Основные теоремы и формулы теории вероятности.

Основные вопросы:

- *Формула умножения теории вероятности. Формула сложения теории вероятности.*
- *Формула полной вероятности.*
- *Повторение испытаний. Формула Бернулли.*

Теорема 1 сложения вероятностей

Если случайные события А и В являются ***несовместными событиями*** с известными вероятностями, то справедлива следующая теорема.

Вероятность суммы двух несовместных событий *равна сумме вероятностей этих событий.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

- **Следствие 1:** *Если события* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *образуют полную группу* ***несовместных событий****, то сумма их вероятностей равна единице.*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1}$$

- **Следствие 2:** Сумма вероятностей ***противоположных событий*** равна единице.

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

Задача 1. В ящике лежат 10 шаров: 3 красных, 2 синих и 5 белых. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной (не белый)?

▷ I способ. Пусть событие A — появление красного шара, B — появление синего шара, тогда $A+B$ — появление цветного шара. Очевидно, что $P(A)=\frac{3}{10}$, $P(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$. Так как события A и B совместны, к ним применима теорема сложения вероятностей: $P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

II способ. Пусть событие C — появление белого шара, тогда событие $\overline{C}$ — появление не белого (т. е. цветного) шара. Очевидно, $P(C)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, а $P(\overline{C})=1-P(C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. ◀

Задача 2. Вероятность попадания в мишень стрелком равна 0,6. Какова вероятность того, что он, выстрелив по мишени, промахнется?

▷ Если событие A — попадание в мишень, то по условию $P(A)=0{,}6$. Промах — противоположное попаданию событие, и его вероятность $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}6=0{,}4$. ◀

Пример 1. Военный летчик получил задание уничтожить два рядом расположенных склада боеприпасов противника. На борту самолета осталась лишь одна бомба. Вероятность попадания в первый склад равна 0,225, во второй — 0,325. В результате детонации любое попадание взрывает оба склада. Какова вероятность того, что склады будут уничтожены?

Решение. События A — «попадание в первый склад» и B — «попадание во второй склад» несовместны, поэтому вероятность попадания хотя бы в один из складов

$$\mathsf{P}(A+B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)=0{,}225+0{,}325=0{,}55.$$

Пример 2. На заочное отделение техникума поступают контрольные работы по математике из городов A, B и C. Вероятность поступления контрольной работы из города A равна 0,6, из города B — 0,1. Найти вероятность того, что очередная контрольная работа поступит из города C.

Решение. События «контрольная работа поступила из города A», «контрольная работа поступила из города B» и «контрольная работа поступила из города C» образуют полную группу, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$0{,}6+0{,}1+p=1 \Leftrightarrow p=0{,}3.$$

Теорема 2 сложения вероятностей

Вероятность появления хотя бы одного из двух ***совместных*** ***событий*** ***равна*** ***сумме*** ***вероятностей этих событий*** ***без вероятности их совместного появления*****.**

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Пример 4. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей хотя бы один раз выпадет 6 очков.

Решение. Обозначим события:

A — «выпадение шести очков при бросании первой игральной кости»;

B — «выпадение шести очков при бросании второй игральной кости».

Так как события A и B совместны, то

$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB).$$

Но $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$ и $\mathrm{P}(AB)=\frac{1}{36}$, поэтому

$$\mathrm{P}(A+B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}.$$

- **Определение.** Событие ***А*** называется ***независимым*** от события ***В***, если вероятность события ***А*** не зависит от того, произошло событие ***В*** или нет.

- **Определение.** Событие ***А*** называется ***зависимым*** от события ***В***, если вероятность события ***А*** меняется в зависимости от того, произошло событие ***В*** или нет.

Теорема произведения

- Вероятность ***произведения*** двух ***независимых*** событий равна произведению вероятностей событий

$$P(AB) = P(A) \bullet P(B)$$

Пример 6. Два стрелка стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,9, для второго — 0,8. Найти вероятность того, что оба стрелка попадут в цель.

Решение. Обозначим события:

A — «попадание в цель первым стрелком»,
B — «попадание в цель вторым стрелком».

Так как события A и B независимы, то

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72.$$

Пример 7. Вероятность попадания в цель при стрельбе из первого орудия (событие A) равна $P(A) = 0{,}8$, из второго орудия (событие B) равна $P(B) = 0{,}7$. Найти вероятность попадания в цель хотя бы одним из орудий (событие $A + B$) при одновременной стрельбе из обоих орудий.

Решение. Так как вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, то события A и B независимы. Но

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$$

Поэтому искомая вероятность

$$\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}94.$$

Условная вероятность

Определение. ***Условной вероятностью*** **называется вероятность события *B*, вычисленная в предположении, что событие *A* уже наступило.**

Обозначается $P_A(B)$

$$P_A(B) = P(B/A) = P(AB)/P(A)$$

Пример. В коробке 3 белых и 7 чёрных шаров. Из неё дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно.

А – первый шар оказался чёрным

В – второй шар оказался белым

Тогда p_A(В) – вероятность появления вторым *белого* шара, если первый вытащенный шар – *чёрный*.

$$p_A(B) = \frac{m}{n}$$

m – число случаев, благоприятствующих наступлению события ***B*** при условии, что ***A*** уже наступило $\Rightarrow$ благоприятствующих событиям ***A*** и ***B*** вместе $\Rightarrow$ благоприятствующих событию ***AB***

n – число всех случаев, но при условии, что ***A*** наступило $\Rightarrow$ число случаев, благоприятствующих событию ***A***

Обозначим через ***N*** – число всех возможных случаев.

$$p_A(B) = \frac{m}{n} = \frac{m/N}{n/N} = \frac{p(AB)}{p(A)} \quad \Rightarrow \quad p_A(B) = \frac{p(AB)}{p(A)}$$

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

✔

Вероятность *совместного появления* двух <u>*зависимых*</u> событий равна *произведению* вероятности одного из них на *условную вероятность другого*, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило.

$$P(AB) = P(A) \bullet P(B / A) = P(A) \bullet P_A(B)$$

Пример 10. В учебных мастерских техникума изготовляются детали на трех станках. Вероятность изготовления детали на первом станке равна 0,6. Вероятность появления годной детали на первом станке равна 0,8. Найти вероятность того, что годная деталь изготовлена на первом станке.

Решение. Обозначим события:

A — «деталь изготовлена на первом станке»,
B — «деталь годная».

Имеем: $\mathsf{P}(A) = 0{,}6$, $\mathsf{P}(B|A) = 0{,}8$. По первой формуле (8) находим:

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B|A) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48.$$

Следствие.

В случае ***произведения нескольких*** ***зависимых*** ***событий вероятность равна произведению*** *одного из них на* ***условные вероятности всех остальных при условии****, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.*

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\bullet P(A_2/A_1)\bullet P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$$

П р и м е р 11. В ящике находится 7 деталей первого сорта, 5 второго сорта и 3 третьего сорта. Из ящика последовательно вынимают три детали. Найти вероятность того, что первая наугад вынутая деталь окажется первого сорта (событие A_1), вторая деталь — второго сорта (событие A_2) и третья деталь — третьего сорта (событие A_3).

Р е ш е н и е. Очевидно, что

$$\mathbf{P}(A_1)=\frac{7}{15}, \quad \mathbf{P}(A_2|A_1)=\frac{5}{14} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(A_3|A_1A_2)=\frac{3}{13}.$$

По формуле (8) находим

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3)=\mathbf{P}(A_1)\cdot\mathbf{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbf{P}(A_3|A_1A_2)=$$

$$=\frac{7}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{3}{13}=\frac{1}{26}.$$

Задача 3. В лаборатории работают 7 женщин и 3 мужчины. Случайным образом из числа этих сотрудников для научной конференции выбираются один докладчик и один содокладчик. Какова вероятность того, что докладчиком будет выбрана женщина, а содокладчиком — мужчина?

▷ Пусть событие A — докладчиком выбрана женщина, событие B — содокладчик — мужчина.

1-й способ. Вероятность того, что сначала выбирался основной докладчик и им оказалась женщина (наступило событие A), равна $P(A)=\frac{7}{10}$.

Вероятность того, что вторым выбирался содокладчик и им оказался мужчина (произошло событие B), вычисляется при условии, что первой уже была выбрана женщина, т. е. $P(B/A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

По формуле (2) имеем $P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{30}$.

2-й способ. Вероятность того, что первым выбирался содокладчик и им оказался мужчина (произошло событие B), равна $P(B)=\frac{3}{10}$.

Вероятность того, что вторым выбирался докладчик и им оказалась женщина (событие A), вычисляется при условии, что первым уже выбран мужчина, т. е. $P(A/B)=\frac{7}{9}$. По формуле (2) получаем $P(BA)=P(B)\cdot P(A/B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$. ◀

Вероятность появления хотя бы одного события

Вероятность появления <u>хотя бы одного из</u> событий $A_1, A_2, ..., A_n$, <u>независимых</u> в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий

$$\bar{A}_1, \bar{A}_2, ...\bar{A}_n$$

$$\boxed{P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n}$$

Здесь событие ***A*** обозначает наступление хотя бы одного из событий $\mathbf{A_i}$, а $\boldsymbol{q_i}$ – вероятность противоположных событий .

<u>Пример</u>. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

<u>Решение</u>:

Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие А, появление хотя бы одной червонной карты – событие В. Таким образом нам надо определить вероятность события **С = А + В**.

Кроме того, события А и В – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого.

Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт.

При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной ни бубновой карты равна $\frac{26}{52}$, при вытаскивании второй карты - $\frac{25}{51}$, третьей - $\frac{24}{50}$, четвертой - $\frac{23}{49}$.

Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных равна

$$P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}.$$

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945$

Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие ***A*** может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ и условные вероятности наступления события ***A*** при наступлении события $\boldsymbol{H_i}$ $P(A/H_1), P(A/H_2), \ldots, P(A/H_n)$.

Формула полной вероятности

<u>*Теорема*</u>*. Вероятность события* *A*, *которое может произойти вместе с одним из событий* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *, равна* *сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий* *на соответствующие им условные вероятности наступления события А.*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)$$

Пример 1. В учебных мастерских на станках a, b и c изготовляют соответственно 25, 35 и 40% всех деталей. В их продукции брак составляет соответственно 15, 12 и 6%. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь дефектна.

Решение. Обозначим события:

A — «наугад взятая деталь дефектна»,
H_1 — «деталь изготовлена на станке a»,
H_2 — «деталь изготовлена на станке b»,
H_3 — «деталь изготовлена на станке c».

Очевидно, что события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу и $\mathbf{P}(H_1) = 0{,}25$, $\mathbf{P}(H_2) = 0{,}35$, $\mathbf{P}(H_3) = 0{,}4$. Кроме того, числа 0,15; 0,12; 0,06 (15%, 12% и 6%) являются условными вероятностями события A при выполнении событий (гипотез) H_1, H_2, H_3 соответственно, т. е.

$$\mathbf{P}(A \mid H_1) = 0{,}15, \quad \mathbf{P}(A \mid H_2) = 0{,}12, \quad \mathbf{P}(A \mid H_3) = 0{,}06.$$

По формуле (1) находим

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A \mid H_i) =$$

$$= \mathbf{P}(H_1) \cdot \mathbf{P}(A \mid H_1) + \mathbf{P}(H_2) \cdot \mathbf{P}(A \mid H_2) + \mathbf{P}(H_3) \cdot \mathbf{P}(A \mid H_3) =$$

$$= 0{,}25 \cdot 0{,}15 + 0{,}35 \cdot 0{,}12 + 0{,}4 \cdot 0{,}06 = 0{,}1035.$$

Формула Бернулли

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие ***А***, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются ***<u>независимыми относительно события А</u>***.

<u>Определение.</u> *Повторными независимыми испытаниями* называют испытания, удовлетворяющие следующим условиям:

1) количество n испытаний конечно;

2) вероятность осуществления случайного события A в каждом из испытаний постоянна: $P(A) = p = \text{const}$.

Подобная схема испытаний называется *схемой Бернулли*.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность того, что произойдет событие A, равна p, а следовательно, вероятность того, что оно не произойдет, равна $q = 1 - p$. Требуется найти вероятность того, что при n повторных испытаниях событие A произойдет m раз. Искомую вероятность обозначим $p_{m,\, n}$.

Событие, состоящее в том, что событие A происходит при каждом из m первых испытаний и не происходит при остальных $n - m$ испытаниях, можно записать в виде

$$\underbrace{A \cdot A \ldots A}_{m} \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot \bar{A} \ldots \bar{A}}_{n-m}.$$

Так как все n испытаний, по условию, независимы, то можно применить правило вычисления вероятности произведения независимых событий; получим

$$\mathbf{P}(\underbrace{A \cdot A \ldots A}_{m} \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot \bar{A} \ldots \bar{A}}_{n-m}) = p^m q^{n-m}.$$

Событие A может произойти m раз при n испытаниях, но при этом может получиться и другая последовательность чередований событий A и $\bar{A}$, однако каждый раз получим одну и ту же вероятность $p^m q^{n-m}$. Очевидно, что число чередований событий A и $\bar{A}$ равно числу сочетаний C_n^m из n элементов по m, поэтому по теореме сложения вероятностей для несовместных событий искомая вероятность вычисляется по формуле

$$p_{m,\, n} = C_n^m p^n q^{n-m}. \qquad (1)$$

Эта формула называется *формулой Бернулли*.

Формула Бернулли

Вероятность того, что в отдельном опыте произойдет событие ***А***, равна ***р***. Тогда вероятность того, что в ***n*** опытах ***m*** раз случится событие ***А***, дается ***формулой Бернулли:***

$$P(n,m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

Частные случаи формулы Бернулли

1. Вероятность осуществления события А в n испытаниях ровно n раз равна:

$$P_n(n) = \frac{n!}{n!0!} \cdot p^n \cdot q^0 = p^n$$

2. Вероятность осуществления события А в n испытаниях нуль раз равна:

$$P_n(0) = \frac{n!}{n!0!} \cdot p^0 \cdot q^n = q^n$$

♦ ПРИМЕР

Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет $p = 0{,}8$. Найти вероятность четырех попаданий при шести выстрелах.

РЕШЕНИЕ. Здесь $n = 6$, $k = 4$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. По формуле Бернулли находим

$$P_6(4) = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot (0{,}8)^4 \cdot (0{,}2)^4 \cdot (0{,}2)^{6-4} =$$

$$= \frac{6!}{4!2!} \cdot (0{,}8)^4 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}246.$$

Задача 3. Игральный кубик бросается 4 раза. Какова вероятность того, что в этой серии испытаний 5 очков появятся ровно 3 раза?

▷ Пусть A — появление 5 очков в одном испытании. Событие A в каждом из четырех независимых испытаний может произойти, а может и не произойти. Известно, что $p=P(A)=\frac{1}{6}$. Тогда согласно формуле (3)

$$P_4(3)=C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-3}=4\cdot\frac{1}{216}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{324}\approx 0{,}015. \blacktriangleleft$$

Пример 1. В урне 20 шаров: 15 белых и 5 черных. Вынули подряд 5 шаров, причем каждый вынутый шар возвращается в урну и перед извлечением следующего шары в урне тщательно перемешиваются. Найти вероятность того, что из пяти вынутых шаров будет два белых.

Решение. Вероятность появления белого шара в каждом испытании равна $p=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$, а вероятность непоявления белого шара равна $q=1-p=\frac{1}{4}$. По формуле Бернулли находим

$$p_{2,5}=C_5^2p^2q^{5-2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{45}{512}.$$

Домашнее задание