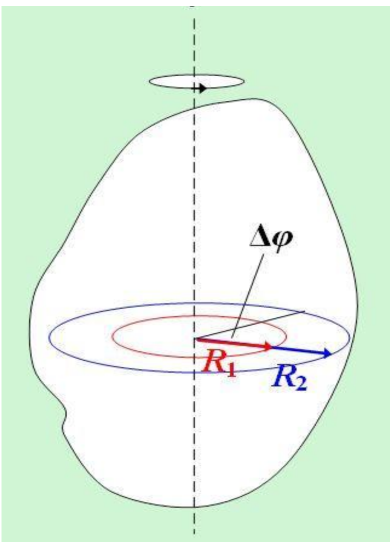
Динамика вращательного движения тв. тела

Задача динамики – нахождение угловых ускорений, сообщаемых известными силами.



Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси вращения называют такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на прямой , называемой **осью вращения**.

При вращательном движении точек тел, находящихся на разном расстоянии от оси вращения, они за одно и то же время совершают разные перемещения и в один и тот же момент времени имеют разные скорости и ускорения.

Для описания вращательного движения вводятся следующие динамические параметры:

момент инерции I

момент импульса $\vec{L}$

момент силы $\vec{M}$

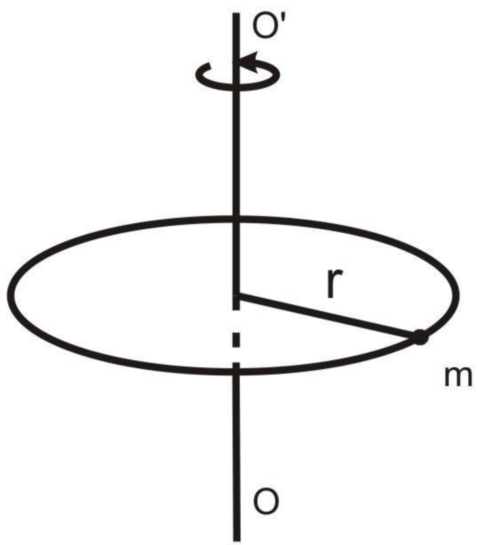
company name

Динамика вращательного движения тв. тела

Момент инерции тела

Скалярная величина, характеризующая распределение масс в теле и являющаяся мерой инертности тела при непоступательном движении.

Момент инерции материальной точки относительно оси:



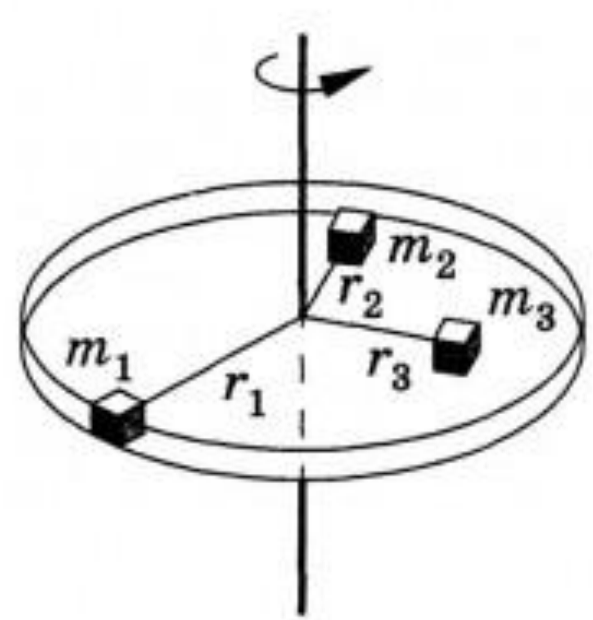
$$I = mr^2$$

$$[I] = [кг \cdot м^2]$$

Динамика вращательного движения тв. тела

Момент инерции системы материальных точек относительно неподвижной оси

Момент инерции – величина аддитивная. Момент инерции с.м.т. равен сумме произведений масс материальных точек на квадраты их расстояний до оси вращения:



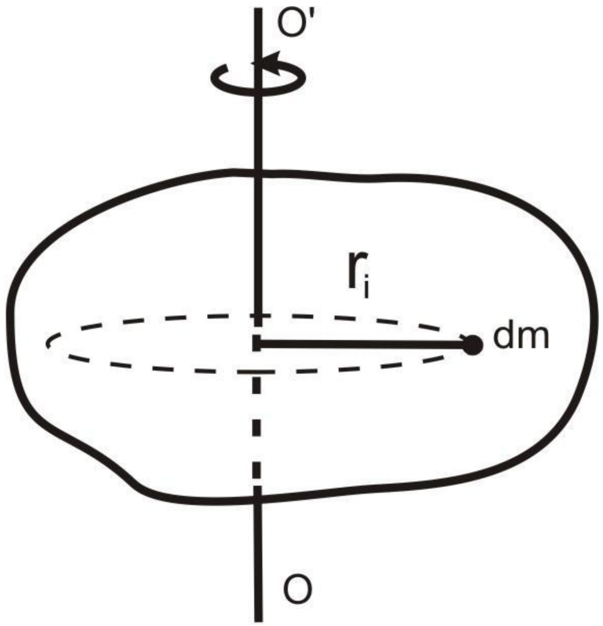
$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Тело может двигаться, может покоиться. К примеру, момент инерции колеса можно посчитать даже если оно не вращается:

$$I = mr^2$$

Динамика вращательного движения тв. тела

Момент инерции тела относительно неподвижной оси



Момент инерции тела находится интегрированием. Представляем тело как систему материальных точек с массами dm

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV$$

$$dm = \rho dV$$

Если $\rho = const$ **, то** $I = \rho \int_V r^2 dV$

ρ **- плотность тела**

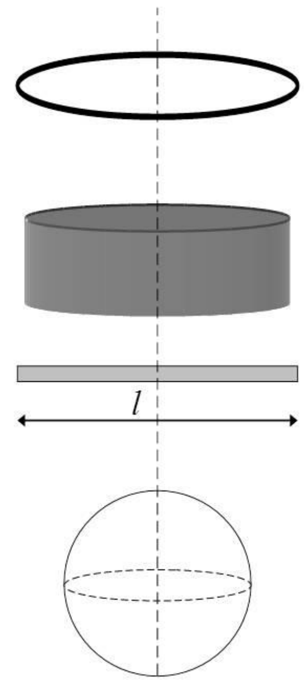
Динамика вращательного движения тв. тела

Момент инерции тела относительно оси вращения

Момент инерции тела зависит от:

1) массы тела;
2) его формы и размеров;
3) распределения плотности по объему;
4) расположения оси вращения.

Моменты инерции различных тел



Кольцо $J = mR^2.$

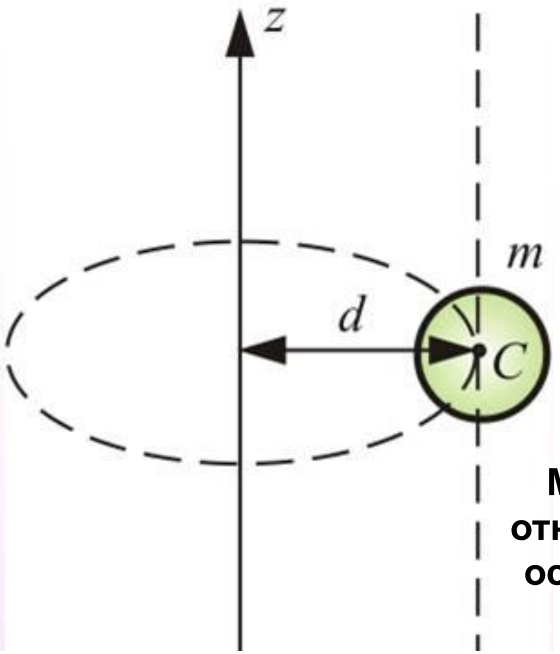
Диск, цилиндр $J = \dfrac{mR^2}{2}.$

Стержень $J = \dfrac{ml^2}{12}.$

Шар $J = \dfrac{2}{5}mR^2.$

Теорема Штейнера

(теорема о параллельном переносе осей)



$$I = I_c + md^2$$

Яков Штейнер
1796 – 1863

Момент инерции относительно новой оси, параллельной исходной

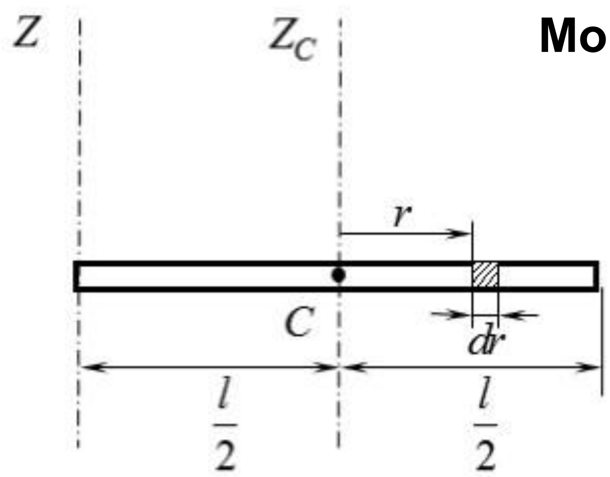
Момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс

Расстояние между параллельными осями

Момент инерции I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

Момент инерции тела

Момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через его центр инерции и через его край



Момент инерции относительно оси z_c, проходящей перпендикулярно стержню через его центр:

1) выделим элемент длины стержня длиной dr на расстоянии r оси вращения,

2) возьмем небольшой отрезок длины этого стержня

$\tau = \dfrac{dm}{dl}$ **- линейная плотность стержня**

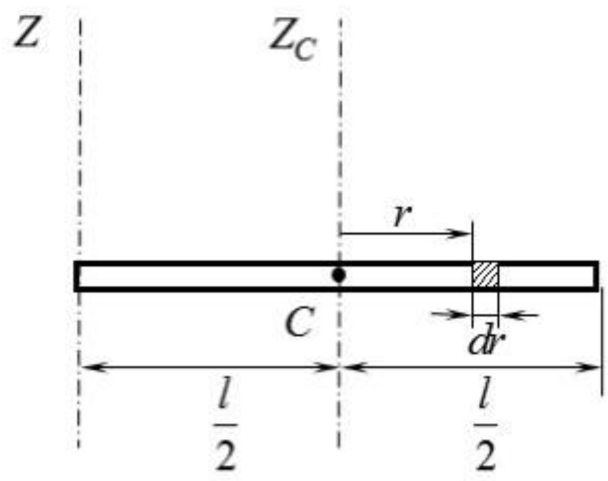
Решаем задачу интегрированием:

$$I = \tau\int_V l^2 dl = \tau\int_{-l/2}^{l/2} l^2 dl = \tau\frac{l^3}{3}\Bigg|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\tau}{3}\left[\frac{l^3}{8} - \left(-\frac{l^3}{8}\right)\right] = \frac{\tau l^3}{12} = \frac{ml^2}{12}; \quad \tau\cdot l = m$$

company name

Момент инерции тела

Момент инерции однородного стержня относительно оси z , проходящей через конец стержня



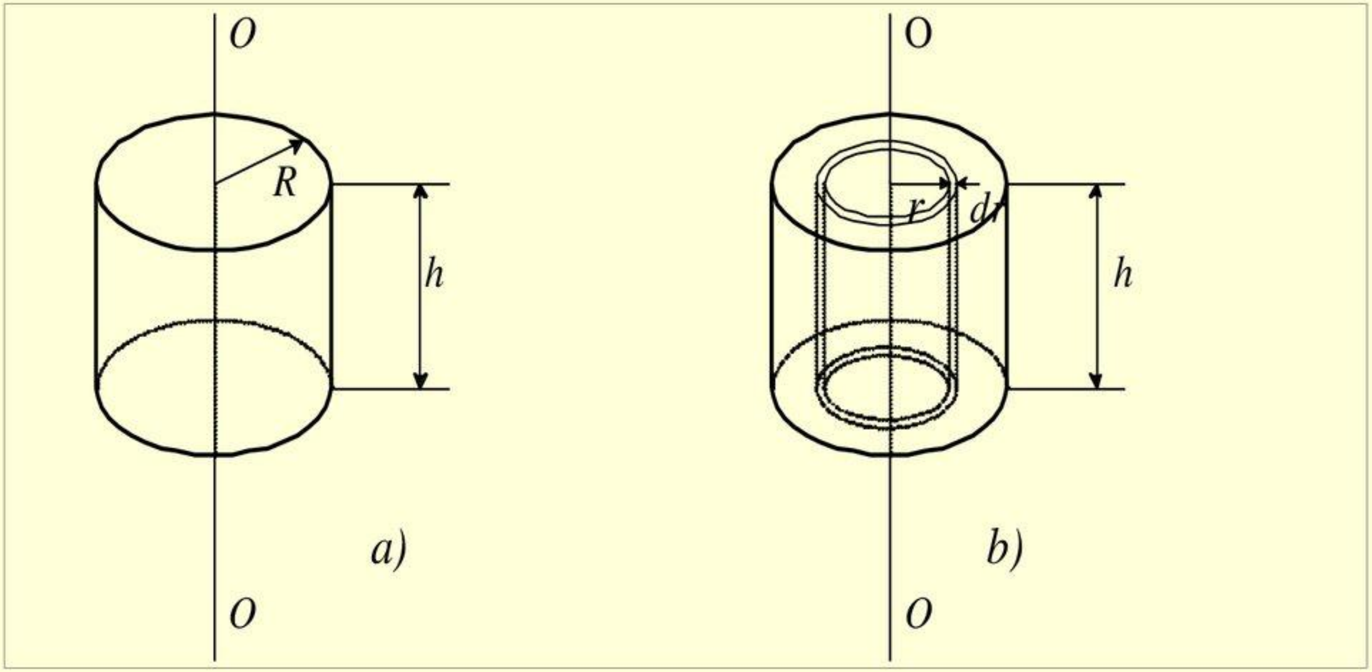
Воспользуемся теоремой Штейнера:

$$I_z = I_c + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

$$\boxed{I_z = \frac{ml^2}{3}}$$

Момент инерции тела

Момент инерции цилиндра (диска)



$$J=\int_0^R \rho r^2 2\pi r h dr = 2\pi\rho h\int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h\frac{R^4}{4} \qquad J=\frac{mR^2}{2}$$

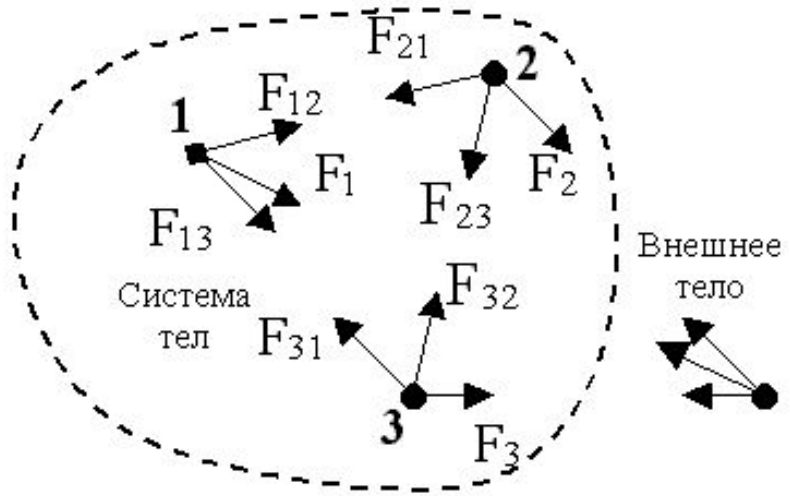
Динамика вращательного движения тв. тела

Уравнение моментов

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n тел, масса и скорость которых равны $m_1, m_2, \ldots m_n$; $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots \vec{V}_n$

$\vec{F}_{12}, \vec{F}_{13}, \ldots \vec{F}_{ik}$ - внутренние силы, действующие на 1-ое тело со стороны 2-го, 3-го и т.д.

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_i$ - внешние силы, действующие на 1-ое, 2-ое тело и т.д.



r_i - радиус-вектор i-ой точки

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \vec{V}_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i$$

- уравнение динамики движения i-ой точки

Динамика вращательного движения тв. тела

$$\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{V}_i\right)=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_{ik}+\vec{F}_i \qquad \times\ \vec{r}_i$$

умножаем векторно на радиус-вектор

$$\left[\vec{r}_i\times\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{V}_i\right)\right]=\left[\vec{r}_i\times\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_{ik}\right]+\left[\vec{r}_i\times\vec{F}_i\right]$$

$$\boxed{\left[\vec{r}_i\times\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{V}_i\right)\right]\ \text{- ?}}$$

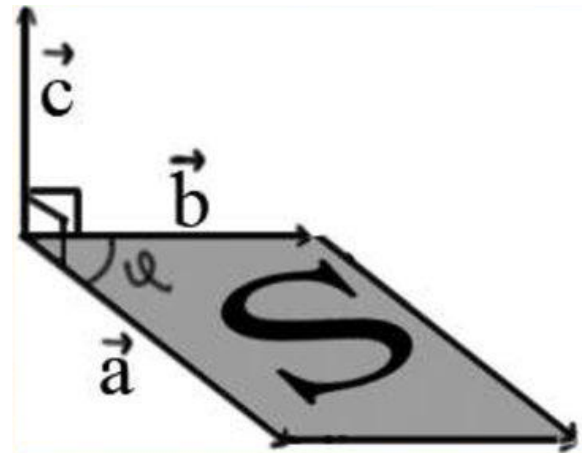
Выполним преобразования:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i\times\left(m_i\vec{V}_i\right)\right]=\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}\times\left(m_i\vec{V}_i\right)\right]+\left[\vec{r}_i\times\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{V}_i\right)\right]$$

Динамика вращательного движения тв. тела

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\vec{c}$$

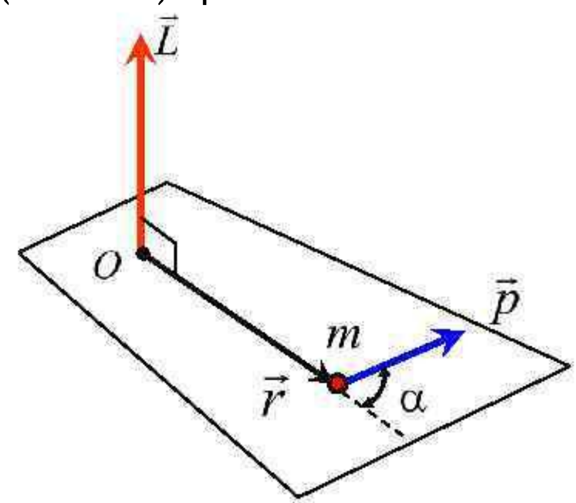
$$\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$



$$\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}\times\left(m_i\vec{V}_i\right)\right]=\left[\vec{V}_i\times\left(m_i\vec{V}_i\right)\right]=0$$

следовательно $$\left[\vec{r}_i\times\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{V}_i\right)\right]=\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i\times\left(m_i\vec{V}_i\right)\right]$$

Обозначим: $$\vec{L}_i=\left[\vec{r}_i\times\left(m_i\vec{V}_i\right)\right]$$

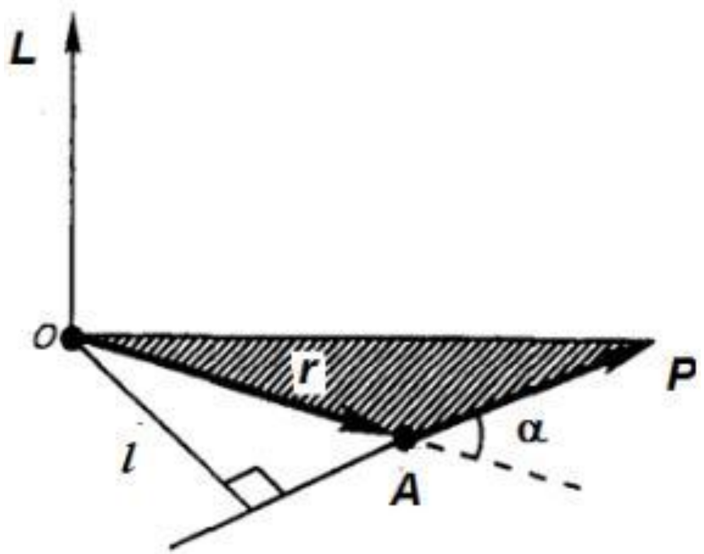


момент импульса *i*-ой материальной точки

$$\vec{r}\perp\vec{V}$$

Динамика вращательного движения тв. тела

Моментом импульса (количества движения) материальной точки **относительно неподвижной точки** О называется физическая величина, определяемая векторным произведением:



$$\boxed{\vec{L} = \left[\vec{r} \times \vec{p}\right] = \left[\vec{r} \times m\vec{V}\right]} \qquad \left[\frac{кг \cdot м^2}{с}\right]$$

Направление вектора $\vec{L}$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$.

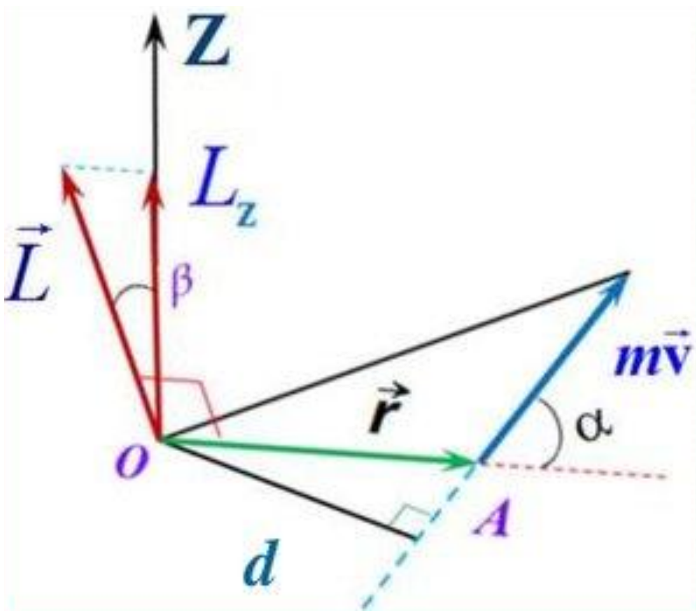
Модуль момента импульса равен

$$L = r \cdot p \cdot \sin\alpha = p \cdot l$$, где

$l = r \cdot \sin\alpha$ - плечо вектора $\vec{p}$ относительно т.О

Динамика вращательного движения тв. тела

Моментом импульса относительно неподвижной оси называется скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки данной оси.



$$L_z = \left[\vec{r} \times m\vec{V}\right]_z$$

Это скалярная величина, равная по модулю:

$$L_z = L\cos\beta$$

Она не зависит от выбора т.О на оси OZ и характеризует способность импульса изменять вращение тела вокруг этой оси.

Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i r_i$$

Динамика вращательного движения тв. тела

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i r_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$V_i = \omega r_i \qquad I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{L_z = I_z \omega}$$

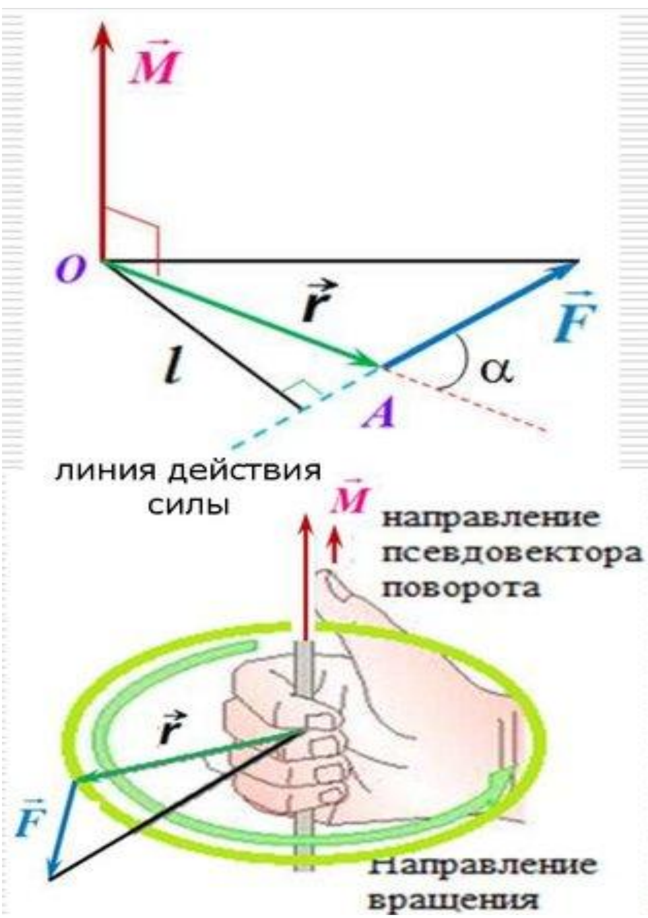
Момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость.

Определения эквивалентны:

$$\boxed{\vec{L} = \left[\vec{r} \times \vec{p}\right] \quad \longleftrightarrow \quad \vec{L} = I\vec{\omega}}$$

Динамика вращательного движения тв. тела

Моментом силы относительно неподвижной точки О называется векторная величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора, проведенного из точки О в точку приложения силы, на силу.



$$\boxed{\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]} \qquad \left[H \cdot м\right]$$

т. А – точка приложения силы

т. О – начало (центр)

Модуль момента силы:

$$\left|\vec{M}\right| = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot l$$

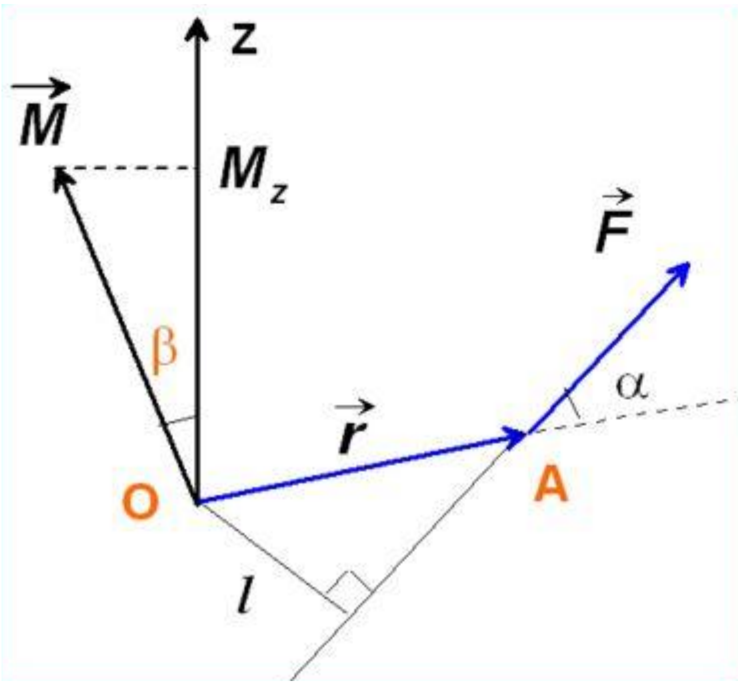
$l = r\sin\alpha$ - плечо силы

(кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой О)

Направление момента силы совпадает с осью вращения и определяется по правилу правого винта (буравчика).

Динамика вращательного движения тв. тела

Моментом силы относительно неподвижной оси z называется скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента силы, определенного относительно произвольной точки данной оси.



$$\boxed{M_z = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]_z} \qquad [H \cdot м]$$

$$M_z = M\cos\beta = rF\sin\alpha\cos\beta$$

α - угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$

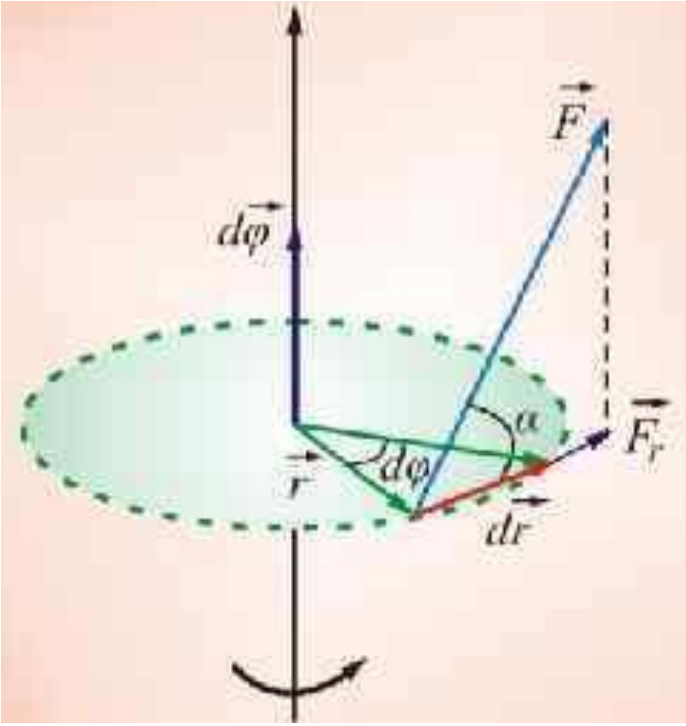
β - угол между $\vec{M}$ и осью z

Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

company name

Динамика вращательного движения тв. тела

Работа и кинетическая энергия при вращательном движении твердого тела



$$dS = rd\varphi$$

$F_\tau = F\sin\alpha$ - **проекция вектора силы на направление пути**

Работа силы равна произведению проекции силы на направление смещения F_τ и смещения dS:

$$dA = F_\tau dS = F\sin\alpha rd\varphi$$

$$Fr\sin\alpha = M_z \longrightarrow \boxed{dA = Md\varphi}$$

Работа силы при вращении тела вокруг неподвижной оси равна произведению момента действующей силы на угол поворота.

company name

Динамика вращательного движения тв. тела

$$dA = Md\varphi \longrightarrow A = M\int_0^{\varphi} d\varphi = M\varphi$$

Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

Кинетическая энергия - величина аддитивная

$$E_{кин} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + .. + \frac{m_n V_n^2}{2}$$

Т.к. тело абсолютно твердое, угловые скорости всех его точек одинаковы, а линейные скорости разные

$$\omega = \frac{V_1}{r_1} = \frac{V_2}{r_2} = .. = \frac{V_n}{r_n} \longrightarrow V_1 = \omega r_1,\ V_2 = \omega r_2,\ V_n = \omega r_n$$

$$E_{кин} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{\omega^2}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2\right)$$

Динамика вращательного движения тв. тела

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + .. + m_n r_n^2$$

Кинетическая энергия вращающегося тела:

$$\boxed{E_{кин} = \frac{I\omega^2}{2}}$$

Кинетическая энергия тела, катящегося без скольжения:

$$E_{кин} = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Основное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

Работа внешних сил при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dE_{кин} = E_{кин_{кон}} - E_{кин_{нач}} = \frac{I\omega_{кон}^2}{2} - \frac{I\omega_{нач}^2}{2}$$

$$Md\varphi = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega d\omega \qquad \div\, dt$$

Динамика вращательного движения тв. тела

$$M\frac{d\varphi}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{dt}; \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega\ ; \qquad \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$$

$$M\omega = I\omega\varepsilon$$

$$\boxed{M = I\varepsilon}$$

или

$$\boxed{\varepsilon = \frac{M}{I}}$$

Основное уравнение динамики вращательного движения или второй закон Ньютона для вращательного движения

Между кинематическими и динамическими параметрами поступательного и вращательного движения существует аналогия:

$$m \rightarrow I \qquad \vec{a} \rightarrow \vec{\varepsilon} \qquad \vec{V} \rightarrow \vec{\omega} \qquad \vec{p} \rightarrow \vec{L} \qquad \vec{F} \rightarrow \vec{M}$$

Для мат. точки: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{V}$ **, продифференцируем это уравнение по времени:**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{V} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

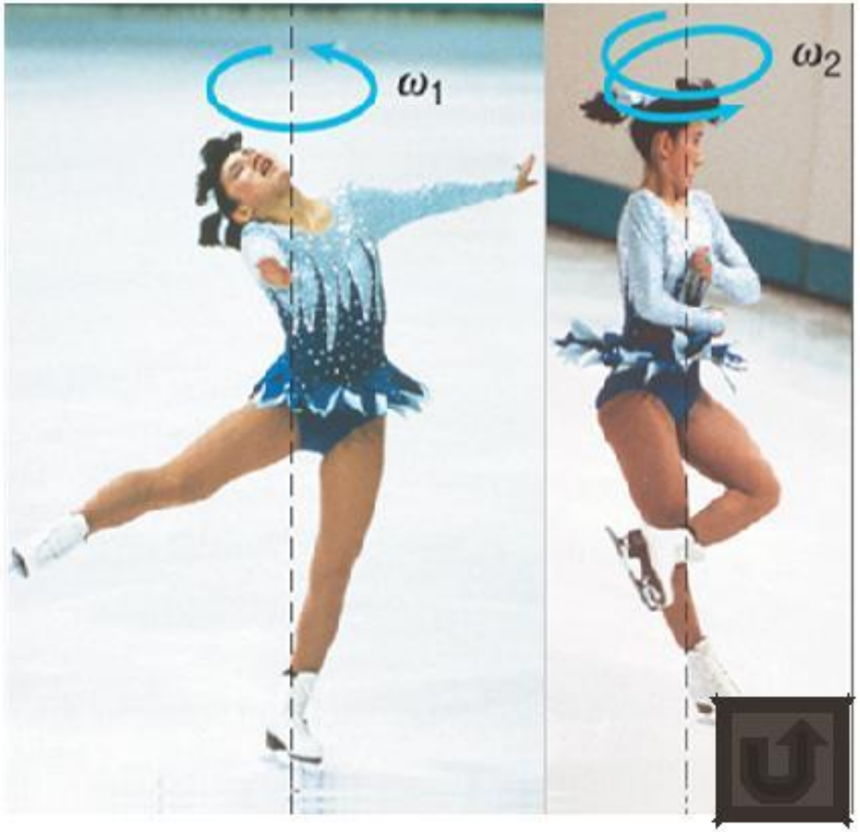
Динамика вращательного движения тв. тела

$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

Основное уравнение динамики вращательного движения или второй закон Ньютона для вращательного движения

Пример: ФИГУРНОЕ КАТАНИЕ

Фигурист, совершающий вращение вокруг вертикальной оси, в начале вращения приближает руки к корпусу, тем самым уменьшая момент инерции и увеличивая угловую скорость. В конце вращения происходит обратный процесс: при разведении рук увеличивается момент инерции и уменьшается угловая скорость, что позволяет легко остановить вращение и приступить к выполнению другого элемента.



company name

Динамика вращательного движения тв. тела

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{V} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

V - скорость мат. точки

F - сила, действующая на мат. точку

равно нулю

M - момент силы

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

- уравнение моментов

Скорость изменения момента импульса тела относительно неподвижной оси вращения равна результирующему моменту относительно этой оси всех внешних сил, действующих на тело.

Если система замкнута, т.е. на нее не действуют внешние силы, то момент внешних сил равен нулю

$$\vec{M} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$\vec{L} = const$, если $\vec{F}_{внеш} = 0$

момент импульса замкнутой с.м.т. остается постоянным

Динамика вращательного движения тв. тела

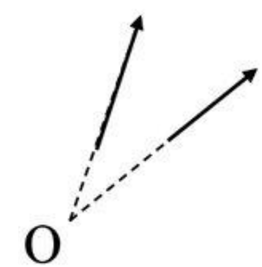
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$ - уравнение моментов

$$\sum \vec{M}_i = 0$$

Дополнение первое:

Система незамкнута, т.е. на нее действуют внешние силы, но суммарный момент внешних сил равен нулю

$$\vec{L} = const \text{ , если } \vec{M}_{внеш} = \sum \vec{M}_i = 0$$



Дополнение второе:

$$\sum \vec{M}_i \neq 0$$

Система незамкнута, т.е. на нее действуют внешние силы и суммарный момент внешних сил не равен нулю. Но проекция момента внешних сил относительно некоторой оси равна нулю.

$$L_x = const \text{ , если } M_x^{внеш} = \sum M_{ix} = 0$$

Динамика вращательного движения тв. тела

Замечание: Момент импульса системы изменяется только под действием внешних сил !!!
Внутренние силы не могут изменить момент импульса системы материальных точек !!!