножеством некоторого другого независимого множества. {4, 7}
- *Наибольшее по мощности* независимое множество называется ***наибольшим***. {1, 2, 3, 7}, {2, 3, 5, 8}
- Число вершин в наибольшем независимом множестве графа G называется ***числом независимости*** $\alpha_0(G)$ (*числом внутренней устойчивости, неплотностью*) графа. $\alpha_0(G) = 4$.

ВНЕШНЯЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

- Подмножество V' вершин графа $G(V,E)$ называется ***доминирующим*** (*внешне устойчивым*), если каждая вершина из множества V/V' смежна с некоторой вершиной из V'.



$\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 6\}, \{4, 8\}, \{4, 6\}$

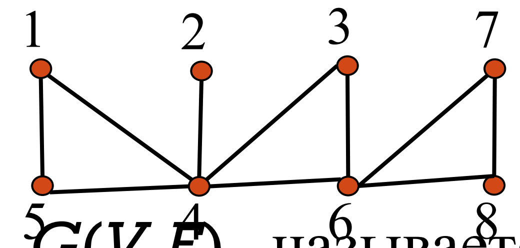
- Доминирующее множество ***минимально***, если никакое его собственное подмножество не является доминирующим. {4, 7}
- Доминирующее множество с *наименьшей мощностью* называется ***наименьшим***. {4, 6}, {4, 7}, {4, 8}
- Подмножество вершин графа, являющееся как *независимым*, так и *доминирующим* называется ***ядром*** графа.

{1, 2, 3, 7}, {1, 2, 3, 8}, {2, 3, 5, 7}, {2, 3, 5, 8}, {4, 7}

ПОКРЫТИЯ

- Вершина и ребро графа ***покрывают*** друг друга, если они инцидентны.

Ребро $e = (1,4)$ покрывает вершины *1* и *4*, а вершины *1,4* покрывают ребро *e*.



- Подмножество $V' \subseteq V$ вершин графа $G(V,E)$ называется ***покрытием*** (*вершинным покрытием, опорой*) графа G, если каждое ребро графа G инцидентно хотя бы одной вершине множества V'.

$$\{1,2,3,5,6,8\}, \{4,5,6,8\}, \{4,5,6,7\}$$

- Покрытие графа ***минимально***, если не содержит покрытия с меньшим числом вершин. $\{1,2,3,5,6,8\}$

- Покрытие графа называют ***наименьшим***, если число вершин в нем наименьшее среди всех покрытий графа.

$$\{4,5,6,8\}, \{4,5,6,7\}$$

- Число вершин в наименьшем покрытии называется $\beta_0(G)$ ***числом покрытия*** (*числом вершинного покрытия*) графа.

$$\beta_0(G) = 4$$

НЕЗАВИСИМОСТЬ И ПОКРЫТИЯ

ТЕОРЕМА. *Подмножество* V' *вершин графа* $G(V,E)$ *является (наименьшим, минимальным) покрытием тогда и только тогда, когда* $\square V' = V/V'$ – *(наибольшее, максимальное) независимое множество.*
И, следовательно, $\alpha_0(G) + \beta_0(G) = |\ G\ |$.

ТЕОРЕМА. *Для любого графа* G *верно неравенство:*

$$\alpha_0(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1 + \deg(v)}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Для любого графа с* n *вершинами верно*

$$\alpha_0(G) \geq n / (1 + d),$$

где d – *среднее арифметическое степеней вершин графа.*

ПОСТРОЕНИЕ НЕЗАВИСИМОГО МНОЖЕСТВА

- Алгоритм построения независимого множества M, такого что $|M| \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1+\deg(v)}$

1. Выбрать в графе вершину с минимальной степенью и занести ее в множество M.
2. Удалить из графа G выбранную в п.1 вершину и все смежные с ней вершины.
3. Продолжать процесс выполнения п.1 и п.2 до тех пор, пока в графе G не останется вершин.

Данный алгоритм обеспечивает лишь приближенное решение.

РЕБЕРНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ

- Произвольное подмножество попарно несмежных ребер графа называется ***паросочетанием*** (*независимым множеством ребер*).
- Паросочетание графа называется ***максимальным,*** если оно не содержится в паросочетании с большим числом ребер.
- Паросочетание графа называется ***наибольшим***, если число ребер в нем наибольшее среди всех паросочетаний графа.
- ***Числом паросочетания*** $\alpha_1(G)$ графа называется число ребер в наибольшем паросочетании.

РЕБЕРНОЕ ПОКРЫТИЕ

- ***Реберным покрытием графа*** G называется такое подмножество ребер графа, которое покрывает все вершины этого графа.
- Реберное покрытие графа ***минимально***, если оно не содержит покрытий с меньшим числом ребер.
- Реберное покрытие графа называется ***наименьшим***, если число ребер в нем наименьшее среди всех реберных покрытий графа.
- ***Числом реберного покрытия*** $\beta_1(G)$ графа называется число ребер в наименьшем покрытии.
- Паросочетание называется ***совершенным***, если оно является одновременно реберным покрытием.

Если в графе есть совершенное паросочетание, то оно является наименьшим реберным покрытием.

ПАРОСОЧЕТАНИЯ И РЕБЕРНЫЕ ПОКРЫТИЯ

ТЕОРЕМА. *Для любого графа* G *порядка* p *без изолированных вершин верно* $\alpha_1(G) + \beta_1(G) = p$.

Очевидно, что нижняя граница значения $\beta_1(G)$ – это $p/2$, т.е. $\beta_1(G) \geq p/2$, где p – число вершин графа.

РАСКРАСКА ГРАФА

- ***Раскраска графа*** - это такое приписывание цветов вершинам графа, чтобы 2 смежные вершины не были одного цвета.
- ***Одноцветный класс*** - это множество всех вершин одного цвета.
- ***Хроматическое число*** - это минимальное число n, для которого граф имеет n-раскраску. Обозначение: $\boldsymbol{\chi}$.
- Граф называется n-раскрашиваемым, если его хроматическое число $\chi(G) \leq n$.
- Граф n-хроматический, если $\chi(G) = n$.
- Любой граф имеет n-раскраску, если $\chi(G) \leq n \leq p$.
- Для полных графов $\chi = p$, для двудольных $\chi = 2$, для графов-циклов $\chi = 2$, если длина четная и 3, если длина нечетная. Для дерева $\chi = 2$.

РАСКРАСКА ГРАФА

- **ТЕОРЕМА.** *χ любого графа удовлетворяет неравенству $\chi(G) \leq 1 + \alpha$, где α - максимальная степень вершины в графе.*

- **ТЕОРЕМА.**

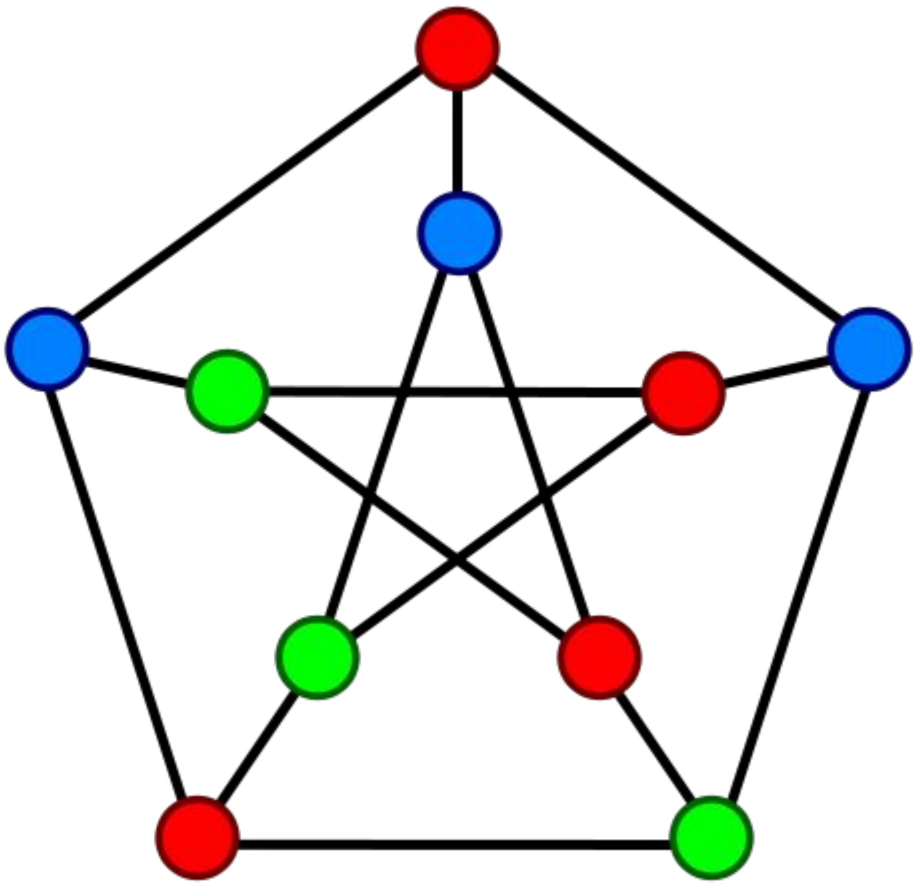
1. *$\chi = \alpha$, если граф G не содержит в качестве компоненты полный граф с количеством вершин $\alpha + 1$;*
2. *Для $\alpha = 2$, G не содержит цикл нечетной длины.*

- Данные теоремы целесообразно применять, когда степени вершин в графе приблизительно равны. Иначе получится грубая оценка.

- **ТЕОРЕМА** (о четырех красках). *Для любого нетривиального связного планарного графа $\chi = 2..4$*

- **СЛЕДСТВИЕ.** *Любой планарный граф, не содержащий цикл нечетной длины имеет $\chi \leq 3$.*
  Для любой карты достаточно четырех красок, чтобы ее раскрасить.

ПРИМЕР 3-РАСКРАСКИ ГРАФА ПЕТЕРСЕНА



РЕБЕРНАЯ РАСКРАШИВАЕМОСТЬ

- Граф G - n-реберно раскрашиваем, если необходимо n-красок, чтобы раскрасить ребра графа таким образом, чтобы любые 2 инцидентные одной вершине ребра не были одного цвета.

- Если G n-реберно раскрашиваем, то n - его **хроматический класс** $\chi_l(G)$.

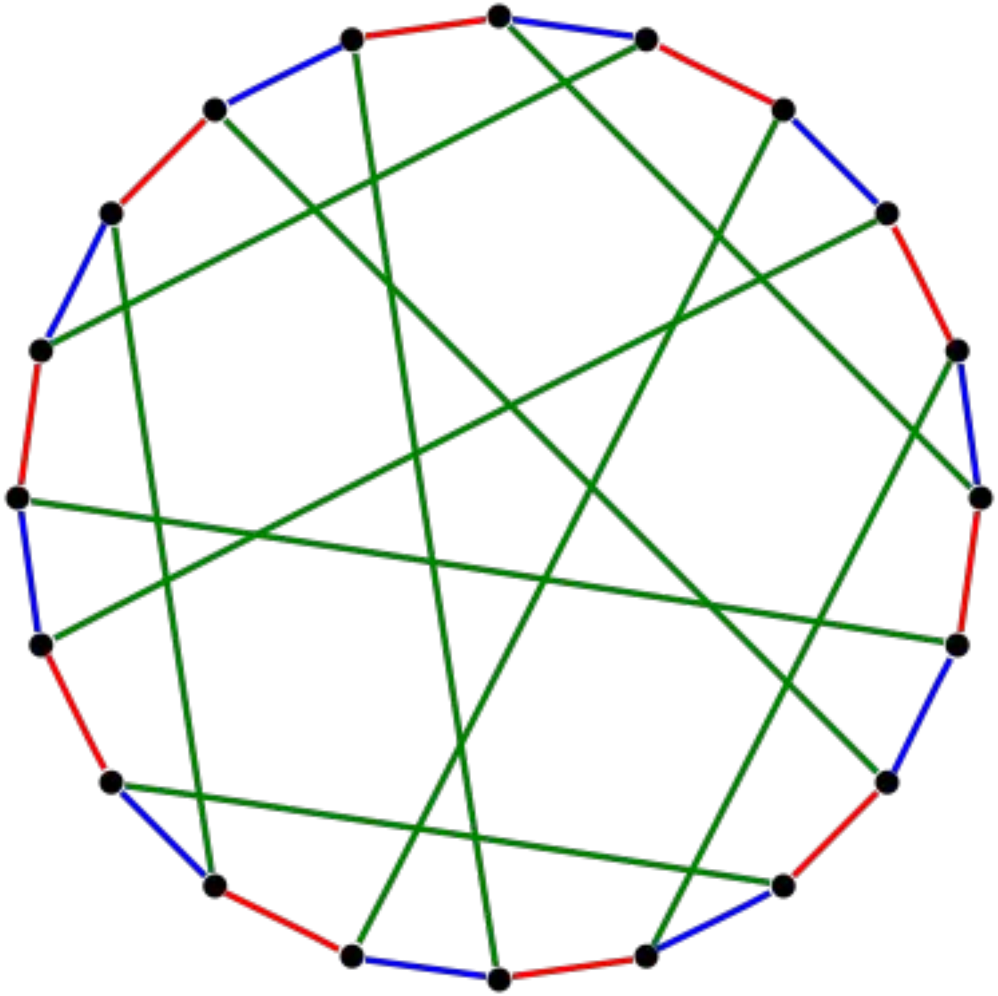
- Для хроматического класса справедливо неравенство $\alpha \le \chi_l(G) \le \alpha + 1$.

- Для простых циклов $\chi_l = 2$, если длина четна и 3, если нечетна.

- Для двудольного графа $K_{m,n}$ $\chi_l(K_{m,n}) = max(m, n)$.

- Для полного графа K_p $\chi_l(K_p) = p$, если p - нечетно и $p \neq 1$; и $p - 1$, если p - четно.

ПРИМЕР РЁБЕРНОЙ РАСКРАСКИ



ХРОМАТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН

- Свяжем с каждым помеченным графом некоторую функцию. Раскраской графа G t-цветами назовем раскраску, использующей не более t цветов.
- Две раскраски *различны*, если хотя бы одной вершине присвоены разные цвета.
- Пусть $P(G, h)$ - количество способов, которыми можно раскрасить граф G n-красками. Если $\chi > n$, то $P = 0$. Минимальное n, для которого $P \neq 0$ есть χ данного графа.
- Для K_3 $P(K_3, n) = n(n - 1)(n - 2)$.
- Для любого полного графа $P(K_p, n) = c_n^p = n(n - 1)(n - 2)...(n - p + 1)$ - это хроматический многочлен полного графа.

СВОЙСТВА ХРОМАТИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА

1. Степень хроматического многочлена равна *p*;
2. Коэффициент при K_p равен 1;
3. Коэффициент при $n_{p-1} = -q$, коэффициенты чередуются по знаку.
   Минимальный показатель степени *n* равен числу компонент в графе *G*.

- Хроматический многочлен достаточно полно характеризует граф *G*, но нет необходимости и достаточных условий определения того, что многочлен является хроматическим, то есть для него существует некий граф.