

## ГЛАВА 9

# ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

- Электромагнитные волны распространяются с конечной скоростью. Это придает процессам, происходящим в электрических цепях, волновой характер, т.е. токи и напряжения в электрической цепи оказываются зависящими не только от времени  $t$ , но и от координаты сечения цепи  $x$ , т.е.  $U(x,t)$ ;  $i(x,t)$ .
- Если  $\lambda > L$ , то цепь с сосредоточенными параметрами.
- Если  $\lambda < L$ , то цепь с распределенными параметрами. В ней невозможно выделить участок, обладающий одним свойством. Каждый участок цепи обладает одновременно свойствами  $R$ ,  $L$ ,  $C$ -элементов, т.е. параметры элементов как бы распределены по всему участку цепи.
- Примеры цепей с распределенными параметрами :
  - воздушно-двухпроводная линия 13.1а;
  - витая пара рис. 13.1б;
  - электрический кабель;
  - коаксиальный кабель 13.1в;
  - полосковая линия, прямоугольный или круглый волновод и т.д.
- Цепи с распределенными параметрами часто называют длинными линиями.

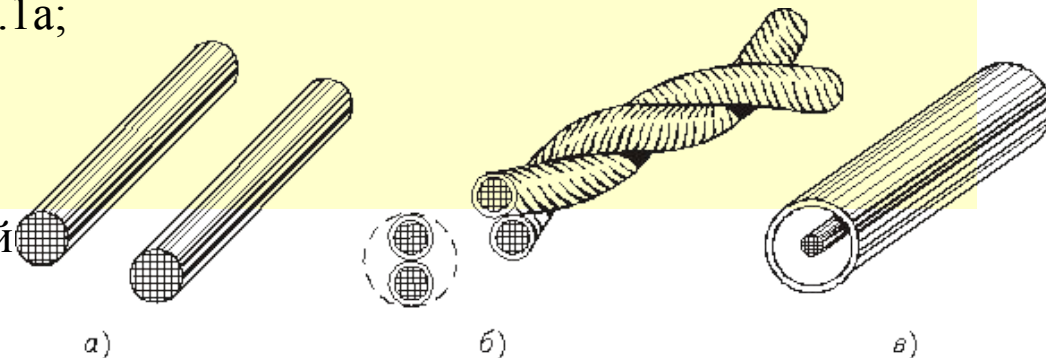


Рис. 13.1

# 9.1. Понятие о длинной линии и распространение волн в ней

- Рассмотрим воздушную двухпроводную линию, длина которой соизмерима или больше длины электромагнитной волны (рис. 9.1, а). При протекании тока по проводам вокруг них возникает магнитное поле  $H$ , что свидетельствует о наличии индуктивности, распределенной вдоль линии. Между проводами возникает электрическое поле, что говорит о емкости. Провода и диэлектрик между проводами нагреваются, что свидетельствует о наличии потерь, т.е. говорит о сопротивлении.

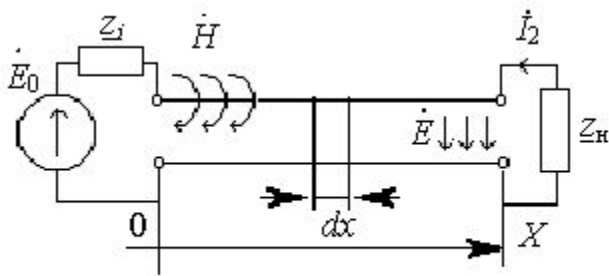
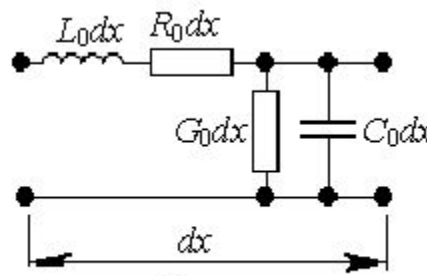


Рис. 9.1



б

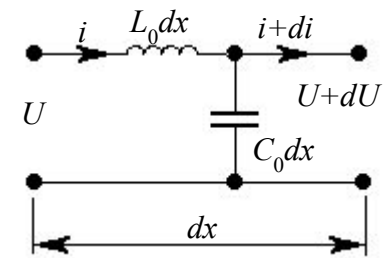


Рис. 9.2

Количественно физические параметры длинной линии характеризуются следующими **погонными (первичными)** параметрами, приходящимися на единицу длины, на метр:

$L_0$  – погонная индуктивность. Определяется как индуктивность короткозамкнутого отрезка линии длиной 1 м. Единица измерения Гн/м.

$R_0$  – погонное сопротивление. Определяется как сопротивление короткозамкнутого отрезка проводов длиной 1 м. Единица измерения Ом/м.

$C_0$  – погонная емкость. Определяется как емкость между проводами разомкнутого на конце отрезка линии длиной 1 м. Единица измерения Ф/м.

$G_0$  – поперечная проводимость. Определяется как проводимость между проводами, разомкнутыми на конце отрезка линии длиной 1 м. Единица измерения См/м.

# Волновые уравнения

• Составим уравнения, позволяющие определить напряжение и ток в любом сечении длинной линии, для длинной линии без потерь (рис. 9.2). Запишем выражения относительно приращений напряжения и тока:

$$\left. \begin{aligned} dU &= -(L_0 dx) \frac{di}{dt} \\ di &= -(C_0 dx) \frac{dU}{dt} \end{aligned} \right\} \frac{d}{dx} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= -L_0 \frac{di}{dt} \\ \frac{di}{dx} &= -C_0 \frac{dU}{dt} \end{aligned} \right\} \frac{d}{dt} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= -L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} &= -C_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= L_0 C_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{aligned} \right\}.$$

В общем случае решение волновых уравнений можно представить выражениями:  
 где,  $f_1$  и  $f_2$  дважды дифференцируемые функции зависят от начальных и граничных условий, т.е. от сигналов, которые подводятся к длинной линии, но главное, эти функции должны быть дважды дифференцируемыми.

Первое слагаемое называется прямой волной - характеризует сигнал, который распространяется в направлении  $x$ , а второе - обратной волной - сигнал, который распространяется вдоль линии в противоположном направлении (рис. 9.3)

$$U(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right);$$

$$i(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) - f_2\left(t + \frac{x}{v}\right),$$

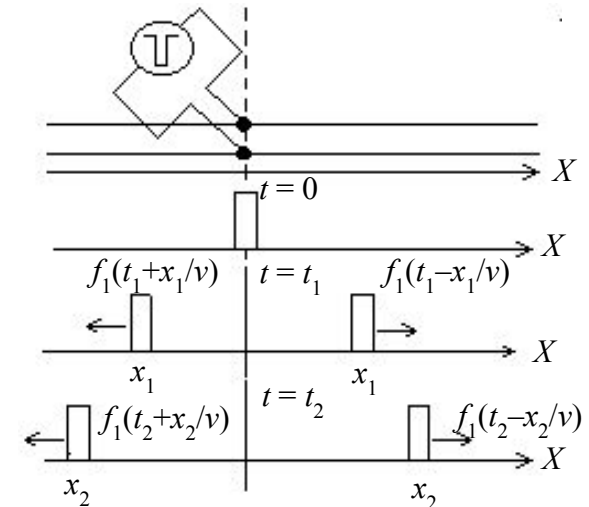


Рис. 9.3

## 9.2. Полубесконечная длинная линия

- Решение волновых уравнений значительно упрощается, если рассматривать полубесконечную длинную линию при гармоническом воздействии  $e(t) = Em \cos \omega t$ . В такой линии нет условий для распространения обратной волны, а потому существует лишь прямая, ее называют падающей волной.

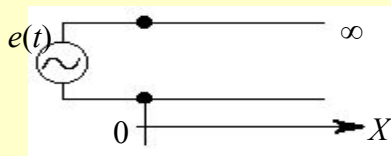


Рис. 9.4

$$U(x, t) = E \cos \omega \left( t - \frac{x}{v_0} \right) = U_0 \cos(\omega t - \beta x);$$

$$i(x, t) = \frac{E}{\rho} \cos \omega \left( t - \frac{x}{v_0} \right) = I_0 \cos(\omega t - \beta x),$$

- Установившиеся процессы в такой линии в произвольном сечении являются гармоническими, но появляется фазовый сдвиг, который связан с конечной скоростью распространения волны. Напряжение и ток в любом сечении определяются из соотношений:

где  $v_0 = \lambda/T = (L_0 C_0)^{-1/2}$  – скорость распространения сигнала в длинной линии;

- $\beta = \omega/v_0$  – коэффициент фазы, он характеризует фазовый сдвиг волны на единицу длины линии, иногда его называют *пространственной частотой* сигнала, так как  $\beta = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны (это название дано по аналогии с тем, что  $\omega = 2\pi/T$  – временная частота).
- Отношение комплексной амплитуды напряжения к комплексной амплитуде тока прямой волны называют волновым сопротивлением линии  $Z_{\text{в}} = U_m / I_m$ . В линии без потерь оно имеет чисто резистивный характер  $-\rho$ , его называют характеристическим сопротивлением.

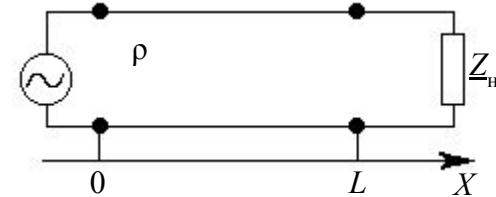
$(v_0, \beta, Z_{\text{в}})$  – называются волновыми, или вторичными, параметрами длинной линии.

Т.О., в длинной линии без потерь сигнал в любом сечении не изменяет своей формы и амплитуды, но наблюдается запаздывание вследствие конечной скорости

В линии с потерями наблюдается не только запаздывание во времени, но и затухание сигнала по амплитуде с возрастанием  $x$

## 9.3. Линия конечной длины. Отражения

- На практике часто используются линии конечной длины. Пусть однородная линия длиной  $L$  нагружена на конце ( $x = L$ ) на сопротивление  $Z_n$ . При  $x = 0$  линия питается от генератора гармонической ЭДС с внутренним сопротивлением  $R_i$ . Волновое сопротивление линии  $Z_v = \rho$ .



- При гармоническом колебании мгновенное значение напряжения в любой точке определяется суммой падающей и отраженной волн напряжения, а мгновенные значения тока – разностью падающей и отраженной волн тока. Знаки в суммах связаны с тем, что положительные направления напряжений  $U_{пад}$ ,  $U_{отр}$  выбраны одинаково (сверху вниз), а у токов  $I_{пад}$ ,  $I_{отр}$  – встречно, поэтому они вычитаются.

$$U(x,t) = U_{пад} + U_{отр};$$

$$I(x,t) = I_{пад} - I_{отр},$$

где  $U(x,t)$ ,  $U_{пад}$ ,  $U_{отр}$ ,  $I(x,t)$ ,  $I_{пад}$ ,  $I_{отр}$  – комплексные амплитуды.

- Процессы, происходящие в длинной линии, определяются не только волновыми параметрами, которые характеризуют собственные свойства линии, но и коэффициентами отражения, которые зависят от согласования линии с нагрузкой.
- В установившемся режиме в линии присутствуют две волны. Эти волны распространяются в двух взаимно противоположных направлениях. Волна, движущаяся от генератора к нагрузке, называется прямой, или падающей. Волна, движущаяся от нагрузки к генератору, называется обратной, или отраженной. Появление обратной волны связано с отражением падающей волны от нагрузки. Таким образом, в длинной линии в каждый момент времени в каждой точке сечения присутствует алгебраическая сумма двух волн – падающей и отраженной.

- Комплексным коэффициентом отражения* длинной линии называют отношение комплексных амплитуд напряжений и токов отраженной и падающей

волн в произвольном сечении линии:

- комплексный коэффициент отражения напряжения;

$$P_U = \frac{U_{отр}}{U_{пад}} = \frac{Z_n - \rho}{Z_n + \rho}$$

- комплексный коэффициент отражения тока.

$$P_I = \frac{I_{отр}}{I_{пад}} = -\frac{Z_n - \rho}{Z_n + \rho}$$

## 9.4. Режимы работы длинной линии

- В зависимости от соотношения волнового сопротивления  $\rho$  и сопротивления нагрузки  $Z_n$  в длинной линии возможны три режима работы:
- **1. Режим бегущих волн** в линии имеет место, когда в ней распространяется только падающая волна напряжения и тока, а отраженная волна во всех сечениях равна нулю. В этом режиме вся энергия от источника питания передается в нагрузку, отражение отсутствует, следовательно,  $U_{отр} = 0$  и  $P_u = 0$ .
- **2. Режим стоячих волн** имеет место, когда происходит полное отражение волны от нагрузки, т.е. в линии одновременно присутствуют две волны, амплитуды которых одинаковы:  $U_{отр} = U_{пад}$ , следовательно  $|P_u| = 1$ . В этом режиме энергия в нагрузке не выделяется.
- **3. Режим смешанных волн.** В этом режиме энергия частично выделяется в нагрузке, а частично отражается, т.е. в линии одновременно присутствуют две волны, амплитуды которых не одинаковы.

# Условия режима бегущих волн.



Рис. 9.6

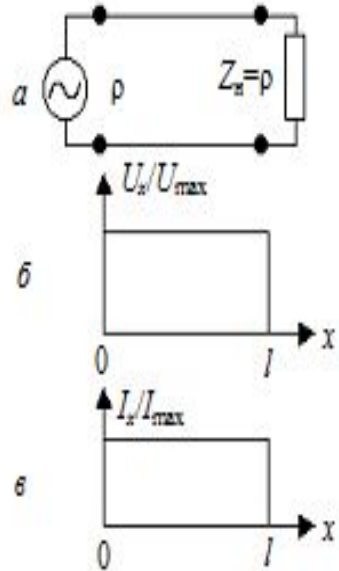


Рис. 9.7

- Режим бегущих волн возможен при следующих видах нагрузки:
- а) полубесконечная длинная линия (рис. 9.6). В ней нет конца, а потому и нет отраженной волны. Рис. 9.6
- б) линия нагружена на сопротивление, равное волновому  $Z_n = \rho$  (рис. 9.7, а).
- Коэффициент отражения равен нулю

$$P_u = \frac{\rho - \rho}{\rho + \rho} = 0.$$

- В линии без потерь в режиме бегущих волн распределение амплитуд напряжения и тока по длине линии постоянно (рис. 9.7, б, в), а в линии с потерями амплитуды напряжения и тока убывают по экспоненте.
- Входное сопротивление линии в режиме бегущих волн равно волновому сопротивлению линии и не зависит от ее длины.
- В режиме бегущих волн передача энергии происходит только в одном направлении – от источника сигнала в нагрузку, такая нагрузка называется согласованной.

# Режим стоячих волн.

- В этом режиме вся падающая волна отражается от нагрузки. Мощность, выделяемая на нагрузке, равна нулю. Режиме стоячих волн  $P_u = 1$  возникает в следующих трех случаях (рис. 9.8):
- 1) линия, разомкнутая на конце  $Z_n = \infty$ .
- 2)  $Z_n = 0$
- 3)  $Z_n = jX$

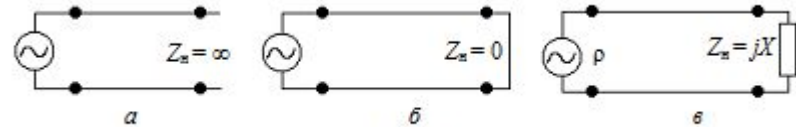


Рис. 9.8

- Рис. 9.90 //  $Z_n = \infty$   $U_x/U_{max}$  /  $I_x/I_{max}$   $x$   $а б в$  –  $3\lambda/4$  –  $\lambda/4$  –  $\lambda$  –  $\lambda/2$  узел / пучность
- Коэффициент отражения по напряжению  $P_u = 1$ . Это означает, что на конце линии волна по напряжению полностью отражается, т.е. амплитуда падающей волны равна амплитуде отраженной волны, причем знак отраженной волны совпадает с падающей, что приводит к удвоению напряжения на конце линии.
- Коэффициент отражения по току  $P_i = -1$ . Это означает, что на конце линии ток равен нулю.
- Распределение амплитуд напряжения и тока вдоль линии в режиме холостого хода приведены на рис. 9.9, б.
- Точки максимума напряжения или тока называются *пучностями* напряжения или тока, а точки, в которых амплитуда напряжения или тока равны нулю, называются *узлами*.
- В режиме холостого хода на конце линии имеет место пучность напряжения и узел тока.
- б) линия короткозамкнутая на конце:  $Z_n = 0$ . Коэффициенты отражения  $P_u = 1$ . Рис. 9.100 //  $Z_n = 0$   $U_x/U_{max}$  /  $I_x/I_{max}$   $x$   $а б в$  –  $3\lambda/4$  –  $\lambda/4$  –  $\lambda$  –  $\lambda/2$  Узел / Пучность
- Графики распределения амплитуд напряжения и тока показаны на рис. 9.10, б, в. На конце линии имеет место пучность тока и узел напряжения.
- в) линия нагружена на реактивное сопротивление  $Z_n = jX$ .
- Коэффициенты отражения  $P_u$  и  $P_i$  – комплексные величины, а их модули равны  $|P_u| = |P_i| = 1$ . Это означает, что амплитуды прямой и отраженной волн в линии одинаковы, но на конце нет ни пучности, ни узла.



# Нелинейные цепи

Цепь, сопротивление которой не зависит от протекающего по ней тока, называется линейной, а цепь, сопротивление которой зависит от проходящего тока, называется нелинейной.

Расчет токов и напряжений в нелинейных цепях производится с помощью вольт-амперных характеристик нелинейных сопротивлений, содержащихся в исследуемых цепях. Вольт-амперная характеристика, представляющая собой зависимость между током и приложенным к нелинейному сопротивлению напряжением, изображается графиком, построенным на основании экспериментальных данных (рис. 2.10, а).

При последовательном соединении двух нелинейных сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  с вольт-амперными характеристиками 1 и 2 (рис. 2.10, б) ток в цепи  $I$  является общим для обоих сопротивлений, а приложенное напряжение  $U_1$  и втором  $U_2$  нелинейном сопротивлении, т. е.  $U = U_1 + U_2$ . Задаваясь раз-

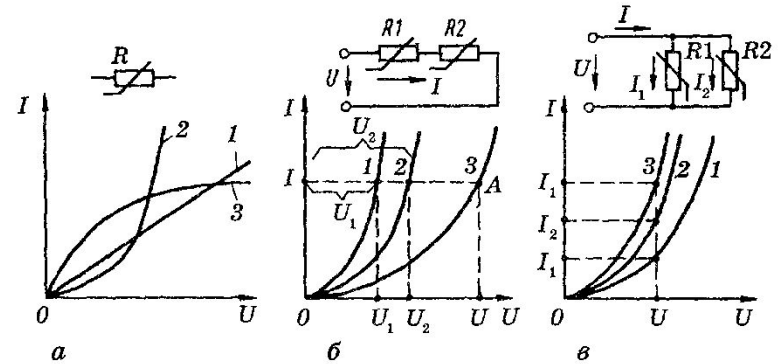


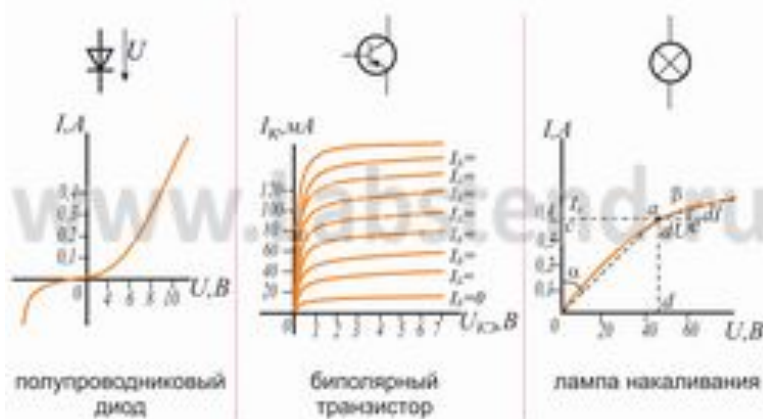
Рис. 2.10. Вольт-амперные характеристики и условные обозначения нелинейных сопротивлений: а — для различных типов сопротивлений; б — для двух последовательно включенных сопротивлений; в — для двух параллельно включенных сопротивлений

При параллельном соединении нелинейных сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  с вольт-амперными характеристиками 1 и 2 (рис. 2.10, в) ток в неразветвленной части цепи в любой момент равен сумме токов в этих сопротивлениях ( $I = I_1 + I_2$ ), а напряжение на зажимах цепи  $U$  является общим для обоих сопротивлений. Откладывая на горизонтальной оси значе-

## Электрические цепи постоянного тока

Вольт-амперные характеристики нелинейных электрических цепей постоянного тока

Нелинейная электрическая цепь содержит сопротивление с нелинейной зависимостью тока, протекающего через него, от приложенного к этому сопротивлению напряжения (с нелинейной В.А.Х.)



$$R_{ст} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{m_x \cdot OC}{m_x \cdot OC} = m_x \cdot tg\alpha \quad \text{Статическое сопротивление в точке } a$$

$$R_{дин} = \frac{dU}{dI} \approx \frac{m_x \cdot \overline{ac}}{m_x \cdot bc} = m_x \cdot tg\beta \quad \text{Динамическое сопротивление в точке } a$$



# Дисциплина: Электротехника и электроника

---

Лектор: Погодин Дмитрий Вадимович  
Кандидат технических наук,  
доцент кафедры РИИТ  
(кафедра Радиоэлектроники и  
информационно-измерительной  
техники)