Теорема Менелая и ее применение при решении задач (подготовка к ЕГЭ)

Методическая разработка
Рудаковой Татьяны Викторовны
Учителя математики МБОУ «Гимназия № 2»
г. Курчатова Курской области

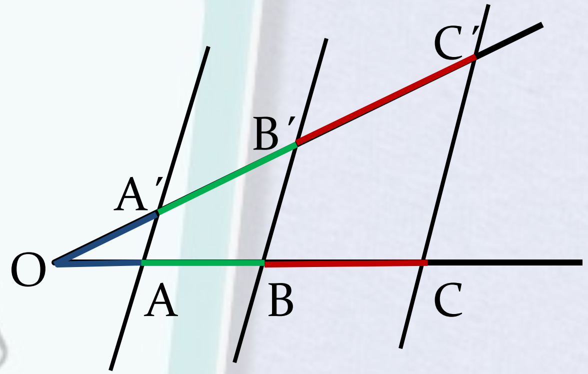
Содержание

1. Теоретические факты:
   а) пропорциональные отрезки в треугольниках
   б) отношение площадей треугольников.
2. Теорема Менелая.
3. Применение теоремы для решения задач.

Теоретические факты

Теорема Фалеса

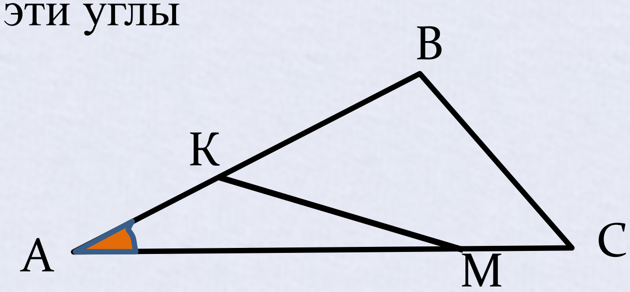
Параллельные прямые пересекая стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.



$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Теоремы об отношении площадей треугольников

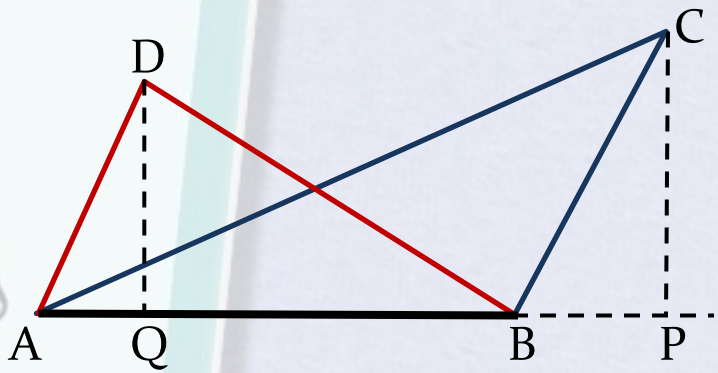
1. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то отношение площадей этих треугольников равно отношению произведений сторон, содержащих эти углы



$$\frac{S_{ABC}}{S_{AKM}} = \frac{AB \cdot AC}{AK \cdot AM}$$

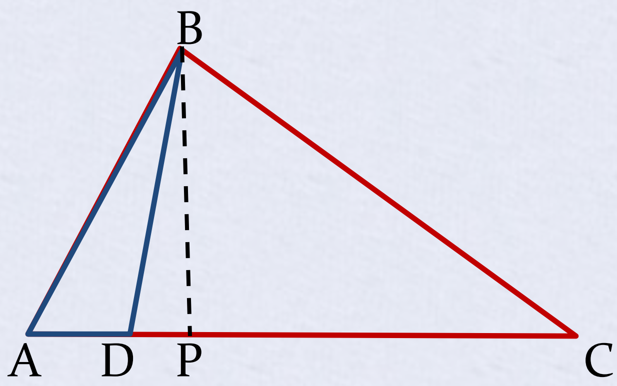
Теоремы об отношении площадей треугольников

2. Пусть ΔABC и ΔABD имеют общую сторону AB. Тогда отношение их площадей равно отношению высот, проведенных из вершин C и D.



S(ΔABC) : S(ABD) = CP:DQ.

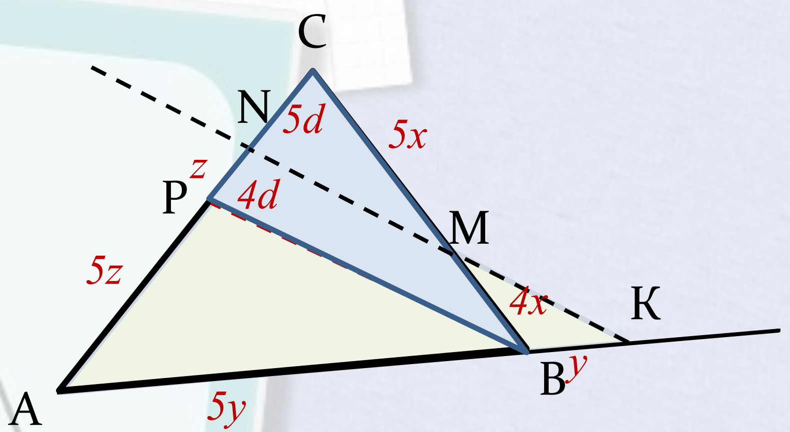
3. Отношение площадей треугольников, имеющих равные высоты равно отношению оснований:



S(ΔABC) : S(ABD) =AC:AD.

Задача.(Р.К.Гордин.Математика.ЕГЭ-2014.ЗадачаС4.№6.3)

На стороне ВС треугольника АВС и на продолжении стороны АВ за вершину В расположены точки М и К соответственно, причем ВМ:МС = 4:5 и ВК:АВ=1:5. Прямая КМ пересекает сторону АС в точке N. Найти отношение CN: AN.



Решение

1. Проведем ВР параллельно КМ.
2. По теореме Фалеса для угла NAK:

$$\frac{AP}{PN} = \frac{AB}{BK}$$

3. По теореме Фалеса для угла ВСР:

$$\frac{CM}{MB} = \frac{CN}{NP}$$

4. Итак, $z=4d$, тогда AN=$6z=24d$, значит CN:AN=5:24.

Ответ: 5:24

Предложенный вариант решения задачи – один из традиционных, без применения теоремы Менелая.

Рассмотрим другой (более рациональный) способ решения, применяя указанную теорему

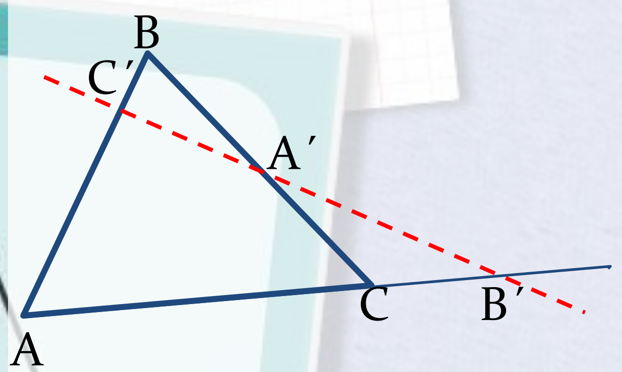
Теорема Менелая

Пусть на сторонах AB, BC и на продолжении стороны AC ΔABC взяты соответственно точки C′, A′ и B′, не совпадающие с вершинами ΔABC. Точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{BA'}=1$$

Для дальнейшего решения задач воспользуемся необходимым условием данной теоремы.

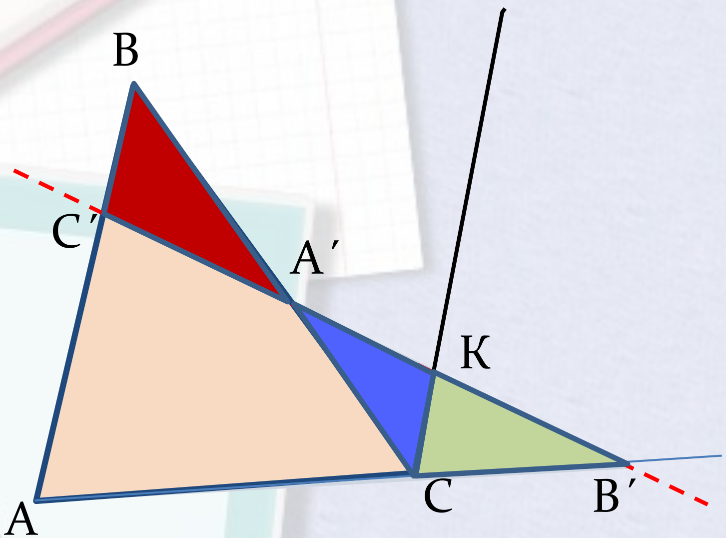
Теорема Менелая



Если на сторонах BC, AB и продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C отмечены соответственно точки A′, C′,B′, лежащие на одной прямой, то

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{BA'} = 1$$

Доказательство



$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{BA'}=1$$

1. Проведем СК //АВ, тогда **ΔСКВ′ ~ Δ АС′В′**, поэтому $\frac{CK}{AC'}=\frac{CB'}{AB'}$

$$CK=\frac{CB'\cdot AC'}{AB'}$$

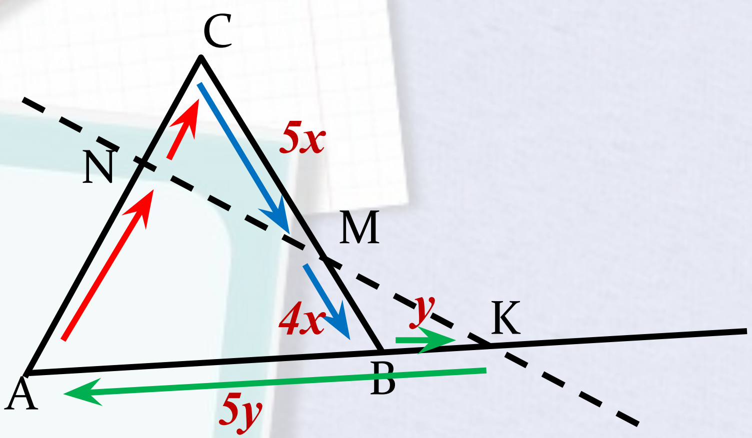
2. **Δ СКА′ ~ ΔВС′А′**, поэтому $\frac{CK}{BC'}=\frac{CA'}{BA'}$

3. Подставляя СК из п.1, имеем

$$\frac{CB'}{AB'}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{CA'}{BA'}$$

Задача.(Р.К.Гордин.Математика.ЕГЭ-2014.ЗадачаС4.№6.3)

На стороне ВС треугольника АВС и на продолжении стороны АВ за вершину В расположены точки М и К соответственно, причем ВМ:МС = 4:5 и ВК:АВ=1:5. Прямая КМ пересекает сторону АС в точке N. Найти отношение CN: AN.



$$\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BK}{KA}=1$$

Стрелки на рисунке (от точки А) показывают, как легко запомнить последовательность отрезков в пропорции.

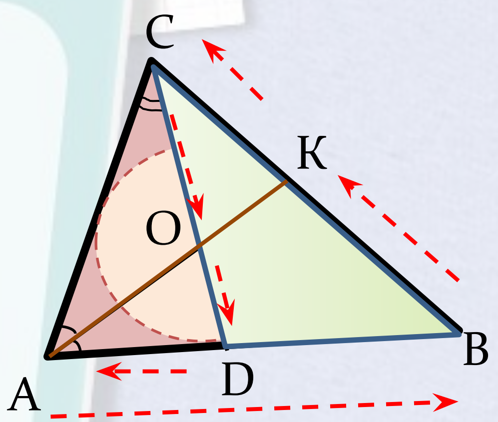
Найдем $\frac{CN}{AN}$

$$\frac{AN}{NC}\cdot\frac{5x}{4x}\cdot\frac{y}{6y}=1$$

$$\frac{AN}{NC}=\frac{24}{5}$$

Ответ: $\frac{CN}{AN}=\frac{5}{24}$

Задача. **(Р.К.Гордин. Математика. ЕГЭ-2014. ЗадачаС4. №6.10)**
В треугольнике АВС АВ=с, ВС=а, АС=в. В каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису CD?



Найти: $\frac{\text{CO}}{\text{OД}}$

Ответ: $\frac{\text{CO}}{\text{OД}} = \frac{\text{a} + \text{в}}{\text{c}}$

Решение:

1. Для треугольника BCD и секущей АК: $\frac{\text{BK}}{\text{KC}} \cdot \frac{\text{CO}}{\text{OД}} \cdot \frac{\text{ДА}}{\text{AB}} = 1$

$$\frac{\text{c}}{\text{в}} \cdot \frac{\text{CO}}{\text{OД}} \cdot \frac{\text{ДА}}{\text{c}} = 1$$

2. Найдем ДА: $\frac{\text{ДА}}{\text{c} - \text{ДА}} = \frac{b}{a}$

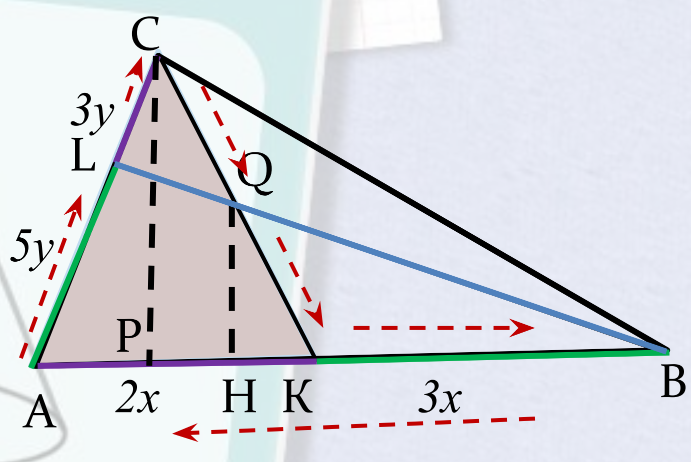
$$\text{ДА} = \frac{\text{в}c}{a + \text{в}}$$

3. Найдем $\frac{\text{CO}}{\text{OД}}$:

$$\frac{\text{CO}}{\text{OД}} = \frac{\text{c}}{\text{ДА}} \cdot \frac{\text{в}}{\text{c}} = \frac{\text{вc}}{\text{a} + \text{в}}$$

Задача. **(Р. К. Гордин. Математика. ЕГЭ-2014. Задача С4. №6.14)**

В ΔABC, площадь которого равна 6, на стороне AB взята т.К, делящая эту сторону в отношении AK:BK=2:3, а на стороне AC взята т. L, делящая AC в отношенииAL:LC=5:3. Точка Q пересечения прямых CK и BL отстоит от прямой AB на расстояние 1,5. Найти сторону AB.



Решение:

1. Для тр. ACK и секущей BL найдем отношение CQ:QK.

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{CQ}{QK} \cdot \frac{3}{5} = 1 \qquad \frac{CQ}{QK} = 1$$

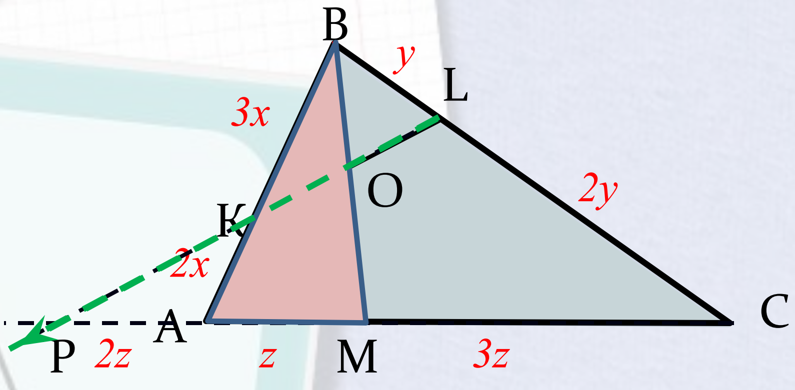
2. Проведем высоту CP. CP// QH.

3. По теореме Фалеса H – середина PK, тогда QH-средняя линия CPK, значит CP=3.

4. S (ABC) =0,5 AB•CP, тогда AB=2S(ABC) :CP=4.

Ответ: AB = 4.

Задача.(Математика ЕГЭ-2014. Типовые тестовые задания. 30 вариантов. Под редакцией А.Л.Семенова, И.В.Ященко. Трениров.работа 28. С4)
На сторонах АВ, ВС и АС ΔАВС взяты соответственно точки К, L и М, причем АК:КВ=2:3, BL:LC=1:2, CM:MA=3:1. В каком отношении отрезок KL делит отрезок ВМ?



Найти $\frac{BO}{OM}$

Ответ: $\frac{BO}{OM} = \frac{1}{1}$

Решение:

1. Для ΔАВС и секущей KL:

$$\frac{CL}{LB} \cdot \frac{BK}{KA} \cdot \frac{AP}{PC} = 1 \qquad \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{AP}{PC} = 1$$

2. $AP = \frac{1}{3} PC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 4z = 2z$, значит

$$\frac{AP}{PM} = \frac{2z}{3z} = \frac{2}{3}$$

3. Для ΔАВМ и секущей KL:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BO}{OM} \cdot \frac{MP}{PA} = 1 \qquad \frac{2x}{3x} \cdot \frac{BO}{OM} \cdot \frac{3z}{2z} = 1$$

$$\frac{BO}{OM} = \frac{1}{1}$$

Задача. (Сайт А.А.Ларина. Тренировочный вариант №67. от 09.03.2014. С4)

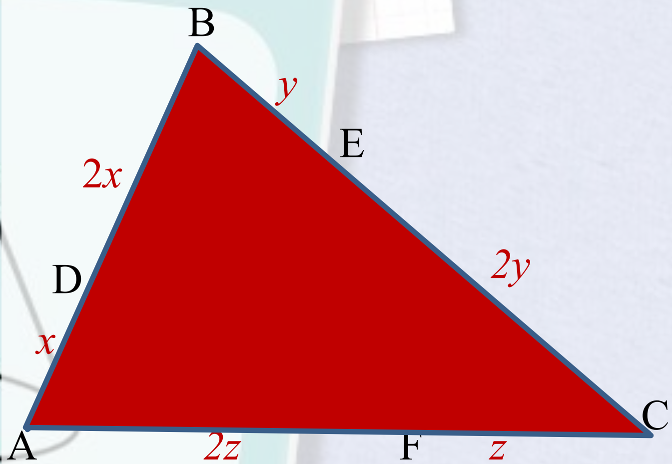
В ΔABC на сторонах AB, BC, и CA отложены соответственно отрезки $AD = \frac{1}{3} AB$, $BE = \frac{1}{3} BC$, $CF = \frac{1}{3} CA$.

а) доказать, что $S_{AMC} = S_{ANB} = S_{BKC}$, где $M = AE \cap CD$, $K = CD \cap BF$, $N = AE \cap BF$.

б) найти, какую часть от площади ΔABC составляет площадь ΔMNK.

а) докажем, что

$S_{AMC} = S_{ANB} = S_{BKC}$



1. Для ΔABF и секущей DC: $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BK}{KF} \cdot \frac{FC}{CA} = 1$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{BK}{KF} \cdot \frac{1}{3} = 1$ $\quad \frac{BK}{KF} = \frac{6}{1}$ $\quad \frac{BK}{BF} = \frac{6}{7}$

$S_{BKC} = \frac{6}{7} S_{BCF} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{2}{7} S_{ABC}$

2. Для ΔAEC и секущей FB: $\frac{CF}{FA} \cdot \frac{AN}{NE} \cdot \frac{EB}{BC} = 1$

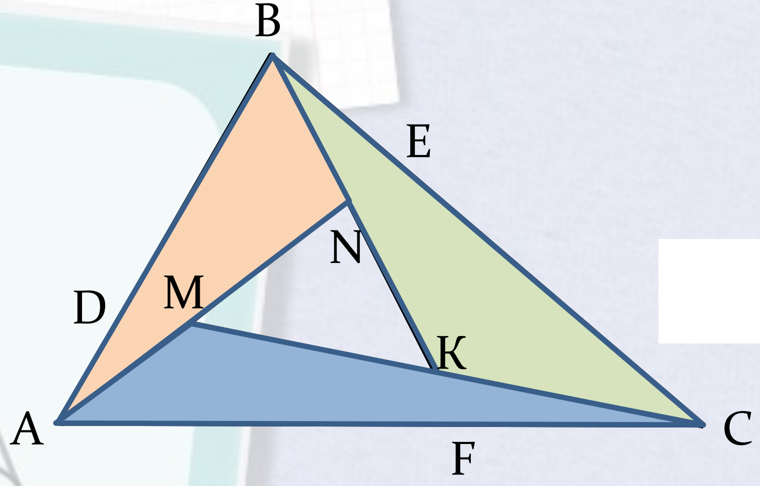
$\frac{1}{2} \cdot \frac{AN}{NE} \cdot \frac{1}{3} = 1$ $\quad \frac{AN}{NE} = \frac{6}{1}$ $\quad \frac{AN}{AE} = \frac{6}{7}$

$S_{ABN} = \frac{6}{7} S_{ABE} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{2}{7} S_{ABC}$

3. Для ΔDBC и секущей EA аналогично

$$S_{AMC} = \frac{2}{7} S_{ABC}$$

Задача. (Сайт А.А.Ларина. Тренировочный вариант №67. от 09.03.2014. С4)
В ΔABC на сторонах AB, BC, и CA отложены соответственно отрезки $AD = \frac{1}{3} AB$, $BE = \frac{1}{3} BC$, $CF = \frac{1}{3} CA$.
б) найти, какую часть от площади ΔABC составляет площадь ΔMNK.



б) Итак, $S_{BKC} = \frac{2}{7} S_{ABC}$

$$S_{ABN} = \frac{2}{7} S_{ABC}$$

$$S_{AMC} = \frac{2}{7} S_{ABC}$$

Тогда

$$S_{MNK} = S_{ABC} - 3 \cdot \frac{2}{7} S_{ABC} = \frac{1}{7} S_{ABC}$$

Ответ: $\frac{1}{7} S_{ABC}$

Заключение

Решение задач с помощью теоремы Менелая более рационально, чем их решение другими способами, требующими дополнительных действий и построений, которые не всегда оказываются очевидными. Теорема Менелая помогает быстро и оригинально решить задачи повышенной сложности, в том числе и задачи уровня С единого государственного экзамена.

Используемая литература

- ЕГЭ 2014.Математика. Задача С4. Гордин Р.К. Под ред. Семенова А.Л.2013г.
- Математика. ЕГЭ-2014. Типовые тестовые задания. 30 вариантов. Под ред. А. Л.Семенова, И.В.Ященко. 2014г.
- http://alexlarin.net/ege/2014/trvar67.html