Кинематика

Кинематикой называют раздел механики в котором изучаютгеометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил

Кинематика точки

(точка тело, не имеющее размеров и массы)

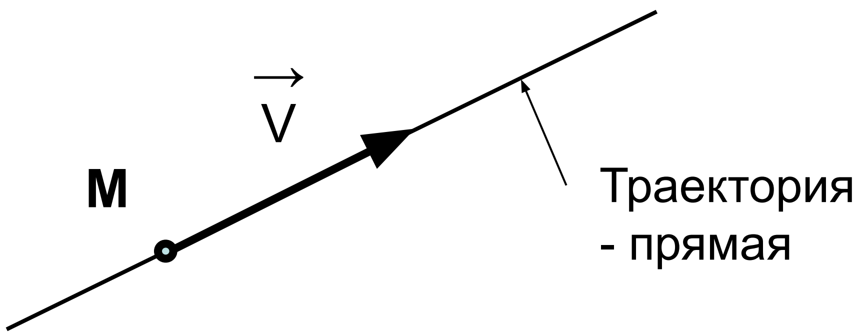
Основной задачей кинематики точки является отыскание траектории, скорости и ускорения (при известном законе движения точки)

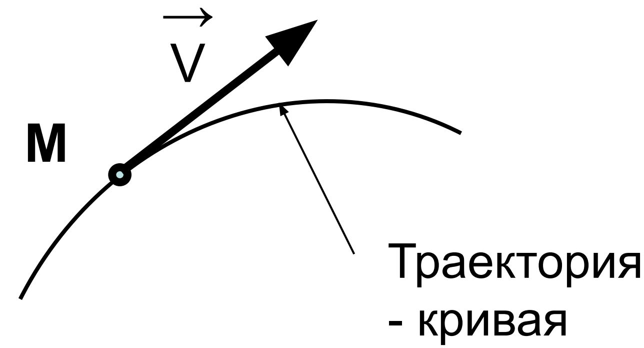
Траектория точки

Геометрическое место положений движущейся точки называется ее **траекторией** движения.(движение происходит во времени и в пространстве)

А) Прямолинейное движение

Б) Криволинейное движение



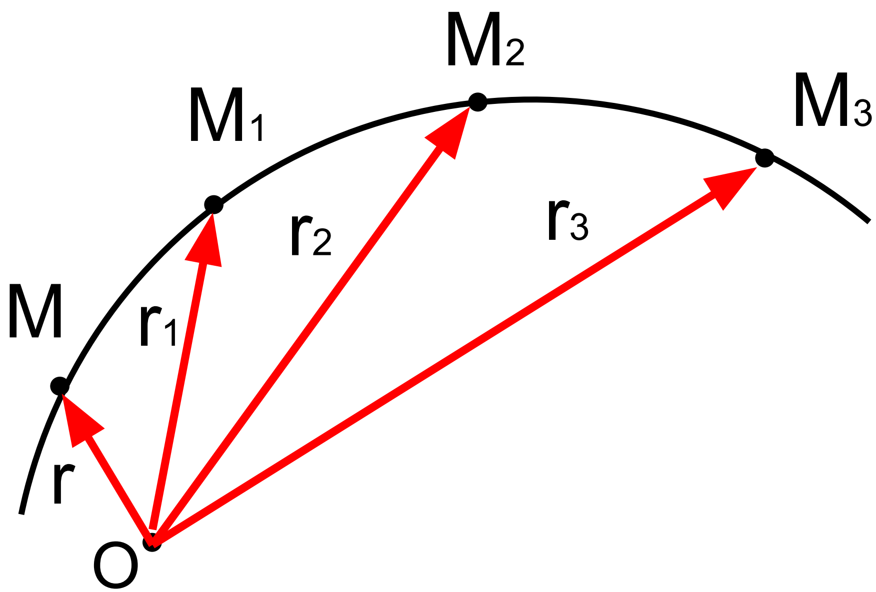


$\vec{V}$ - вектор скорости точки М, [м/с]

Примечание: вектор скорости точки всегда направлен по касательной к траектории ее движения.

Три способа задания движения точки

1. Векторный способ

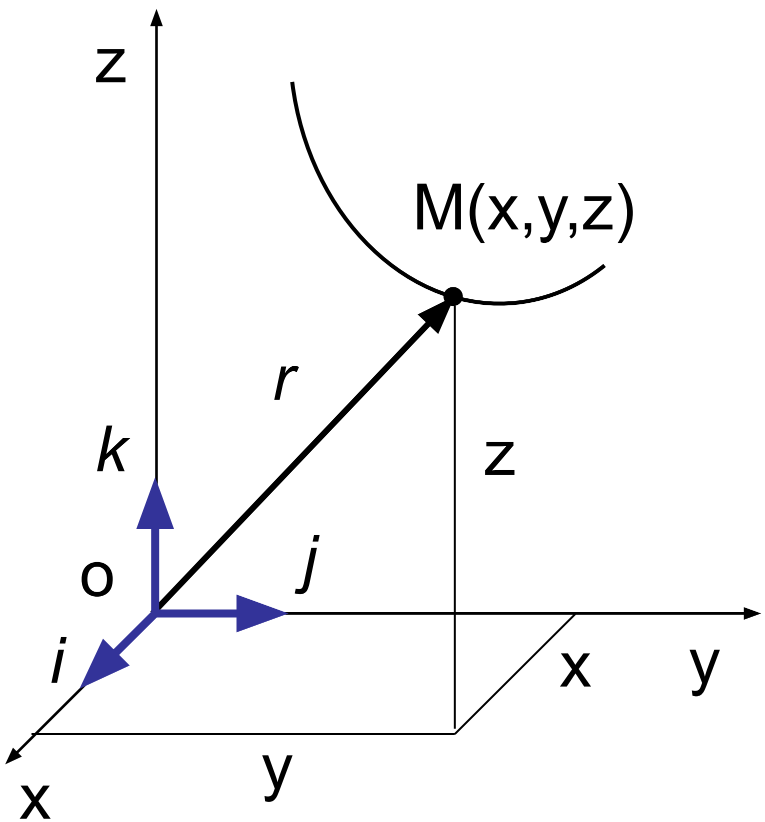


Вектор $\bar{r}$ называется радиусом - вектором точки М.

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t).} \qquad (1)$$

Линия, образованная концами переменного вектора, начало которого находится в определенной точке пространства, называется ***<u>годографом</u>*** этого вектора. Следовательно, траектория точки М является годографом ее радиуса – вектора $\bar{r}$.

2. Координатный способ

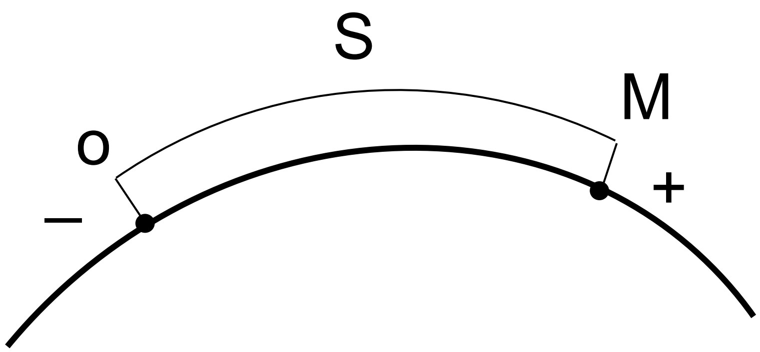


$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Уравнения (2) называются <u>уравнениями движения точки в декартовых координатах</u> (параметрические уравнения траектории точки)

$$\bar{r} = \bar{i} \cdot x + \bar{j} \cdot y + \bar{k} \cdot z$$

3. Естественный способ



$$\boxed{S = S(t)} \qquad (3)$$

Зависимость (3) называют законом изменения расстояний, или законом (уравнением) движения точки по траектории

Задать движение точки естественным способом – значит указать точку отсчета, траекторию и направление движения, а также закон движения точки по траектории.

Скорость точки

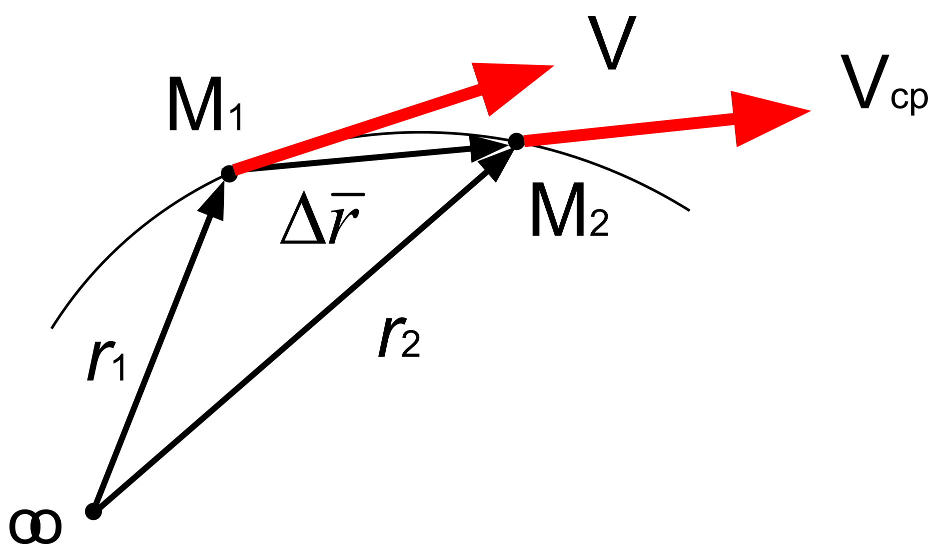
- **Скорость** – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения радиуса-вектора движущейся точки

ОБОЗНАЧЕНИЕ: $\vec{\mathbf{V}}$

РАЗМЕРНОСТЬ в СИ: [м/с]

НАПРАВЛЕНИЕ: **по касательной к траектории**

Скорость точки при векторном способе задания движения



$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + \Delta\bar{r};$$

$$\bar{V}_{ср} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}.$$

При $\Delta t \to 0$

$$\boxed{\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}.} \qquad (4)$$

При векторном способе задания движения скорость точки определяется как первая производная по времени от радиуса-вектора точки и направлена по касательной к траектории данной точки в сторону движения

Скорость точки при координатном способе задания движения

Пусть движение точки задано в декартовых координатах уравнениями: $x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t)$.

Векторное уравнение движения точки:

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z = \bar{i}x(t) + \bar{j}y(t) + \bar{k}z(t), \quad \grave{o}\ \hat{\imath}\ \tilde{a}\ddot{a}\grave{a}$$

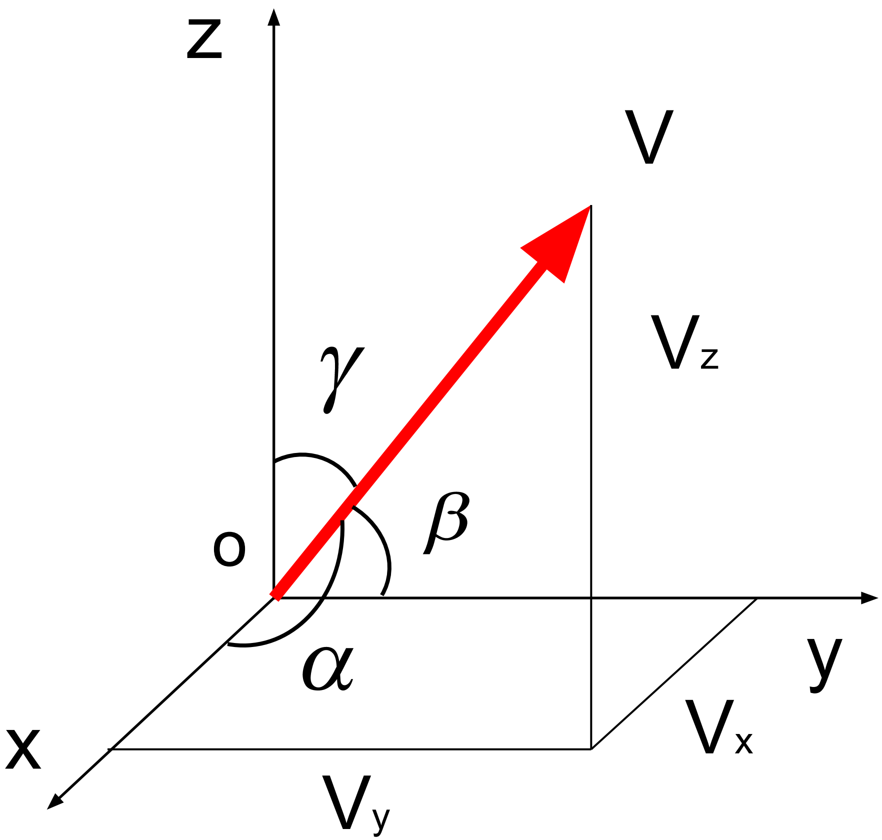
$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{i}\frac{dx}{dt} + \bar{j}\frac{dy}{dt} + \bar{k}\frac{dz}{dt} = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z}.$$

$$\dot{x} = V_x;\ \dot{y} = V_y;\ \dot{z} = V_z; \qquad \boxed{V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\,.} \qquad (5)$$

При координатном способе задания движения скорость точки определяется по своим проекциям V_x, V_y, V_z на оси координат, каждая из которых находится как первая производная по времени от соответствующей координаты.

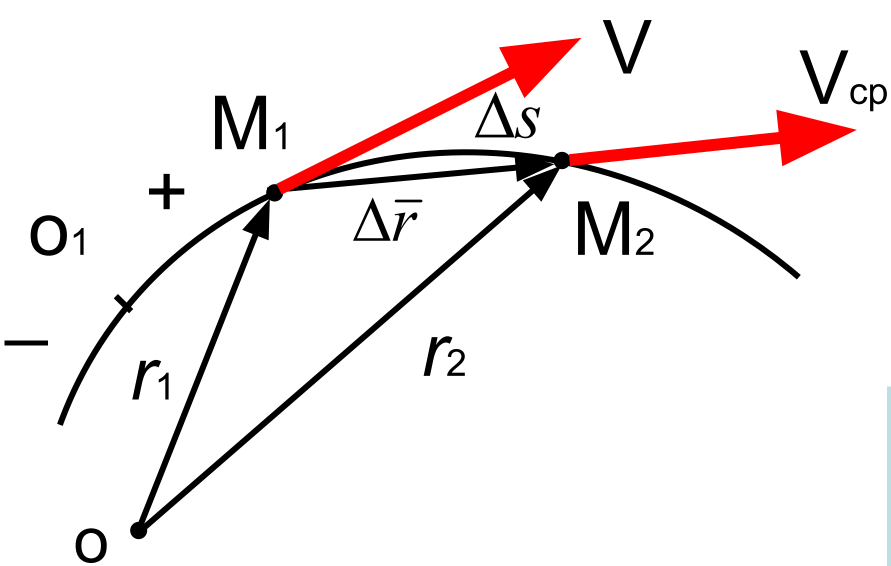
Скорость точки должна быть всегда направлена по касательной к траектории в данной точке

Направление вектора скорости может быть также определено по направляющим косинусам:



$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{V_x}{V} = \frac{\dot{x}}{V};\\ \cos\beta &= \frac{V_y}{V} = \frac{\dot{y}}{V};\\ \cos\gamma &= \frac{V_z}{V} = \frac{\dot{z}}{V}.\end{aligned}\right\}$$

Скорость точки при естественном способе задания движения



Задано: 1. Траектория;
2. Начало отсчета – O$_1$;
3. Направление движения;
4. Закон движения ***S = S(t).***

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt};$$

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau} - \textit{орт касательной};$$

$$V = \frac{ds}{dt} = \dot{s}; \quad \bar{V} = V \cdot \bar{\tau}$$

При естественном способе задания движения скорость точки определяется как первая производная по времени от закона движения и направлена по касательной к траектории в данной точке

Ускорение точки

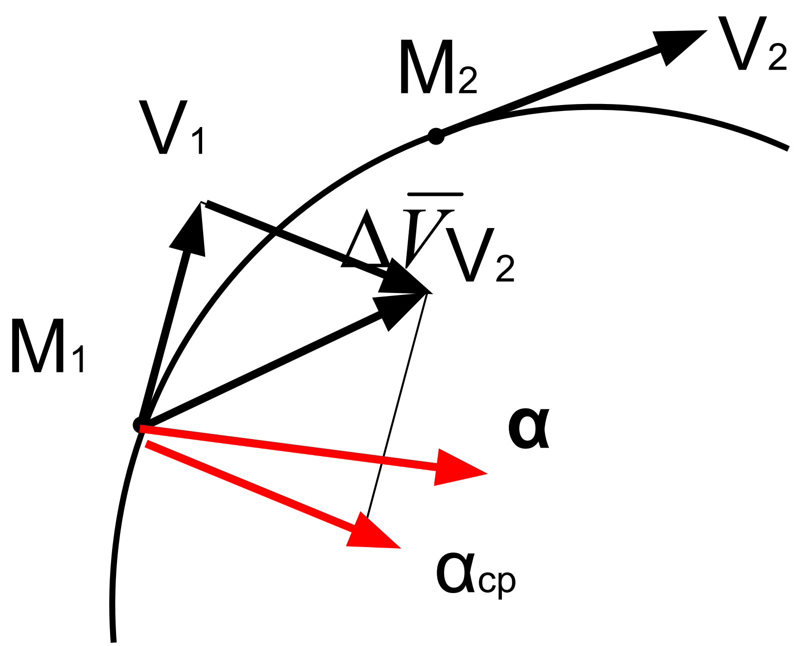
Векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости и по модулю и по направлению, называется **ускорением**.

ОБОЗНАЧЕНИЕ: $\overline{a}$

РАЗМЕРНОСТЬ в СИ: [м/с^2]

НАПРАВЛЕНИЕ: **в сторону вогнутости траектории**

Ускорение точки при векторном способе задания движения



$\Delta V; \ \overline{V}_2 = \overline{V}_1 +$

$$\overline{a}_{cp} = \frac{\Delta \overline{V}}{\Delta t}.$$

При $\Delta t \to 0$

$$\boxed{\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}.} \qquad (7)$$

Ускорение точки при векторном способе задания движения определяется как первая производная по времени от вектора скорости, или вторая производная по времени от радиуса-вектора по времени и направлена внутрь кривизны траектории (в сторону вогнутости кривой)

Ускорение точки при координатном способе задания движения

Пусть движение точки задано в декартовых координатах уравнениями: x = x(t); y = y(t); z = z(t).

Векторное уравнение движения точки:

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z = \bar{i}x(t) + \bar{j}y(t) + \bar{k}z(t),$$

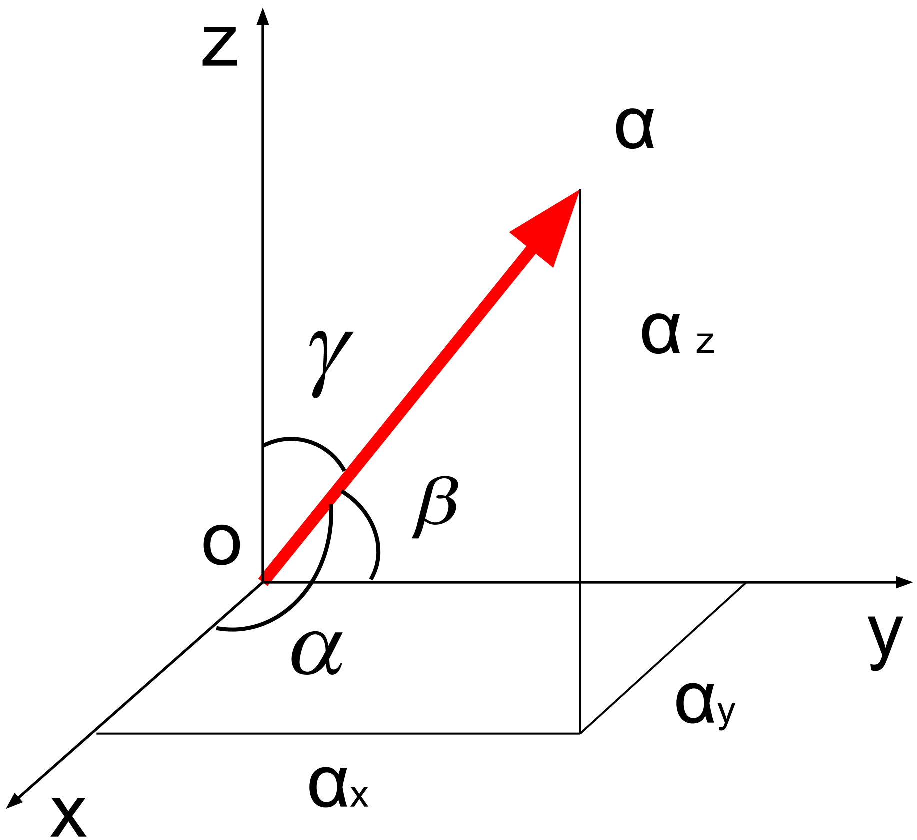
тогда

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \bar{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \bar{k}\frac{d^2z}{dt^2} = \bar{i}\ddot{x} + \bar{j}\ddot{y} + \bar{k}\ddot{z}.$$

$$\ddot{x} = a_x; \quad \ddot{y} = a_y; \quad \ddot{z} = a_z; \qquad \boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.} \qquad (8)$$

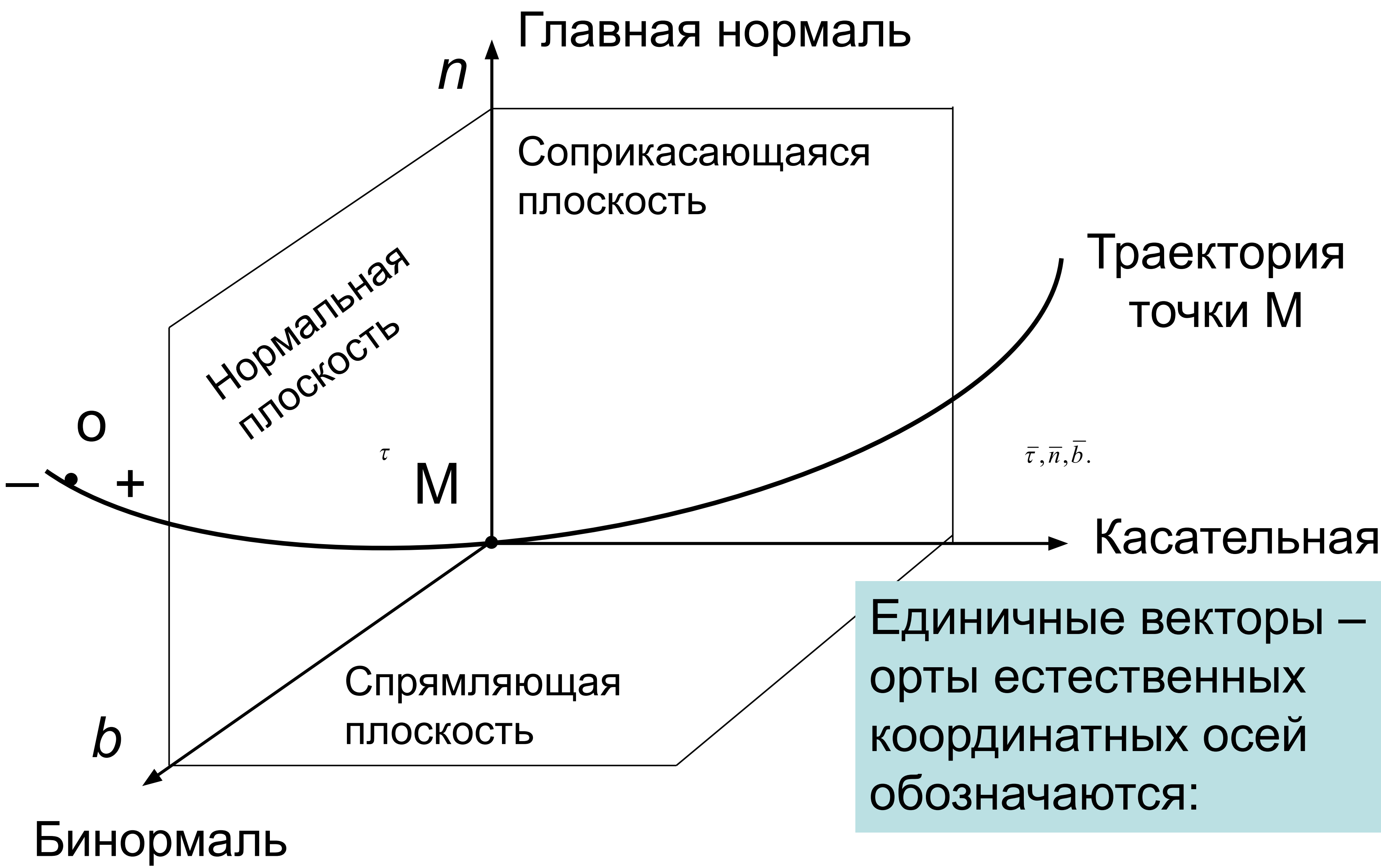
При координатном способе задания движения ускорение точки определяется по своим проекциям на оси координат, каждая из которых находится как вторая производная соответствующей координаты по времени

Направление вектора ускорения также может быть определено по направляющим косинусам.



$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{a};\\ \cos\beta &= \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{a};\\ \cos\gamma &= \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{a}.\end{aligned}\right\}$$

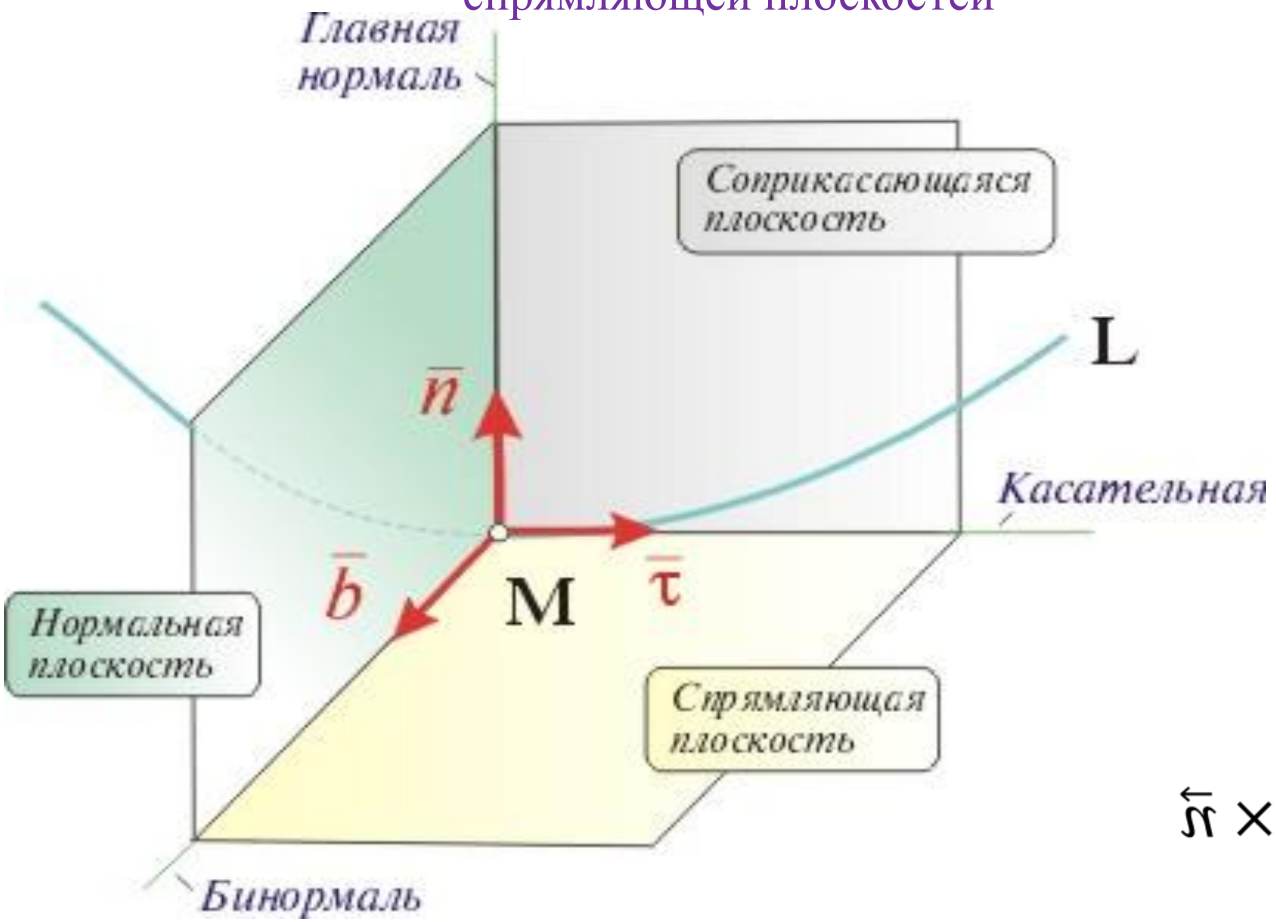
Естественные координатные оси



Единичные векторы – орты естественных координатных осей обозначаются:

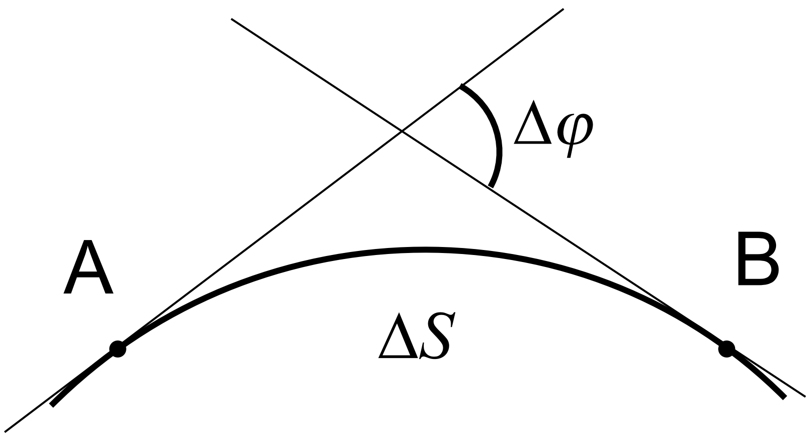
Естественные координатные оси - такая система координат в данной точке траектории, осями которой являются касательная, главная нормаль и бинормаль

Естественный трёхгранник - совокупность соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей



$$\overleftarrow{n} \times \overleftarrow{\tau} = \overleftarrow{b}$$

Кривизна кривой

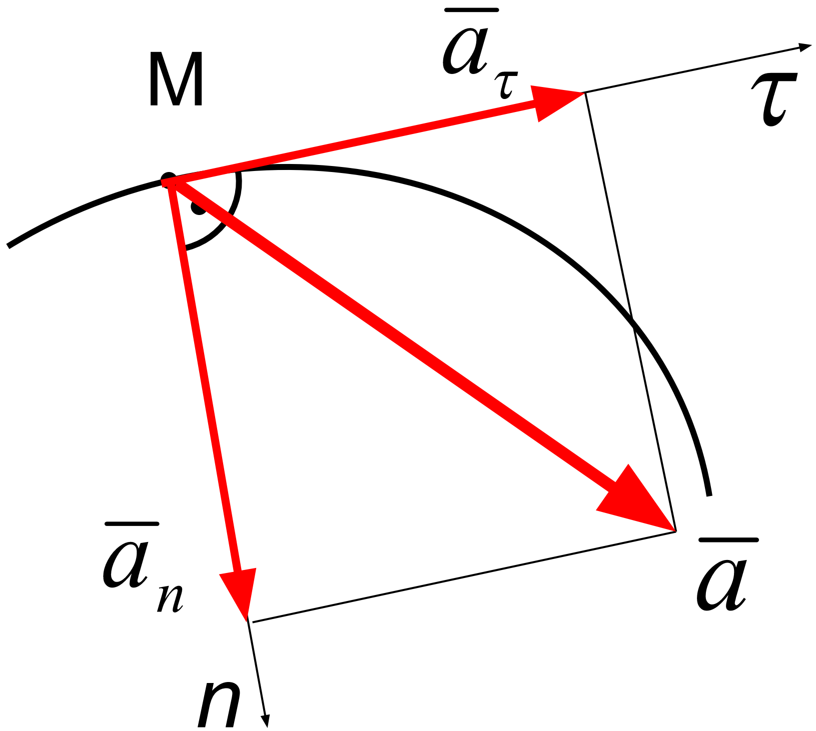


$\Delta\varphi$ - угол смежности

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS}$$ - кривизна кривой

$$K = \frac{1}{\rho},$$ где ρ - радиус кривизны

Ускорение точки при естественном способе задания движения



$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho};$$

$$\bar{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\bar{\tau}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}\bar{n};$$

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n;$$

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.} \qquad (9)$$

При естественном способе задания движения ускорение точки находится как геометрическая сумма двух составляющих: **касательного ускорения**, направленного по касательной к траектории в данной точке и **нормального ускорения**, направленного по главной нормали .

Законы равнопеременного движения точки

$$(a_\tau = const)$$

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$$