Объять необъятное…

Учитель информатики
МОАУ СОШ № 17
МО Кореновский район
Краснодарского края
Лобурь Ирина Анатольевна

Дорогой одиннадцатиклассник!
Я хочу познакомить тебя вот с чем...

Тебе, наверное, приходилось сталкиваться с такими фразами, как объять необъятное. А вычислить невычислимое? Вот это я и предлагаю тебе сейчас сделать. Будь внимательным, а для перемещения по страницам моего проекта используй клавиши PgDown (далее) и PgUp (назад). Если встретишь подчеркнутый текст жёлтого цвета, щелкни на нём левой кнопкой мыши.

Введение

Тебе уже, наверное, знакомо понятие определенного интеграла? Тогда ты должен знать, что

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

Где F(x) – Первообразная функции f(x), для которой справедливо следующее равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

Поэтому, чтобы вычислить $\int_a^b f(x)dx$ достаточно найти

первообразную F(x) и… задача решена!

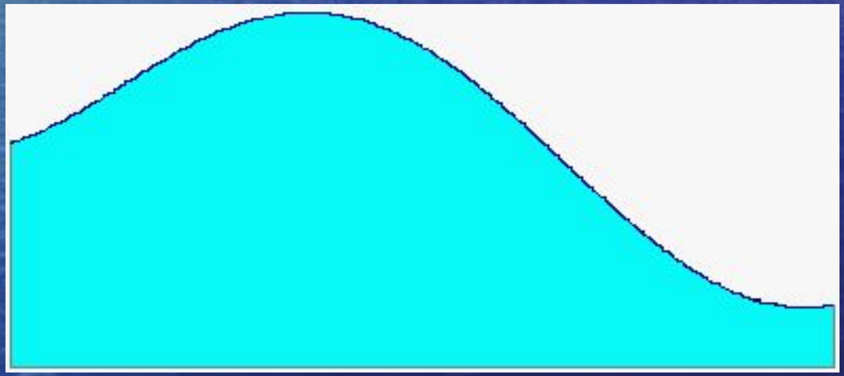
А, только, вот вопрос:

А, если такой функции не существует?! В математике много примеров так называемых «неберущихся» интегралов, например:

$$\int \sin x \cdot \ln x\,dx \quad \text{или} \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

А если функция, как результат статистической обработки данных, задана таблично?

А вдруг ты - экономист какого-либо скупого миллиардера, и он велел тебе произвести следующий расчет: «Я желаю бассейн, имеющий форму

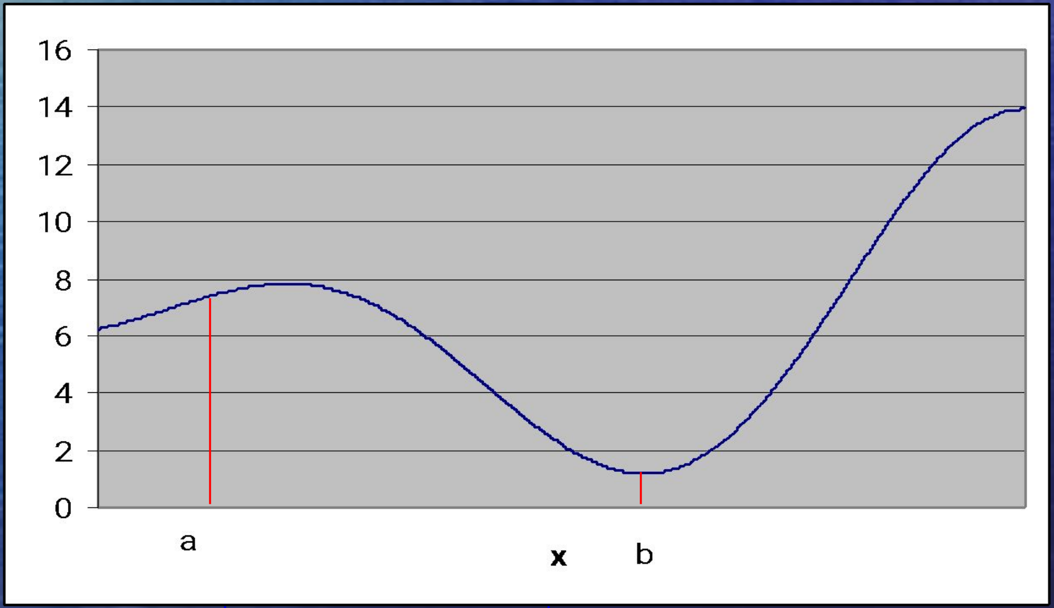


выложить дражайшими самоцветами. Но помни, расчет должен быть как можно более точным, т. к. от твоей экономности во многом будет зависеть твоё жалование.» И ты, великий математик, начинаешь решать эту задачу. Ты прекрасно знаешь, чтобы вычислить площадь криволинейной фигуры нужно вычислить интеграл.

Ты берешься за карандаш и исписываешь кипу листов, не находя решения! Интеграл не берется! Как же быть? И вот тут тебе на помощь придет твой верный помощник - компьютер!

Урок 1

I. Ты совершенно прав, вспомнив, что геометрический смысл определенного интеграла на промежутке [a, b] есть площадь фигуры ограниченной осью Ох, прямыми x=a, x=b и графиком функции f(x).



Так давай её и вычислим, сведя к минимуму погрешность и вычеты из твоего жалованья!

I. Откроем наш любимый ”Excel “и на примере функции $y=x^2$ заполним следующим образом:

	A	B	C	D	E
1	x	y	S_i	S_j	Результат
2	1	1	0,001		2,331833
3	1,001	1,002001	0,001002	0,001002	2,334833
4	1,002	1,004004	0,001004	0,001004	2,333333
5	1,003	1,006009	0,001006	0,001006	
6	1,004	1,008016	0,001008	0,001008	
7	1,005	1,010025	0,00101	0,00101	
995	1,993	3,972049	0,003972	0,003972	
996	1,994	3,976036	0,003976	0,003976	
997	1,995	3,980025	0,00398	0,00398	
998	1,996	3,984016	0,003984	0,003984	
999	1,997	3,988009	0,003988	0,003988	
1000	1,998	3,992004	0,003992	0,003992	
1001	1,999	3,996001	0,003996	0,003996	
1002	2	4		0,004	
1003					

Вычислим интеграл $\int_1^2 x^2 dx$ поместим в ячейку A2 значение a - начало промежутка интегрирования, и заполним столбик A с шагом h=0.001 до значения b. В ячейку B2 введём формулу, задающую функцию *f(x)*:

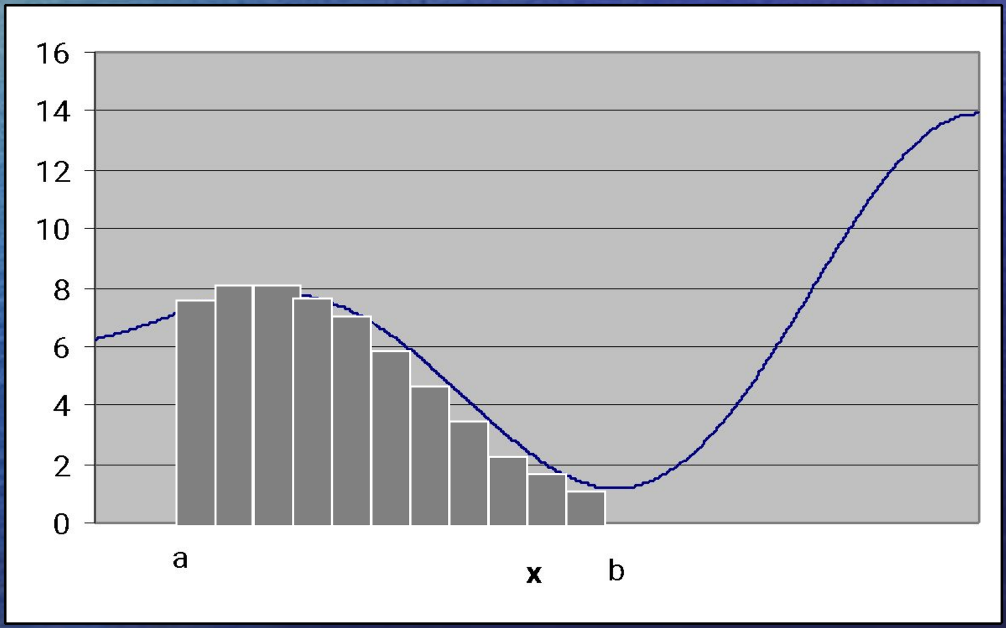
= A2^2

и скопируем её до ячейки B1002.

А далее воспользуемся одним из трёх способов.

1. Метод прямоугольников

Этот метод тебе хорошо известен. Разобьём нашу фигуру на прямоугольники:

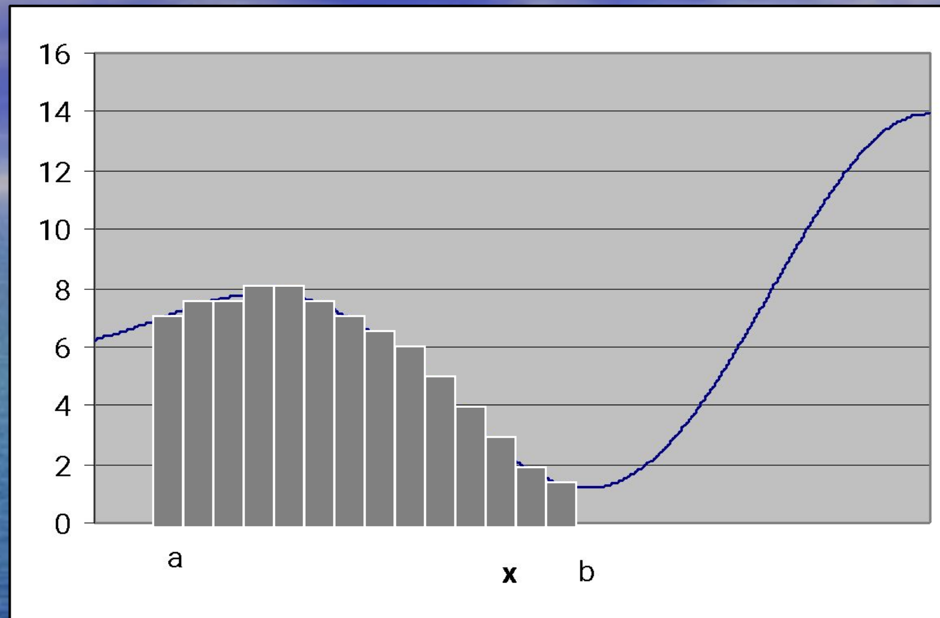


$$S_i = f(x_i) \cdot h$$

И вычислим площадь каждого получившегося прямоугольника:

.

Для этого в ячейку C2 запишем B2*0.001 и скопируем её до значения b-h (ячейка B1001)! Теперь сделаем то же самое, но только в качестве $f(x_i)$ будем брать левые стороны прямоугольников.



Но, внимание! Заполнение начнём с ячейки D3! В неё поместим =a3^2*0.001 и скопируем эту формулу до значения b включительно (ячейка D1002)!

Сумму получившихся в столбце D результатов поместим в ячейку E3.

Учитывая, что при совмещении этих двух рисунков, наш график функции окажется между получившимися ступенчатыми фигурами, заключаем: значение площади нашей фигуры также заключено между площадями ступенчатых фигур. Поэтому в E4 поместим =(E2+E3)/2.

Нажмём Enter и приблизительное значение нашего интеграла готово!

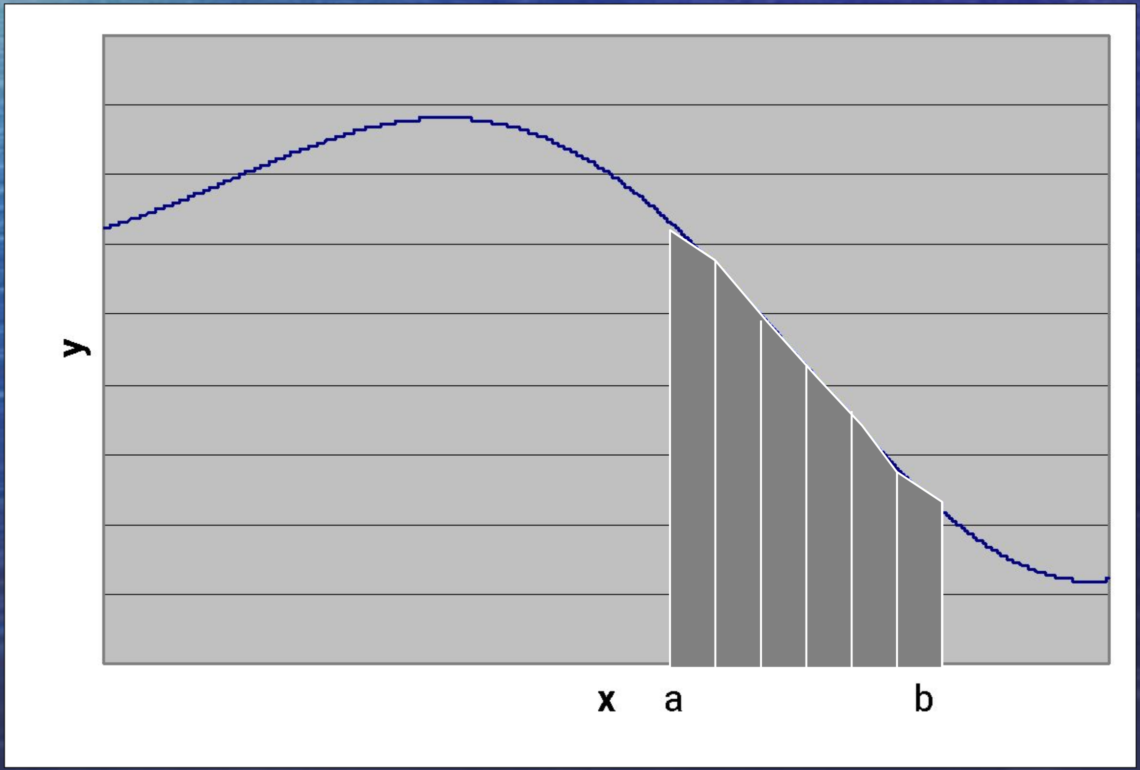
Хотите большей точности – уменьшите шаг!

1. Метод трапеций.

Попробуем теперь нашу фигуру разбить не на прямоугольники, а на трапеции!

Ведь если кривизна линии графика большая, то разница между площадями криволинейной трапеции и полученной ступенчатой фигуры будет очень большая!

И так…



Согласись, это гораздо ближе к делу! Итак, как и в предыдущем случае открываем Excel и заполняем линейки столбцов А и В. Найдем теперь площадь одной маленькой трапеции:

$$S_i = (f(x_i) + f(x_i + h)) \cdot h/2$$

В ячейку С2 запишем для нашей функции $y=x^2$:

= (a2^2 + (a^2 + 0,001)^2)*0,001/2

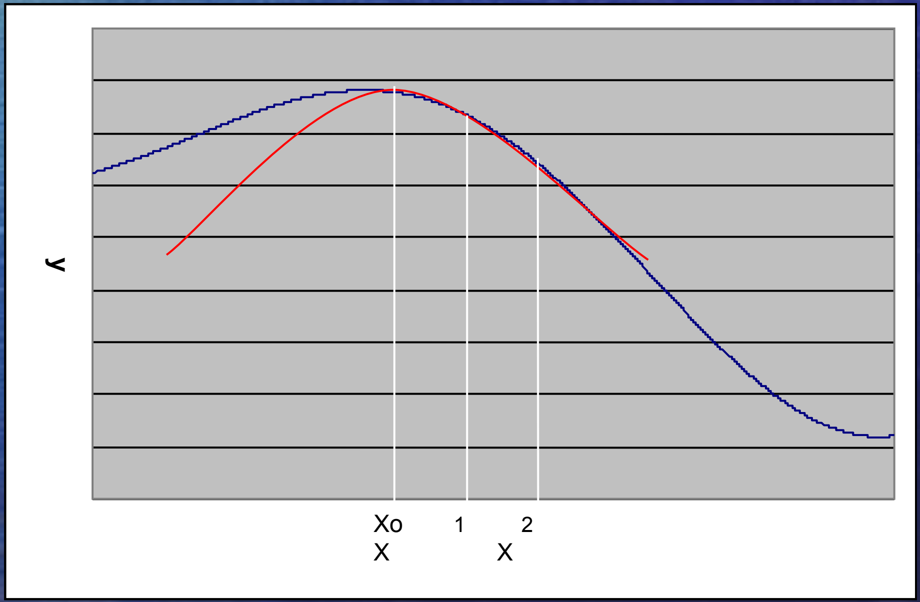
и скопируем эту формулу до значения b-h (ячейка В1001), и в ячейку D2 поместим сумму получившихся значений.

	A	B	C	D
1	x	y	S	Результат
2	1	1	0,001001	2,333333
3	1,001	1,002001	0,001003	
4	1,002	1,004004	0,001005	
5	1,003	1,006009	0,001007	
6	1,004	1,008016	0,001009	
7	1,005	1,010025	0,001011	
996	1,994	3,976036	0,003978	
997	1,995	3,980025	0,003982	
998	1,996	3,984016	0,003986	
999	1,997	3,988009	0,00399	
1000	1,998	3,992004	0,003994	
1001	1,999	3,996001	0,003998	
1002	2	4		

Это и есть наш результат!

1. Метод парабол (метод Симпсона)

Этот метод является одним из более совершенных и точных, так как в этом случае идет приближение подынтегральной кривой к другой кривой – параболе:



Для вычисления интеграла по формуле Симпсона заменим нашу функцию по формуле квадратичного интерполирования

$$f(x) \approx y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0,$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Тогда $$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} \left(y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0\right)dx.$$

Перейдём к новой переменной интегрирования, учитывая, что *$x=x_0+ ht$, $dx=hdt$, $t=0$ при $x=x_0$ и $t=2$ при $x=x_2$*

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\int_0^2 \left(y_0 + ty_0 + \frac{t^2 - t}{2}\Delta^2 y_0\right)dt = h\left(y_0 t + \frac{t^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4}\right)\Delta^2 y_0\right)\Bigg|_0^2 = h\left(2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 y_0\right) = h\left(2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2)\right)$$

Или
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Эта формула называется формулой Симпсона или формулой парабол.

При таком приближении криволинейная трапеция на участке $[x_i; x_{i+2}]$ заменяется параболой и производится интегрирование полученной параболы.

В разделе вычислительной математики используют формулу Симпсона для каждого отрезка интегрирования (заметим, их должно быть чётное число!) получим:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

. . . . .

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Суммируя эти равенства получим:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}))$$

Теперь разберёмся с Excelем:

Уже известным способом заполняем столбец A с шагом 0,002 от значения a (для нашего промежутка – 1) до значения b (у нас – 2). Столбец B – с тем же шагом, но от значения a+h до значения b-h (для нашего интеграла от 1,001 до 1,999). Столбцы C и D заполняем формулой =a2^2 и =b2^2 соответственно. Согласно формуле Симпсона в ячейку E1 помещаем

=c2+c502, в ячейку E2 =4*СУММ(d2:d501), а в ячейку E3 запишем

=2*СУММ(c3: c501). В ячейку E4 помещаем =0,001/3*(e1+e2+e3). Взгляните на полученный результат!

	A	B	C	D	E
1	X_{2n}	X_{2n+1}	y2n	y2n+1	Результат
2	1	1,001	1	1,002001	5
3	1,002	1,003	1,004004	1,006009	1166,667
4	1,004	1,005	1,008016	1,010025	1164,167
5	1,006	1,007	1,012036	1,014049	2,333333
6	1,008	1,009	1,016064	1,018081	
7	1,01	1,011	1,0201	1,022121	
8	1,012	1,013	1,024144	1,026169	
9	1,014	1,015	1,028196	1,030225	
496	1,988	1,989	3,952144	3,956121	
497	1,99	1,991	3,9601	3,964081	
498	1,992	1,993	3,968064	3,972049	
499	1,994	1,995	3,976036	3,980025	
500	1,996	1,997	3,984016	3,988009	
501	1,998	1,999	3,992004	3,996001	
502	2		4		

Подведём итог. При вычислении интеграла $\int_1^2 x^2 dx$ четырьмя способами

у меня получились следующие результаты:

- По формуле Ньютона-Лейбница - $2\frac{1}{3}$;
- По формуле прямоугольников – 2,333333;
- По формуле трапеций – 2,333333;
- По формуле Симпсона – 2,333333.

Хочу заметить, что этот метод можно использовать также для оценки площадей фигур, ограниченных вертикальными асимптотами.

Например, для функции $y = \frac{1}{x}$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^1 = \ln 1 - \ln 0 \quad !!!$$

Упражнение

Теперь я предлагаю вам потренироваться вычислять невычислимое. Выберите любой интеграл, который вы можете вычислить по формуле Ньютона-Лейбница, и попробуйте вычислить его одним из предложенных мною способов.

- Метод прямоугольников
- Метод трапеций
- Метод Симпсона

Желаю успеха!